Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2008

Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge

Formação Inicial de Professores do Ensino Básico: Um percurso centrado na história da matemática

Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2008

Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge

Formação Inicial de Professores do Ensino Básico: Um percurso centrado na história da matemática

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Didáctica, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria de Fátima Carmona Simões da Paixão, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco e da Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira, Professora Auxiliar do Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa da Universidade de Aveiro

Co-financiado pelo Fundo social Europeu, no âmbito do PRODEP, Medida 5 – Formação de Docentes e outros agentes, Acção 5.3 – Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior.

UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu

Aos meus filhos, Luís e João

o júri

presidente

Professor Doutor Manuel João Senos Matias
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Nilza Maria Vilhena Nunes da Costa
Professora Catedrática da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva
Professor Associado da Universidade de Coimbra

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (Co-orientadora)

Professora Doutora Maria de Fátima Carmona Simões da Paixão
Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco (Orientadora)

Professora Doutora Dárida Maria Fernandes
Professora Adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto

agradecimentos

Começo por expressar a minha profunda gratidão às minhas orientadoras, Professora Doutora Fátima Paixão e Professora Doutora Isabel Cabrita, por terem aceite orientar esta dissertação, pela criação das condições necessárias para o seu desenvolvimento e, essencialmente, pela sua orientação rigorosa, traduzida em inúmeras e pertinentes críticas e sugestões. O seu estímulo e apoio permanentes foram fundamentais para a concretização deste trabalho.
.
Às alunas, hoje professoras, que viabilizaram este estudo, agradeço a disponibilidade, o interesse e o empenhamento postos ao longo de quase dois anos de trabalho em conjunto, com tudo o que isso implicou em termos de tempo, esforço e de partilha de experiências e opiniões.

Aos professores cooperantes pela receptividade e colaboração neste estudo.

Ao Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, por, desde há muito, ter marcado a minha carreira profissional e a forma como encaro o ensino da matemática e pelo apoio e amizade que sempre manifestou ao longo dos anos.

À Escola Superior de Educação de Castelo Branco e em particular à sua direcção no período de 2003 a 2007, pelo apoio e disponibilização de meios. Uma palavra de agradecimento é também devida ao Centro de Recursos e Apoio Tecnológico pelo apoio técnico.

Aos meus pais, pela vida e pela compreensão dos momentos de ausência.

E, em particular, ao Pedro, pelo encorajamento e paciência constantes.

palavras-chave

História da matemática; problemas históricos; resolução de problemas; didáctica da matemática; literacia matemática; formação de professores.

resumo

Este estudo apresenta e avalia um Percurso de Formação (PF) com foco na História da Matemática, em que a resolução e exploração didáctica de problemas históricos foram encarados como uma metodologia a privilegiar na formação inicial de professores para o ensino básico, para tentar compreender em que medida tal PF contribui para o desenvolvimento do conhecimento didáctico de futuros professores e para a promoção de práticas de ensino inovadoras.

O quadro de referência teórico estrutura-se em torno de três grandes áreas: História e Filosofia da Ciência/Matemática, ensino da Matemática e formação inicial de professores. Na primeira, analisam-se as alterações ocorridas na filosofia contemporânea da matemática, nomeadamente as que concernem à relevância epistemológica da história e da construção do conhecimento matemático, bem como as suas implicações para a didáctica. Na segunda, aprofundam-se as orientações mais recentes para o ensino da matemática, direccionado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática. Finalmente, analisam-se e aprofundam-se os conceitos de conhecimento didáctico e de conteúdo, a partir da discussão de diferentes modos de entender a noção de conhecimento profissional do professor e apresentam-se recomendações para a formação inicial de professores de matemática para o ensino básico.

No que respeita às opções metodológicas, o estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa de índole interpretativa. Entre Janeiro de 2005 e Junho de 2006, implementou-se um PF, que envolveu um conjunto articulado de intervenções em várias disciplinas dos dois últimos anos de uma licenciatura em Ensino Básico, no qual para além de um grupo-turma de dez alunas, foram particularmente envolvidas três futuras professoras, em prática pedagógica. As principais fontes de recolha de dados foram a observação (participante e não participante), os registos áudio das sessões de formação, os registos áudio e/ou vídeo da prática de ensino, os questionários aplicados às futuras professoras e as entrevistas realizadas às futuras professoras e aos seus professores cooperantes.

Os resultados do estudo permitem concluir que, através da resolução e exploração didáctica de problemas históricos, as futuras professoras foram confrontadas com a face social e cultural da Matemática e com o desafio de a introduzir nas aulas do ensino básico. Tal como os participantes reconheceram e os seus professores cooperantes corroboraram, foi possível construir e implementar estratégias de ensino e aprendizagem centradas na resolução de problemas históricos, que favoreceram o estabelecimento de algumas ligações com outras disciplinas do currículo (em particular, com a disciplina de História e Geografia de Portugal) e realçaram aplicações da Matemática ao quotidiano passado.

A análise das práticas pedagógicas sugere que o PF contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento didáctico dos futuros professores ao nível: (a) do entendimento da relevância didáctica dos problemas históricos em termos de conteúdo matemático, de potencialidades de criação de espaços de interdisciplinaridade e de motivação dos alunos para a realização de actividade matemática; (b) das imagens passadas em sala de aula sobre a face social e humana da matemática.

Relativamente ao entendimento das potencialidades didácticas da integração da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem, os resultados permitem inferir o interesse e a pertinência do recurso a problemas históricos para a concretização dessa integração no ensino básico e, em particular, no 2º CEB. Em termos de avaliação global do PF todas as participantes concordam que a experiência vivida foi muito positiva para a sua formação profissional, aprofundando o seu conhecimento para ensinar matemática e permitindo concretizar práticas de ensino inovadoras e motivadoras para os seus alunos. A aproximação cultural à matemática propiciada pela resolução de problemas históricos foi um aspecto do PF que todas as participantes consideram motivador e muito relevante para a sua formação profissional.

keywords

History of mathematics; historical problems; problem solving; mathematics education; mathematical literacy; teacher education.

abstract

This study presents and evaluates a formation course (FC) with the focus on the History of mathematics, where historical problems solving and its didactical exploration were faced as a methodology asking for attention in pre service primary teacher education.

The main research question centres on the need of to comprehend the contribution of the FC to the development of the pedagogical knowledge of the future-teachers and its contribution to the promotion of innovative teaching strategies.

The theoretical framework structures around three main areas: History and philosophy of science/mathematics, mathematics teaching and pre service teacher education. In the first, we analyse the changes that occurred in the contemporary Philosophy of mathematics, namely those concerning epistemological relevance of the history and of the construction of mathematical knowledge, as well as their educational implications. In the second, we give attention to the more recent orientations of mathematics teaching, directed to the development of mathematical competencies. Finally, we profound and analyse the concept of pedagogical content knowledge, starting by the discussion of different ways of understanding the notion of teacher professional knowledge and we discuss recommendations for mathematics pre service teacher education for primary education.

The study has a qualitative research approach with an interpretative base. From January 2005 to July 2006, was implemented a FC involving an articulated set of research interventions taking place in the context of different subjects in the two final academic years of a graduation in Primary Education. Beyond the whole group of ten students, three student-teachers in the ambit of their pedagogical practice were particularly involved in the work.

The main data of the study were taken by observation (participated and non-participated), audio taped formation sessions, audio and video taped pedagogical practice sessions, questionnaires filled by the student-teachers as well as interviews to them and to their mentors.

The results of the study allow us to state that, by historical problem didactic solving and exploration, the future-teachers were confronted with the social and cultural face of mathematics and with the challenge of to introduce them in their teaching. As the participant student-teachers stated, corroborated by their mentors, it was possible to create and to implement teaching and learning strategies and activities centred in historical problem solving which contributed to the establishment of connections with different curricular subjects (particularly with history, geography and language) and to highlight the application of mathematics to ancient daily.

The analysis of the pedagogical practices of the future-teachers suggests that the FC contributed to the development of their pedagogical knowledge, mainly at the level: (a) of understanding the didactic relevance of historical problems in the ambit of mathematical content, of the potentialities to create interdisciplinary spaces and in the ambit of the pupils motivation for doing mathematical activities; (b) of the images given in the classroom about the social and human face of mathematics, and about the nature and mathematical activity as a science.

Related to the understanding of educational potentialities of the integration of the history of mathematics in the teaching and learning process, the results of the study permit to infer the interest and pertinence of to recourse to historical problems to the concretization of its integration in primary education, particularly to 9-11 years old pupils.

As a global evaluation of the FP all the participants agree that the experience was very positive for their professional formation, deepening their pedagogical knowledge to teach mathematics and allowing making concrete innovative teaching practices for their pupils.

The cultural and social mathematics approach gave by solving historical problems was an aspect of the FC that all the participant student teachers highlight as well relevant for their professional formation.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

CAPÍTULO I

ENQUADRAMENTO DO ESTUDO

Neste capítulo apresentam-se, de modo global, a motivação e o fundamento que conduziram à concretização da investigação no âmbito da formação inicial de professores de matemática para o ensino básico (1º e 2º ciclos). Enquadrada no âmbito da didáctica, sustenta-se nas perspectivas contemporâneas da filosofia da matemática e da ciência, nomeadamente na valorização de abordagens de ensino da matemática que atendam à face social e humana da construção do conhecimento matemático, à resolução de problemas e ao estabelecimento de conexões, dentro e fora da própria matemática.

Inclui-se, assim, uma breve justificação e contextualização do estudo, que será desenvolvida no capítulo subsequente, a identificação do problema e questões que orientam a investigação bem como a clarificação dos objectivos do estudo. A última secção descreve a estrutura da dissertação.

1.1. Justificação e contextualização do estudo

Assente na convicção de que os desafios e exigências colocados por uma sociedade da informação emergente não podem ser enfrentados e ultrapassados sem uma educação matemática focalizada na aquisição e desenvolvimento de conhecimentos e processos de pensamento matemático e de atitudes positivas relativamente à matemática e à sua aprendizagem, muitos países e organismos internacionais (como a UNESCO e a OCDE, por exemplo) têm vindo a advogar, de forma crescente, a preocupação com os níveis de literacia linguística, científica, matemática e tecnológica não só dos adultos, mas também dos jovens no final da escolaridade obrigatória[1].

No que respeita à matemática, os resultados de vários estudos internacionais, nomeadamente os do estudo PISA[2], têm apontado os baixos níveis de literacia e competência matemática alcançados por jovens com idade correspondente ao *terminus* da escolaridade obrigatória. Embora o problema não seja exclusivo de Portugal, esta situação é uma realidade a que a escola portuguesa não tem conseguido dar resposta. Isso tornou-se, mais uma vez, evidente pelos resultados do PISA 2006 (ME-GAVE, 2007) que dão conta dos baixos níveis de desempenho dos jovens portugueses de 15 anos. Além de não se verificar evolução relativamente aos resultados do PISA 2003, os jovens portugueses continuam a apresentar um nível de competência matemática abaixo do nível médio atingido pelos jovens dos 57 países envolvidos (op. cit., p. 53). De acordo com os dados divulgados, dos cerca de cinco mil alunos testados apenas 0,8% se situaram no mais alto nível de competência matemática (nível 6, numa escala de 1 a 6 definida pelo PISA). Ainda que se deva salientar o aumento da percentagem de alunos com desempenhos nos níveis 4 e 5, é preocupante notar que Portugal continua a fazer parte do grupo dos cinco países da OCDE com a maior percentagem de alunos nos níveis mais baixos de desempenho (México, Turquia, Grécia, Itália e Portugal). De facto, cerca de 30% situaram-se no nível 1 ou inferior (op. cit, p. 56), sendo que o nível 1 corresponde a questões que envolvem contextos simples e familiares, em que toda a informação relevante é apresentada explicitamente e as questões estão claramente definidas, ou seja, em que é requerida uma interpretação mínima e a aplicação de conhecimentos matemáticos conectados com o tipo de situação apresentada[3] (OCDE, 2003; ME-GAVE, 2004b). Ou

[1] Os estudos sobre literacia, iniciados na década de 70 do séc. XX nos Estados Unidos da América, foram motivados pela constatação de que o alargamento da escolaridade obrigatória nem sempre correspondia a uma capacidade efectiva de utilização das competências escolares. Em Portugal, o primeiro estudo nesta área realizou-se entre 1994 e 1996 - *Estudo Nacional de Literacia* (Benavente, Rosa, Costa e Ávila, 1996) - e visou conhecer a situação da população adulta no que respeita à literacia. Neste estudo, o conceito de literacia remete para as capacidades de processamento de informação escrita na vida quotidiana social, profissional e pessoal e, nesse âmbito, abarca três dimensões fundamentais: literacia em prosa, literacia documental e literacia quantitativa (op. cit.). Os seus resultados, tanto globais como em termos de literacia quantitativa, não só situaram grande parte dos inquiridos em níveis de literacia baixos e muito baixos (cerca 50% dos inquiridos não ultrapassaram o nível 1), como também revelaram uma percentagem muito baixa de inquiridos nos níveis superiores de literacia (cerca de 8% no nível 4, o mais elevado) (op. cit., Ávila & Sebastião, 1998).

[2] *Programme for International Student Assessment*.

[3] Embora esta análise não caiba neste trabalho é de salientar que múltiplas variáveis intervêm nestes resultados. Uma delas tem a ver com o facto de os alunos testados, frequentarem diferentes anos de

seja, o sistema educativo obrigatório parece não estar a desenvolver nos jovens níveis razoáveis de literacia matemática. Esta realidade mostra que o caminho a percorrer ainda é muito grande, tornando premente a procura de soluções para o problema dos baixos níveis de literacia alcançados pelos alunos portugueses.

Como salientam Ball, Hill e Bass (2005, p. 15), referindo-se, em particular, à situação nos Estados Unidos (não muito diferente da portuguesa):

> We are simply failing to reach reasonable standards of mathematical proficiency[4] with most of our students, and those students become the next generation of adults, some of them teachers. This is a big problem, and a challenge to our desire to improve.

Nesse sentido, interessa entender o que está em causa quando se refere e avalia a literacia matemática. No quadro do projecto internacional PISA, este conceito é encarado como "a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo" (ME-GAVE, 2004a, p.7). Porém, "avaliar a literacia matemática inclui avaliar em que medida os estudantes possuem competências matemáticas que podem aplicar com êxito nas situações problemáticas" (op. cit., p. 13). Deste modo, entende-se que a literacia matemática do sujeito inclui um conjunto de capacidades matemáticas específicas que têm a ver com processos mentais ou físicos, actividades e comportamentos específicos que o sujeito executa quando se envolve na realização de uma tarefa que apresenta desafios matemáticos, como, por exemplo, resolução de problemas puros ou aplicados, leitura de um texto matemático, escrever um texto com componentes matemáticas ou demonstrar um teorema (Niss, 2003b, 2003c, 2004b).

É neste quadro que devem ser lidas e interpretadas as actuais orientações curriculares portuguesas para o ensino básico que, contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes, fazem emergir a competência matemática como um conceito central da educação (ME, 2001, 2007). Se bem que exista muita discussão em torno da noção de competência matemática, esta está vinculada a um conhecimento em acção ou em uso (componente prática) e indelevelmente ligada ao

escolaridade (desde o 7º ao 11º anos de escolaridade). Apesar de todos terem 15 anos, muitos deles estão bem longe do *terminus* da escolaridade obrigatório., enquanto outros já frequentam o 11º ano de escolaridade.

[4] O termo proficiência é encarado como conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos, o que pressupõe conhecimentos de e sobre matemática.

desenvolvimento da compreensão de noções e processos matemáticos (Llinares, 2003). Deste modo, implica um ensino da matemática centrado no desenvolvimento integrado de conhecimentos e capacidades matemáticas, ou seja, que atenda, entre outros aspectos, à necessidade de articular os conteúdos curriculares com os processos típicos da actividade matemática, ao estabelecimento de conexões entre as ideias matemáticas, à promoção da compreensão de aspectos fundamentais da sua natureza e do seu papel e utilização e ao desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à sua aprendizagem matemática (ME, 2001).

Os reptos e as dificuldades associadas a uma educação matemática que persegue como objectivo primordial o desenvolvimento da literacia e competência matemática colocam várias questões, uma das quais se prende com o próprio ensino da matemática. Como afirma Lima (2004) a mudança que caracteriza o nosso tempo, tanto em termos de condições da sociedade quanto do desenvolvimento da própria matemática e da descoberta de inúmeras áreas de aplicação, dentro e fora desta, impõem a necessidade de adaptar o ensino, sob o risco de a escola não conseguir preparar os jovens para a vida contemporânea e futura. Nesse sentido, e não existindo receitas mágicas para ensinar matemática, este matemático defende que um professor capaz de fazer face a essas exigências deve reunir vários requisitos, nomeadamente, gostar de matemática, ser matematicamente competente e estar interessado em promover a aprendizagem.

> O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento aos alunos, portanto interessa-se pelas dificuldades dos seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender os seus problemas e ajudar a resolvê-los (op. cit., p. 16).

Assim, um ensino que promova o desenvolvimento da literacia científica/matemática do aluno requer professores com um alto nível de literacia e que sejam capazes de transformar, de um modo adequado e acessível ao aluno, o seu próprio conhecimento e compreensão da disciplina (Abd-El-Khalick e BouJaoude, 1997). Rickey (1996, p. 252) já apontava que os professores de matemática são veículos de cultura matemática e que têm a responsabilidade de transmitir essa cultura aos estudantes. Para o autor, os professores descuram as suas responsabilidades se apresentarem a matemática como uma disciplina completamente desenvolvida e que apareceu à milénios na sua forma perfeita.

Como é salientado no documento *Professional Standards for the Accreditation of Schools, Colleges, and Departments of Education* produzido pelo NCATE[5], uma das principais organizações norte americanas para a acreditação dos cursos de formação inicial de professores[6], as exigências colocadas ao sistema educativo devem ser acompanhadas por uma reforma exigente dos programas de formação de professores de matemática:

> Preparing teachers to teach all students to meet society's demands for high performance has created a new agenda for educators and policymakers. To meet these changing needs, norms in teacher preparation and licensing are changing. Education reform must include the reform of teacher preparation. Reaching the nation's education goals will require high standards for the teaching force (NCATE, 2006, p. 3).

Requer-se, assim, uma formação que contribua para o real e efectivo desenvolvimento de conhecimentos de e acerca de matemática, de modo a que o trabalho a desenvolver em sala aula promova o desenvolvimento da literacia e competência matemática[7]. Aponta-se também a importância do desenvolvimento de esforços consertados entre as várias áreas de formação para que se formem efectivamente professores competentes, interessados e qualificados para o desempenho das múltiplas tarefas que os esperam (e.g. promover a aprendizagem dos alunos, planificar lições, trabalhar colaborativamente com colegas, estimular a cooperação entre os alunos, os vários agentes educativos e a família, etc.) e, em particular, para a promoção de um ensino compreensivo da matemática. Partindo da premissa que o desenvolvimento da compreensão[8] é uma meta básica do ensino da matemática e que a compreensão matemática implica reconhecer e ser capaz de fazer conexões entre ideias, factos ou procedimentos, como é reconhecido por muitos dos que estudam a aprendizagem matemática, então um ensino orientado para a compreensão deve ser planeado de modo a que os alunos construam conexões (Hiebert e Carpenter, 1992, p.81). Nesse sentido, um ensino que ajude os alunos a aprender compreensivamente deve atender a vários aspectos, o primeiro dos quais é que as conexões entre ideias matemáticas requeridas para a

[5] National Council for Accreditation of Teacher Education.

[6] Associação não governamental que inclui representações de mais de 30 associações ligadas à educação, incluindo o prestigiado National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

[7] Estes dois conceitos são objecto de clarificação no Capítulo II.

[8] Em termos cognitivos, a compreensão refere-se ao modo como a informação é representada e estruturada pelo sujeito. A compreensão de uma ideia, procedimento ou facto matemático pressupõe que a sua representação mental faz parte de uma rede de representações e é tanto mais profunda "if it is linked to existing networks with strong or more numerous connections" (Hiebert e Carpenter, 1992, p.67).

compreensão dos conceitos devem ser discutidas com os alunos e que estes devem ser encorajados a reflectir sobre elas (op. cit.).

Neste quadro, a investigação em educação matemática tem vindo a centrar-se, de forma crescente, no conhecimento do professor de matemática *para* ensinar matemática (Hiebert e Carpenter, 1992; Brown e Borko, 1992; Fennema e Frank, 1992; Lamon, 1999; Ma, 1999; Ball, 2000; Ball e Bass, 2003; Hill e Ball, 2004; Ball, Hill e Bass, 2005). Muitos estudos ajudaram a clarificar *que* matemática o professor necessita saber para ensinar a disciplina, dos quais se destacam: (a) o conhecimento e a compreensão do significado das ideias e procedimentos matemáticos e das conexões entre ideias e procedimentos; (b) a compreensão da natureza da matemática e das relações da matemática com a vida quotidiana; (c) a representação e formulação do conteúdo disciplinar de modo a torná-lo compreensivo para quem está a aprender; (d) a compreensão do que é que torna a aprendizagem de um determinado tópico fácil ou difícil; (e) o conhecimento de estratégias que permitam não só fazer ligações entre o que os alunos já sabem e o que estão a aprender, como também para eliminar concepções erróneas.

Também a propósito das exigências colocadas aos professores pelas novas orientações para o ensino da matemática, Rickey (1996, p, 252) destaca que estas ao acentuarem a importância da aprendizagem de ideias e processos matemáticas, bem como da “aquisição”de uma visão compreensiva do que é a matemática, colocam os professores perante um novo e substancial desafio. Nesse sentido, defende que o recurso cuidadoso e criterioso à história da matemática pode ajudar os professores a enfrentar esses desafios.

Neste mesmo sentido apontam muitos matemáticos e educadores matemáticos. Por exemplo, Heiede (1996, p. 232) considera um erro estratégico grave tentar ensinar matemática sem alguma referência ao seu enquadramento cultural, social e filosófico, na medida em que a matemática, sendo uma ciência viva, não pode ser ensinada como se estivesse morta, pois esse é, possivelmente, um dos motivos porque muitos alunos a consideram aborrecida, desinteressante e mesmo odiosa. Man-Keung (2000, p. 3) acrescenta: “in this age of «mathematics for all», history of mathematics is all the more important as an integral part of the subject to afford perspective and to present a fuller picture of what mathematics is to the public community”.

Do conjunto de argumentos aduzidos relativamente às potencialidades da introdução de uma perspectiva histórica na formação de professores salienta-se precisamente a possibilidade de uma aproximação cultural à matemática poder conduzir a uma mudança efectiva das práticas de ensino ou, pelo menos, a uma modificação da forma como se concebe o ensino da matemática (Barbin, 1994, 2000; Winicki, 2000). Apoiam estas palavras a reflexão feita pelo matemático Siu Man-Keung (2000). O autor (op. cit.) atesta os benefícios do uso da história da matemática a partir da sua própria experiência. Alguns dos aspectos a realçar referem-se a que o estudo da História fez dele um melhor matemático, tornou-o mais feliz e capaz de apreciar o esplendor multidimensional da disciplina e a sua relação com os esforços culturais. Assim, como professore tenta partilhar com os seus sentimentos com os seus alunos, ou seja, nas suas palavras expressivas: "I attempt to sow the seeds of appreciation of mathematics as a cultural endeavour in them. It is difficult to tell when these seeds will blossom forth, or whether they ever will. But the seeds are there" (op. cit., p. 8).

Por outro lado, a constatação de que a matemática é um produto da actividade humana e que, por isso, se encontra ligada a muitas outras áreas do saber, pode favorecer o contexto para a interdisciplinaridade e para o estabelecimentos de conexões da matemática com a cultura e a sociedade (Barbin, 1994; Heiede, 1996, Grugnetti, 2000b; Swetz, 2000a) isto é, apoiar um ensino que mostre que a matemática é uma ciência viva, dinâmica e uma parte integrante da cultura humana. Acresce que a história possibilita o contacto com diferentes abordagens de um mesmo tópico e com diferentes estratégias de resolução de um problema, o que pode dar ao professor um outro olhar sobre as dificuldades de aprendizagem e sobre os erros cometidos pelos alunos, os quais, em muitos casos, são semelhantes aos encontrados na história do tópico (Avital, 1995; Barbin, 1994, 2000; Bruckheimer e Arcavi, 2000; Katz, 2000).

As profundas alterações ocorridas na filosofia da ciência a partir da década de 70 do século XX provocaram a emergência de novas correntes ao nível da Filosofia da Ciência e uma aproximação da filosofia da matemática às correntes pós-kuhnianas, nomeadamente no que concerne à relevância epistemológica da história para a compreensão da natureza e da construção do conhecimento matemático (Lakatos, 1978, 1986; Tymockzo, 1986; Hersh, 1996; Ernest, 1991, 1996a, 1998b; Schubring, 1997). De facto, tal como aconteceu na Filosofia da Ciência, a reorientação dos estudos filosóficos sobre a matemática, ocorrida a partir da década de 80, colocou a tónica na *praxis* dos matemáticos e pôs a “descoberto” que o método lógico-dedutivo não se coaduna com essa *praxis* (Echeverría, 1995; Hersh, 1986, 1994; Davis e Hersh, 1995). Hoje é consensual aceitar que os matemáticos não se limitam a demonstrar teoremas a partir de axiomas; também fazem observações minuciosas, formulam hipóteses e conjecturas não demonstradas, recorrem a métodos heurísticos e, sobretudo, devido ao aparecimento do computador não põem de lado as possibilidades abertas por essa tecnologia para o prosseguimento de investigações matemáticas (Echeverría, 1995, p. 118). A adopção de abordagens internalistas e externalistas mostra que há muitos factores que influenciam a actividade matemática, impondo-se que a filosofia da matemática, a exemplo do que aconteceu na Filosofia da Ciência, deixe de encarar a matemática como um assunto imune a forças exteriores para assumir uma abordagem holística que atenda à praxis dos matemáticos, à sua história, aplicações e uso, ao lugar da matemática na cultura humana e a questões de natureza axiológica (Echeverría, 1995, 1999; Ernest, 1994a).

Assim sendo, a concepção do saber matemático, como fruto de um processo histórico e cultural e que abrange a compreensão da existência de diferenças epistemológicas e conceptuais do desenvolvimento do conhecimento matemático em culturas e sociedades diferentes, tem importantes implicações didácticas. De facto, considera-se que:

> Os saberes matemáticos são saberes rectificados, históricos, construídos para resolver problemas postos à humanidade. Os saberes têm um significado epistémico, porque são instrumentos de conhecimento que permitem uma inteligibilidade do mundo. Segundo esta concepção o ensino das matemáticas consiste em pôr o aluno face a problemas (…) A aula de matemática é uma aula onde se faz matemática, que já não é reduzida a palavras e frases, mas sim o resultado de uma actividade intelectual (Barbin, 1994, p. 36).

Alguns temas ou conceitos, cuja construção ou percurso de evolução foram especialmente controversos, explicitando o contributo da matemática para a resolução de problemas sociais ou evidenciando as ligações da matemática com a vida quotidiana, social e económica, têm particular interesse didáctico. É o caso do tema da medida e das unidades de medida que seleccionámos e que, de forma mais detalhada, justificaremos adiante.

Porém, a história da matemática tem sido uma dimensão escassamente valorizada nos programas de formação inicial de professores, sobretudo ao nível da sua exploração didáctica.

No âmbito da sua prática profissional, a investigadora tem-se dado conta, ainda que de forma empírica, das dificuldades na integração efectiva e eficaz da história da matemática na prática de ensino desenvolvida por futuros professores no âmbito das disciplinas de Prática Pedagógica. Na instituição em que exerce a sua actividade docente, a licenciatura, recentemente extinta, em Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática/Ciências da Natureza, incluía, no 4º e último ano, uma disciplina de História e Metodologia da Matemática (Anexo 3). Ainda que se reconheça que esta contribuía para o desenvolvimento didáctico dos alunos futuros professores, isso reflectia-se de forma pouco notória e marcante nas Práticas Pedagógicas. Talvez por surgir no currículo após a Prática Pedagógica no 1º CEB e em paralelo com a Prática Pedagógica do 2º CEB, parecia não criar as condições mais favoráveis à integração da história da matemática nas práticas de ensino dos futuros professores.

O relatório do projecto *Matemática 2001* (APM, 1998) comprova que esta é uma realidade que abrange também os professores já profissionalizados e em serviço. Nos dados recolhidos, através de um inquérito por questionário[9], os professores inquiridos (de 2º, 3º ciclos e ensino secundário) praticamente não referem a utilização da história da matemática em sala de aula. Situação que é claramente notória nos professores de 2º CEB. Por outro lado, da revisão da literatura sobre a temática em questão ressalta que os principais factores por detrás da pouca utilização da história da matemática são, além da falta de conhecimentos históricos dos professores, a ausência de formação de como usá-la com os seus alunos e a escassez de materiais didácticos desenvolvidos numa perspectiva histórica e epistemológica, e devidamente validados (Fauvel, 1991, 2000). Ainda que alguns manuais escolares da escolaridade básica, recurso por excelência no apoio às práticas de ensino sobretudo dos professores em início de carreira (APM, 1998), incluam algumas notas biográficas de matemáticos famosos e também algumas tarefas inspiradas na história, estas não são, em geral, acompanhadas de sugestões concretas de exploração. Acrescente-se que vários investigadores têm salientado que a formação de professores, inicial ou contínua, deve ajudá-los a estruturar e a realizar inovações nas suas práticas pedagógicas, nomeadamente através da concretização de experiências práticas e do

[9] No questionário aplicado, o item relativo a situações de trabalho na aula incluía uma lista de situações de trabalho possíveis (exercícios, problemas, exposição pelo professor, trabalho com situações da realidade, discussão entre alunos, actividades de exploração, história da matemática, trabalho de projecto) e era pedido aos professores que assinalassem a frequência com que utilizavam cada uma das situações de acordo com a escala: nunca ou raramente, em algumas aulas e sempre ou quase sempre.

desenvolvimento de propostas concretas de trabalho (materiais curriculares) (Paixão, 1998, Ferreira, 2002, Vieira, 2003). Fauvel (1991) assinalava que:

> É importante tomar como certo, neste momento, que utilizar história é benéfico – por numerosas razões – e mostrar como esta pode ser integrada em algumas actividades de sala de aula, como pode tornar mais fácil o ensino de várias questões específicas, como o trabalho extra inicialmente necessário é recompensado a longo prazo através de uma melhoria na consecução dos objectivos constantes do programa de matemática, etc. Sem que se possa provar que existe uma compensação concreta no dia-a-dia de professores e alunos tudo isto é conversa oca (p.17).

Em Portugal, vivemos um tempo de mudança na formação de professores, que, como salienta Cachapuz (2002), representa uma oportunidade para repensar a formação inicial, nomeadamente a dois níveis, o da reorientação curricular dos cursos e o das metodologias de ensino e aprendizagem. No primeiro, a discussão disciplinar deve inserir-se num todo coerente que harmonize as diferentes dimensões da formação e que recupere uma perspectiva de currículo onde a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade não podem continuar a estar ausentes. No segundo nível, aponta-se para a necessidade de pôr a tónica em metodologias de trabalho problematizantes, envolventes e promotoras de competências para a acção, em particular do aprender a aprender (ob. cit, p. 34).

A análise e a reflexão sobre as questões relacionadas com a reorganização curricular dos Cursos de Formação Inicial de Professores, decorrentes do Processo Bolonha, excedem o âmbito deste estudo. Todavia, interessa-nos reflectir sobre alguns aspectos relacionados com os novos modelos de formação apontados pelas orientações oficiais plasmadas no Decreto-Lei n.º 43/2007 de Fevereiro de 2007, que estabelece as novas habilitações para a docência.

Até 2007, em Portugal, os programas de formação inicial de professores[10] para o ensino básico (1º e 2º ciclos) podem enquadrar-se em dois modelos de formação que, por incluírem a realização de um estágio pedagógico profissionalizante, têm sido caracterizados como integrados. Centrando a nossa atenção, em particular, nos modelos de formação de professores do 1º e/ou 2º ciclos do ensino básico a cargo das Escolas Superiores de Educação do ensino politécnico e de alguns Departamentos ou Faculdades

[10]Quando falamos num programa de formação inicial de professores estamos a referir-nos a um ciclo de estudos que prevê determinadas componentes de formação, ministrado por uma instituição de ensino superior, conducente a um grau académico que confere habilitação profissional para a docência num ou mais níveis de ensino. Ou seja, usamos neste estudo a designação de programa de formação inicial como sinónima de ciclo de estudo e/ou currículo conducente a habilitação profissional para a docência em qualquer nível de ensino.

do ensino universitário, podemos identificar um modelo que forma apenas professores do 1º ciclo do ensino básico e um outro que forma professores especialistas de uma ou duas áreas curriculares do 2º ciclo do ensino básico[11], mas habilitando também os diplomados para a docência no 1º ciclo (modelo implementado apenas pelas Escolas Superiores de Educação). Esta situação permitiu formar um grande número de profissionais que supriram muitas das carências do sistema educativo, sobretudo ao nível do 1º ciclo do ensino básico[12]. Porém, de forma gradual, começaram a ser identificados vários problemas em ambos os modelos. Destes, gostaríamos de destacar, relativamente ao primeiro, o facto do percurso escolar dos candidatos a professores deste nível de ensino se caracterizar pela diversidade. Alguns, provenientes das áreas de humanidades, ingressaram no curso com uma formação em matemática que não excedia os nove anos correspondentes à escolaridade obrigatória e, muitas vezes, com um percurso com muitas lacunas e dificuldades. Outros (poucos), provenientes de áreas ligadas à ciência e tecnologia, tinham doze anos de escolaridade em matemática mas, frequentemente, não desenvolveram ao longo da sua escolaridade uma relação muito positiva com a disciplina. Como referem Albuquerque et al. (2006, p. 25), muitos desses alunos futuros professores "acarretam consigo, um passado escolar de insucesso em matemática, pelo que não só não sabem matemática suficiente como também desenvolveram atitudes muito negativas em relação à matemática". Perante tal panorama, tem vindo a ser sugerido por investigadores, de forma crescente, não só a exigência de doze anos de escolaridade em matemática no acesso aos cursos de formação inicial de professores para o 1º CEB, como também a necessidade de repensar os próprios programas de formação inicial, sobretudo ao nível da componente de formação matemática (e.g. Albuquerque et al., 2006; Brocado, 2004; Loureiro, 2004).

Já no que diz respeito ao segundo modelo que forma professores para o 2º ciclo, com valência para o 1º ciclo, os candidatos a este modelo tinham, à partida, a possibilidade de se especializar numa ou em duas áreas curriculares do 2º ciclo do ensino básico. De entre essas possibilidades destaca-se a variante de formação em Matemática e Ciências da Natureza, para a qual era exigida como condição de acesso a aprovação em matemática no

[11] Por exemplo, Matemática e Ciências da Natureza, Português e Inglês, Educação Física, Educação Musical, Educação Visual e Tecnológica, …

[12] A realidade é que os diplomados formados até 2007 pelo segundo modelo pelas Escolas Superiores de Educação exercem a sua actividade docente apenas num dos ciclos de ensino. A nossa experiência sugere que quando estes diplomados escolhem exercer a sua actividade profissional no 1º CEB fazem-no mais por vantagens de obtenção de colocação do que por inclinação pessoal por este nível de ensino.

ensino secundário. Não obstante, também este modelo foi alvo de algumas criticas que incidiram sobretudo na dificuldade de formar, em 4 anos, professores generalistas para o 1º CEB e, simultaneamente, em duas áreas disciplinares para o 2º CEB (e.g. Brocado, 2003; 2004; Loureiro, 2004). Por outro lado, como é constatado por Cachapuz, Sá-Chaves e Paixão (2004) quer o país, quer as próprias instituições formadoras, nunca o valorizaram, nem lhe deram uma saída adequada. Estes investigadores, num relatório desenvolvido para o Conselho Nacional de Educação, salientam tratar-se de um modelo que, tendo subjacente a ideia de uma aproximação dos seis primeiros anos de escolaridade do ponto de vista da continuidade pedagógica e que é apoiada por argumentos de natureza epistemológica e da psicologia do desenvolvimento, não foi acompanhado pela necessária reorganização do sistema educativo português. Reconhecendo que o conhecimento está cada vez menos separado nas tradicionais disciplinas e que as competências transversais são difíceis de adquirir em regime de «currículo partido», propõem uma escolaridade básica elementar de seis anos organizada em etapas de dois anos cada (op. cit). De acordo com esta perspectiva, os especialistas de monodocência (perfil ajustado com o dos tradicionais professores de 1º ciclo) deveriam ser secundados, crescentemente, por professores especializados em determinadas áreas científicas (Artes e Expressões, Língua Portuguesa e Estrangeira, Ciências, Matemática, …), constituindo-se assim equipas de trabalho docente capazes de concretizar a ideia de flexibilidade curricular e a integração de todos os alunos (ob. cit, p. 80). Também Alarcão et al. (2006), defendem a aproximação do 1º ciclo ao 2º ciclo do ensino básico e são de opinião que, a especificidade e particular complexidade do ensino nos primeiros seis anos de escolaridade parece justificar um regime de monodocência, ou de «quase monodocência». Porém, defendem que nos dois últimos anos, pela especificidade dos conhecimentos requeridos, esse professor deve assumir um papel, predominantemente, de acompanhamento (intervindo nas áreas curriculares não disciplinares) e uma função de mediador entre todos os intervenientes no processo educativo. Nesse sentido, preconizam para o 2º CEB a existência de equipas multidiciplinares que integrem professores com especializações bi-disciplinares, nomeadamente em ciências e matemática. Quase no mesmo sentido aponta Brocado (2003, 2004) que, salientando a dificuldade em compatibilizar, em 4 anos, a formação de um professor generalista para o 1º CEB com a de um especialista em duas áreas científicas do 2º CEB, reconhece potencialidades num modelo de formação de professores generalistas (ao nível do 1º CEB) que abra a possibilidade de especialização numa área científica do(s) ciclo(s) de estudos para que são formados os docentes.

Porém, as perspectivas abertas em 22 Fevereiro de 2007 pela publicação do Decreto-Lei nº 43/2007 das novas habilitações para a docência parecem não se configurar com as ideias discutidas. De facto, a reorganização da formação de professores desenvolvida no quadro do Processo de Bolonha, orientada pelo referido decreto a partir do ano lectivo 2007/08, vai permitir a coexistência, ao nível do 2º ciclo de formação, de três modelos de formação para a escolaridade básica: Ensino do 1º ciclo do ensino básico, Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º ciclo do ensino básico e Ensino do 1º e 2º ciclos do ensino básico. Relativamente a este último, aponta-se para a formação de um professor para todas as áreas do 1º CEB (especialista em monodocência) e para as áreas de Língua Portuguesa, Matemática, História e Geografia de Portugal e Ciências da Natureza do 2º CEB, ou seja, quatro áreas em vez das duas do modelo anterior das Escolas Superiores de Educação). Argumenta-se apenas que este alargamento dos domínios de habilitação conjunta para os 1º e 2º ciclos do ensino básico, ao tornar possível a mobilidade dos docentes entre níveis e ciclos de ensino, permite "o acompanhamento dos alunos pelos mesmos professores por um período de tempo mais alargado e a flexibilização da gestão de recursos afectos ao sistema educativo e da respectiva trajectória profissional" (Dec-Lei nº 43/2007). Neste quadro, um professor com o grau de mestre em ensino do 1º e 2º ciclos do ensino básico apenas não assegurará, no 2º CEB, as áreas de Língua Estrangeira e de Expressões. Estas últimas ficarão a cargo de professores especialistas em Educação Musical, Educação Visual e Tecnológica e Educação Física e Desporto. As instituições de formação de professores são assim confrontadas com a necessidade de formar, em pouco mais de 4 anos (3+1 ou 3+2), professores generalistas para o 1º CEB e professores especialistas em quatro áreas do 2º CEB. Este é um grande desafio sobre o qual as instituições, apoiadas por muita investigação e com grande esforço de inovação, vão ter forçosamente que se debruçar. Aliás, já anteriormente Roldão (2004), referindo-se à reorganização curricular do ensino básico[13], alertava para as necessárias implicações em termos de reconceptualização dos programas de formação de professores para a escolaridade básica e para o desafio colocado às instituições de formação e de investigação nesse processo.

---

[13] Introduzida pelo Decreto-Lei nº 6/2001.

Nesse sentido, salienta-se, em particular, a importância de, ao nível da reorientação curricular dos cursos de formação de professores se recuperar uma perspectiva de currículo como um todo coerente que harmonize as diferentes dimensões da formação e em que, inevitavelmente, a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade não podem estar ausentes (Cachapuz, 2002). Também ao nível das metodologias de ensino e aprendizagem, este investigador advoga a necessidade de pôr a tónica em metodologias de trabalho problematizantes, envolventes e promotoras de competências para a acção, em particular do aprender a aprender (op. cit, p. 34). Nesse sentido, um aspecto que se reveste de particular importância respeita à acreditação dos programas de formação inicial de professores, como aliás é reconhecido pelo Ministério da Educação: "os processos de garantia de qualidade do novo sistema de habilitação para a docência são um dos seus elementos estruturantes" (Dec-Lei nº 43/2007). Por exemplo, Cachapuz (2002) defende que é imperioso que as mudanças a operar sejam devidamente acompanhadas e avaliadas, nos seus processos e produtos, não só por mecanismos externos às instituições formadoras, como também ao nível da articulação entre investigação e formação, pois só assim se pode aspirar a que os candidatos a professoras desenvolvam níveis elevados de desempenho. Até porque, como é salientado por Ponte (2004), tem sido da exclusiva responsabilidade das instituições formadoras a tomada de decisões curriculares e de gestão dos recursos humanos e materiais, no que respeita à formação nas áreas da docência, educacional e profissional. Como alertam Cachapuz, Sá-Chaves e Paixão (2004, p. 86) é necessário garantir a adequação da formação ao desempenho: "A adequação da formação ao desempenho é exactamente o que as instituições de formação de professores devem proporcionar aos profissionais que formam". Neste âmbito, Roldão (2004, p. 194) aponta a necessidade que as instituições formadoras devem dar à formação de "professores numa lógica de profissionalismo pleno e de capacidade de serem decisores curriculares e actores actuantes e detentores de saber vivo" e, em paralelo, salienta a importância de estas garantirem a certificação profissional dos seus diplomados. Tal perspectiva implica, necessariamente, uma mudança radical das lógicas de formação que devem atender à "produção de saber em contexto de trabalho" (op. cit.), colocando-se a tónica na articulação entre a formação e a prática profissional do futuro professor, isto é, no conhecimento profissional do professor.

Neste campo, Ponte (2004, p. 74) realça a relativa pouca importância que tem sido dada pela investigação à questão da formação dos futuros professores *para* o ensino da matemática, apesar de muitos testemunhos e reflexões sugerirem a existência de grandes problemas neste campo. Na opinião deste investigador, os problemas excedem em muito os aspectos relacionados com a listagem de conhecimentos que o professor ou futuro professor deve adquirir. De facto, as grandes questões em aberto têm a ver com a competência matemática e didáctica que o professor deve possuir, como é que as pode desenvolver, o que é expectável de um professor recém-licenciado e que tipos de experiências lhe devem ser proporcionadas pela formação inicial, etc. (Ponte 2004).

1.2. Problema e Questões de Investigação

Esta investigação centra-se, no seguimento do que atrás dissemos, na necessidade de investigar sobre percursos de formação de professores para responder aos muitos desafios actuais. Incide ainda, e fortemente, na convicção de que a integração da história da matemática na formação inicial de professores deve atender à necessidade de estabelecer ligações com a matemática escolar que os professores vão ensinar (Michalowcz, 2000; Bruckheimer e Arcavi, 2000) e, na linha do preconizado por Schubring (2000), deve procurar articular três vertentes formativas:

- facultar o conhecimento do passado da matemática;
- aprofundar a compreensão sobre a matemática escolar;
- munir os professores com competências de incorporação de material histórico no processo de ensino.

Deste modo, este estudo está relacionado com a necessidade de identificar formas de integrar a história da matemática na formação inicial de professores da escolaridade básica[14], mais concretamente do 1º e 2º ciclos do ensino básico, que atendam à necessária articulação e complementaridade entre a formação em matemática e a formação prática e contribuam para o desenvolvimento de conhecimentos para ensinar matemática e para a promoção de práticas de ensino inovadoras. Assim, o presente estudo incide no desenvolvimento e implementação de um conjunto de intervenções com foco na história da

[14] Neste estudo, sempre que nos referirmos a escolaridade básica estamos a centrar-nos nos primeiros seis anos de escolaridade.

matemática e sua exploração didáctica em várias disciplinas de um currículo de formação inicial de professores de matemática de uma Escola Superior de Educação. Este conjunto de intervenções, denominado doravante por Percurso de Formação (PF), incide sobre disciplinas da componente específica de matemática (Geometria I, Geometria II, e História e Metodologia da Matemática) e da componente de iniciação à prática profissional (Prática Pedagógica no 1º CEB – semestral - e Prática Pedagógica no 2º CEB- anual), percorrendo vários ambientes formativos, o da própria instituição formadora de ensino superior e o de duas escolas básicas cooperantes nas quais as futuras professoras desenvolvem a sua prática pedagógica. Privilegiam-se como estratégias formativas a resolução de problemas históricos, a discussão e exploração didáctica de problemas históricos e a reflexão crítica com problematização dos saberes. Refira-se, pela sua importância e possíveis implicações, que o estudo, com carácter longitudinal, desenvolve-se ao longo dos dois últimos anos de uma licenciatura em ensino de uma Escola Superior de Educação num momento em que se assiste a um decréscimo das candidaturas dos jovens portugueses a este tipo de licenciatura. Por falta de um número mínimo de candidatos, o período de tempo em que o estudo decorre corresponde ao último curso de formação de professores de Matemática e Ciências da Natureza, de acordo com o modelo que explicitámos atrás. Aliás, sabemos do desaparecimento desta oferta formativa em várias Escolas Superiores de Educação do país[15].

O problema a investigar consiste em compreender em que medida o desenvolvimento de um Percurso de Formação, com foco na exploração didáctica de história da matemática e que toma como dimensões relevantes da actividade matemática a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática, contribui para o desenvolvimento do conhecimento didáctico de futuros professores e para a promoção de práticas de ensino inovadoras. No nosso estudo, pelos motivos que vamos continuar a aprofundar (capítulo seguinte), tomaremos como inovadoras aquelas situações que representem mudanças relativamente àquelas que se têm mostrado pouco eficazes para alcançar maior sucesso educativo dos jovens, designadamente as que consideram como experiências de aprendizagem a história da matemática, a resolução de problemas e o

[15] Foi praticamente no final do nosso estudo que surgiram as novas orientações para a formação de professores de 1º e 2º ciclos do ensino básico a que já aludimos.

estabelecimento de conexões (nas quais se incluem conexões intra-matemáticas, ligações a outras disciplinas do currículo ou aplicações da matemática ao quotidiano).

Formulado o problema de investigação definiram-se como objectivos do estudo:

O_1 - Construir propostas de exploração didáctica da história da matemática que relevem como experiências de aprendizagem a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas e de ligações com outras disciplinas do currículo e com o quotidiano passado;

O_2 – Reflectir sobre a prática pedagógica de futuros professores da escolaridade básica, no âmbito da integração de problemas históricos na prática pedagógica, no 2º ciclo do ensino básico;

O_3 - Desenvolver e avaliar um Percurso de Formação de futuros professores de matemática, com foco na exploração didáctica da história da matemática, no sentido de compreender de que modo diversas intervenções no currículo de formação se relacionam com o desenvolvimento de conhecimentos e das práticas pedagógicas inovadoras, de futuros professores da escolaridade básica.

A formulação de questões de investigação assume-se como uma etapa fundamental na medida em que permite orientar a investigação para a consecução dos seus objectivos. Assim, considera-se que o problema e os objectivos formulados implicam dar uma resposta às seguintes questões:

Q_1 - É possível construir estratégias de ensino com foco na história da matemática que relevem como experiências de aprendizagem a resolução de problemas, o estabelecimento conexões entre ideias matemáticas e de ligações com outras disciplinas do currículo e o quotidiano passado?

Q_2 - Como é que futuros professores da escolaridade básica (primeiros 6 anos de escolaridade) aderem à proposta de integrar problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da matemática? Como é que procedem a essa integração? Que aspectos valorizam na exploração didáctica dos problemas? Que dificuldades revelam?

Q_3 - Como é que futuros professores da escolaridade básica percepcionam o contributo do Percurso de Formação para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional?

Q_4 – Envolver futuros professores na resolução, na planificação e na orientação da resolução de problemas históricos contribui para desenvolver o seu conhecimento didáctico?

1.3. Organização Geral

Esta dissertação encontra-se organizada em cinco capítulos. O primeiro, de carácter introdutório, visa enquadrar o estudo, apresentar o problema, os objectivos e as questões da investigação.

No capítulo II faz-se uma revisão da literatura sobre as linhas teóricas norteadoras do estudo e foi estruturado em torno de três grandes áreas complementares: história e filosofia da matemática, ensino da matemática e formação de professores. Na primeira, analisam-se alterações ocorridas na filosofia contemporânea da matemática, nomeadamente as que concernem à relevância epistemológica da história e da construção do conhecimento matemático, bem como as suas implicações para a didáctica. Na segunda, analisam-se e aprofundam-se as orientações mais recentes para o ensino da matemática, direccionado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática. Finalmente, aprofundam-se os conceitos de conhecimento didáctico e de conteúdo, a partir da discussão de diferentes modos de entender a noção de conhecimento profissional do professor e discutem-se recomendações para a formação inicial de professores de matemática.

A descrição e fundamentação das opções e procedimentos metodológicos é o objecto do capítulo III, no qual, ainda, se apresenta com detalhe o Percurso de Formação em torno do qual se organizou o estudo.

No capítulo IV descrevem-se e analisam-se os dados relativos a cada uma das futuras professoras participantes no estudo no que diz respeito ao contributo do Percurso de Formação para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional e, em particular, do contributo do seu envolvimento na resolução, na planificação e na orientação da resolução de problemas históricos para o desenvolvimento do seu conhecimento didáctico.

Com o objectivo de validação da análise realizada pela investigadora, apresenta-se uma análise de congruência em que são tidas em conta as opiniões das futuras professoras e dos professores cooperantes sob cuja orientação desenvolveram a sua prática pedagógica.

No último capítulo apresentam-se e discutem-se as principais conclusões do estudo. O capítulo termina com uma breve reflexão da investigadora sobre o desenvolvimento do estudo, na qual também são apresentadas algumas recomendações e indicadas as limitações identificadas.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se os fundamentos teóricos que apoiam o estudo e que se estruturam em torno de três grandes áreas: história e filosofia da matemática, ensino da matemática e formação de professores. Na primeira, analisam-se as alterações ocorridas na filosofia contemporânea da matemática, nomeadamente as que concernem à relevância epistemológica da história e da construção do conhecimento matemático, bem como as suas implicações para a didáctica. Na segunda, analisam-se e aprofundam-se as orientações mais recentes para o ensino da matemática, direccionado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática. Finalmente, a partir da discussão de diferentes modos de entender a noção de conhecimento profissional do professor, aprofundam-se os conceitos de conhecimento didáctico e de conteúdo e discutem-se recomendações para a formação inicial de professores de matemática.

2.1. História e Filosofia da Ciência/Matemática

2.1.1. Reorientação da filosofia da matemática

No século XIX, a filosofia da matemática sofre profundas alterações, fruto, entre outras razões, da descoberta das geometrias não euclidianas e do desenvolvimento da análise matemática que obrigam a repensar a questão dos fundamentos da matemática, até aí assentes na geometria de base euclidiana. Até essa altura, como afirma Hersh (1986, p. 14) a geometria era olhada por todos, incluindo os matemáticos, como o mais firme e fiável ramo do conhecimento e o próprio significado e legitimidade da análise decorria da sua ligação com a geometria. Se a descoberta das geometrias não euclidianas foi o primeiro passo para a crise, o que foi verdadeiramente perturbante ocorreu no campo da análise, quando novos desenvolvimentos puseram em causa a intuição geométrica. “A perda de certeza na geometria era filosoficamente intolerável, pois ela implicava a perda de qualquer certeza no conhecimento humano” (op. cit., p.15).

A procura de solução para um problema tão delicado como a perda de um fundamento sólido para a matemática ocupa alguns dos maiores matemáticos da época, entre os quais sobressaem os nomes de Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916) que procuram fundamentar a matemática na Aritmética. Apesar de seguirem caminhos distintos, ambos se vêem confrontados com a necessidade de introduzir “conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática” (Davis e Hersh, 1995, p. 310), o que requeria o desenvolvimento de uma nova teoria matemática “which had hitherto gone unnoticed” (Hersh, 1986, p. 15). A Teoria de Conjuntos desenvolvida por George Cantor (1845-1918) como uma nova área da matemática prenuncia-se como a resposta ao problema dos fundamentos. Acreditou-se, então, que a Teoria de Conjuntos em conjunção com a lógica poderia constituir-se como os fundamentos procurados e é esse trabalho que Gottlob Frege (1848-1925) se propõe levar a cabo. Porém, em 1902, Bertrand Russell (1872-1970) descobre contradições no trabalho de Frege, mostra que o problema está muito longe de ser resolvido (paradoxo de Russell) e que as tentativas de reduzir a matemática à teoria de conjuntos - lógica “podia levar a contradições de natureza nunca antes vista” (op. cit., p. 312). Origina-se uma crise profunda, conhecida por crise dos fundamentos, que se prolongou para além do primeiro quartel do século XX e cujos desenvolvimentos exerceram ao longo do século grandes influências na filosofia da matemática e no próprio ensino da disciplina.

É neste contexto que surgem três correntes filosóficas denominadas por fundacionistas que, apesar das diferenças nas estratégias seguidas, partiram do pressuposto de que a matemática “must be provided with an absolutely reliable foundation” (Hersh, 1986, p. 17) e, como tal, prosseguiam como objectivo primeiro reconstituir a matemática como uma estrutura de pensamento racional e indubitável.

O programa do logicismo, ligado aos nomes de Frege e Russell, propôs-se reformular a teoria de conjuntos de modo a evitar o paradoxo de Russell e assim mostrar que era possível reconstruir a matemática a partir da lógica. A abordagem seguida pretendia deduzir todas as verdades matemáticas a partir de axiomas lógicos indubitavelmente verdadeiros e devolver à matemática o estatuto clássico de teoria euclidiana (Lakatos, 1986). Isto é, de uma ciência cujas afirmações de base são axiomas, em que as regras de inferência são determinadas de forma precisa pela lógica e cujo desenvolvimento tem uma explicação rigorosamente lógica (Manno, 1985, p. 242). Através de demonstrações rigorosas, a verdade é introduzida na teoria através dos axiomas e transmitida aos resultados deles derivados por dedução. Deste modo, as afirmações matemáticas são factos que descrevem as propriedades de objectos abstractos e a lógica proporciona os meios para provar a sua veracidade (Rotman, 2006). O conhecimento assim obtido é certo, objectivo, indubitável e eterno (Davis e Hersh, 1995; Lakatos, 1986). Nesse sentido, o logicismo parte do pressuposto de que toda a matemática pode ser deduzida a partir de um pequeno conjunto de axiomas indiscutivelmente verdadeiros através de passos lógicos dedutivamente válidos (Gowers, 2006) e a matemática é uma ciência fundada na «razão» (Manno, p. 243). Ainda que se tenha verificado um grande desenvolvimento da lógica, o programa logicista foi um fracasso em termos das intenções iniciais, pois a nova teoria de conjuntos tornou-se uma estrutura muito complexa, "which one could hardly identify with 'logic' in the philosophical sense of «the rules for correct reasoning». So it became untenable to argue that mathematics is nothing but logic – that mathematics is one vast tautology" (Hersh, 1986, p.15). Além disso, tornou-se claro que alguns dos axiomas criados não eram indubitavelmente verdadeiros, nem consistentes e que a matemática clássica "might be *explained*-but not *proved* by them" (Lakatos, 1986, p. 35).

Outra proposta de solução foi avançada em 1908 por Brouwer (1881-1996) que defendeu a ideia de que é possível fundamentar a matemática nos números naturais, que por sua vez são revelados por uma "intuição fundamental". Assim, a intuição surge como o ponto de partida de toda a matemática, ou seja, "os termos primitivos e os axiomas fazem parte dessas intuições primordiais (…) e, partindo dessas evidências elementares, a matemática deve seguir um processo construtivo" (Manno, p. 235). Para os intuicionistas, as ideias e proposições matemáticas são construções mentais que ocorrem na mente do matemático, ainda que cognitivamente universais (Rotman, 2006), e a matemática surge como uma ciência que "não possui nenhuma existência fora do espírito humano" (Ponte et al. 1997, p. 27), ou seja, é considerada independente da experiência e resultante de um processo de construção mental. Nesse contexto, os objectos matemáticos existem e têm significado se puderem ser obtidos por métodos construtivos, através de um número finito de passos, a partir dos números naturais (Anglin, 1997; Ponte et al., 1997; Davis e Hersh, 1995). Os princípios do programa intucionista vieram a revelar-se muito polémicos entre a comunidade matemática pois levaram à elaboração de demonstrações consideradas demasiado longas e deselegantes relativamente a outras já aceites, mas, sobretudo, conduziram à rejeição de muitos teoremas da matemática clássica. De facto, "ao colocarem na base dos processos matemático o «método construtivo» (…) para se fazem afirmações gerais (…) é preciso demonstrá-las com um número finito de passos" [16] (Manno, 1985, p. 236). Deste modo, o seu propósito inicial de reconstruir a matemática desde a base falhou (Hersh, 1986; Davis e Hersh, 1995; Ponte et al., 1997).

É neste clima que, em 1910, numa iniciativa de David Hilbert (1862-1943), surge a escola formalista que não só persegue o objectivo de resolver o problema da falta de fundamentos, como também procura "defender a matemática do que Hilbert considerava mutilações e deformações provocadas pelo intuicionismo" (Ponte et al., 1997, p. 27). Hilbert parte da ideia de que é possível "construir uma fundamentação matemática da matemática", o que pressupõe que "os termos, símbolos e regras vigentes no seio da matemática não têm *per se*, nenhum outro valor ou significado além do estritamente formal" (Manno, 1985, p. 258). De acordo com Fraenkel (2004, p. 339), propõe-se cumprir a sua meta em duas fases. Numa primeira fase, pretende tomar para base da matemática um sistema formal (sistema axiomático) constituído por símbolos "vazios de conteúdo", fórmulas resultantes da combinação desses símbolos (princípios, axiomas) e regras de derivação, a partir dos quais se podem obter outras proposições (fórmulas). Na segunda fase, aspira demonstrar que a utilização das regras de dedução nunca poderia conduzir a uma contradição formal. Para tal, torna-se necessário: (i) introduzir uma linguagem formal (conjunto finito de símbolos) e regras formais de inferência (regras para transformar fórmulas)[17]; (b) desenvolver uma teoria das propriedades combinatórias dessa linguagem; (c) demonstrar a inexistência de contradições dentro deste sistema formal (Fraenkel, 2004; Davis e Hersh, 1995).

[16] Por exemplo, o teorema de Cantor segundo o qual existem mais números reais do que naturais é rejeitado com o argumento que para «criar» o número real seria necessário executar infinitos passos. Tal conduz, por sua vez, à refutação da teoria cantoriana dos números transfinitos (Manno, 1985, p. 236).
[17] Deste modo, cada passo de uma demonstração de um teorema pode ser verificado mecanicamente.

Com o programa formalista, a matemática torna-se um sistema formal que, "partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma" (Manno, 1985, p. 258). Nesta perspectiva "fazer matemática consiste em manipular símbolos sem significado, de acordo com regras sintácticas explícitas" (Ponte et al., 1997, p. 28). Nas palavras de Hilbert (in Anglin, 1997, p. 58): "The subject matter of mathematics is … the concrete symbols themselves". Considerando a matemática um puro «jogo formalizado», as suas fórmulas não têm qualquer significado fora do «jogo» (não são nem verdadeiras, nem falsas) e não faz sentido falar na existência de objectos matemáticos, na medida em que estes são apenas símbolos (Manno, 1985, p. 259). Como tal, as definições, os axiomas e os teoremas não são mais do que combinações desses símbolos, de acordo com as regras estabelecidas.

Anglin (1997) identifica três grandes óbices no formalismo: (i) dificuldade em explicar o que são símbolos matemáticos; (ii) encarar a matemática como uma linguagem sem significado; (iii) dificuldade em assegurar a consistência, pois se um determinado ramo da matemática é um jogo simbólico arbitrário, como é que conhecidas as suas regras podemos verificar que é consistente? Ainda que Hilbert tenha inicialmente acreditado ser possível provar a consistência de algumas ramos da matemática, Kurt Gödel (1906-1978) demonstra, em 1931, o teorema da incompletude que mostra, para os ramos da matemática que contenham a Aritmética, que isso não é possível: "Qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a própria consistência" (Davis e Hersh, 1995, p. 316). Também o formalismo se revelou incapaz de fundamentar a matemática em bases seguras e indubitáveis.

Apesar dos três programas (Logicismo, Intuicionismo e Formalismo) terem visto gorado o seu propósito inicial, todos deixaram, na opinião de Davis e Hersh (1995), a sua marca a dois níveis. O primeiro, relacionou-se com o desenvolvimento de programas específicos de investigação matemática e a produção de novo conhecimento matemático. Por exemplo, alguns investigadores ainda estudam a relação entre a matemática e a lógica, outros, como Bishop, seguem uma linha de investigação inspirada no intucionismo de Brouwer (Hersh, 1994). O segundo, de índole filosófico, deixou implícita a ideia de que o objecto da filosofia da matemática é a pesquisa de fundamentos seguros, permanecendo, durante muito tempo, a ideia de que existem apenas três respostas, mutuamente antagónicas e incompatíveis, à questão «o que é a matemática?», dadas pelo formalismo, intuicionismo e platonismo[18] (Rotman, 2006, p. 100).

Na opinião de Gowers (2006) e Rotman (2006), o programa logicista é compatível com uma visão platónica da matemática, isto é, como uma ciência preocupada com a descoberta e validação de verdades objectivas ou lógicas. Nesse sentido, as afirmações matemáticas são proposições relativas a uma realidade objectiva, a qual existe independentemente e à priori do acto matemático investigativo. De acordo com a concepção platónica, as aplicações matemáticas ao mundo físico são uma confirmação da perspectiva assumida e do poder da matemática, "a existência da matemática é anterior e independente dessas aplicações" (Davis e Hersh, 1997, p. 234). Apesar do logicismo não se debruçar explicitamente sobre a dicotomia descoberta/invenção do conhecimento matemático (Rav, 2006), para Rotman (2006) o logicismo pode considerar-se a principal fonte do platonismo do século XX. Gowers (2006) acrescenta que o logicismo é uma tentativa de justificar a confiança extrema nas afirmações matemáticas, na medida em que assume a visão de que toda a matemática pode ser deduzida, através de passos lógicos válidos, a partir de um conjunto de axiomas inquestionavelmente verdadeiros.

Para o formalista a matemática é uma espécie de jogo, cuja manipulação dos símbolos escritos é feita de acordo com regras formais explícitas e isentas de ambiguidade. Os princípios do programa formalista tornaram-se, de forma gradual, numa atitude dominante que se reflectiu na forma como a matemática passou a ser apresentada em textos e ensinada, veiculando-se a ideia de que fazer matemática envolve sempre demonstração lógica e, como tal, o recurso a termos não definidos, a axiomas e a proposições já anteriormente demonstradas. Esta tendência formalista atingiu o seu auge a partir das publicações do grupo Bourbaki (iniciadas em 1935), que se tornam, rápida e profundamente, influentes, sobretudo na transmissão de uma visão da matemática como "a ciência da demonstração rigorosa (…) da dedução formal, dos axiomas para os teoremas.

[18] As primeiras concepções sobre o saber matemático remontam a Platão (c. 427 a. C.– 347 a. C.), para quem o conhecimento matemático (Geometria) é independente dos sentidos, da mudança e da ilusão do mundo temporal. De acordo com a perspectiva platónica, transmitida, através dos racionalistas (Descartes, Espinosa, Leibniz), a Kant e, mais tarde, ao meio intelectual da Europa Ocidental do século XIX, a Matemática existe independentemente do mundo (a totalidade do cosmos físico) e dos seres humanos; os objectos matemáticos têm existência real (que não é física nem material), são imutáveis e não são resultado de um acto de criação mas sim de descoberta; a tarefa dos matemáticos é descobrir a Matemática, registá-la, arranjá-la e discuti-la (Davis e Hersh, 1995, 1997). Como escreve Rotman (2006, p. 101), a epistemologia de um matemático platónico é enquadrada em termos daquilo que se pode provar ser verdadeiro em relação a essa realidade.

Os seus termos primitivos são indefinidos As suas afirmações não têm conteúdo até as interpretarmos" (Davis e Hersh, 1995 p.31).

A prevalência da filosofia formalista não pode ser compreendida sem se estabelecer uma ligação com a criação de um novo movimento na filosofia da ciência desencadeado pela atribuição, em 1922, da Cátedra de Filosofia das Ciências Indutivas a Moritz Schlick (1882-1936) (Davis e Hersh, 1995). Este movimento, inicialmente conhecido por empirismo lógico e, mais tarde, por positivismo lógico, aglutinou um elevado número de cientistas com as mais variadas formações (filósofos, físicos, matemáticos, psicólogos, economistas e linguistas, como por exemplo, Otto Neurath, Rudolf Carnap, Hans Hahn, Herbert Feigl, Krah, Waismann, Karl Menger, Philipp Frank) que se constituíram como o Círculo de Viena. Este movimento persegue o propósito de elaborar uma teoria da ciência que conduzisse a uma filosofia científica, unificadora da ciência. Consolidado definitivamente a partir de 1929[19], o grupo torna-se na primeira grande escola de epistemologia e teoria da ciência, eleva a filosofia da ciência à categoria de disciplina científica e adquire rapidamente, por circunstâncias várias, muita influência e renome internacional que se manteve, pelo menos, até aos anos 60 (Echeverría, 1995; Davis e Hersh, 1995; Paixão, 1998).

De entre as várias tendências que surgiram no seio do Círculo de Viena, acabou por vingar a teoria fisicalista de Otto Neurath que defendia a redução de todos os enunciados científicos a uma linguagem universal e formal (linguagem fisicalista). A unificação da ciência resultaria assim da sua codificação num cálculo lógico formal com um único método dedutivo, o que implicava "a escolha de um vocabulário de termos básicos, a elaboração de leis fundamentais, usando esses termos e o desenvolvimento lógico de uma teoria a partir dessas leis fundamentais" (Davis e Hersh, 1995, p. 320). Para relacionar a teoria formal com os dados resultantes da experiência, cada ciência teria de ter regras próprias de interpretação que não faziam parte da teoria formal (op. cit.). Esta linguagem, altamente formalizada, permitiria construir, com base na indução e na lógica, teoria e enunciados científicos. Tal como a matemática havia encontrado uma fundamentação lógica e uma metododologia axiomática, também as inferências das ciências empíricas deviam adaptar-se às formalizações derivadas da lógica matemática (Echeverria, 1999). Se,

[19] Ano de publicação de um opúsculo, conhecido por Manifesto do Círculo de Viena, da autoria de Carnap, Neurath e Hahn, mas onde são referidos de forma explícita Einstein, Russell e Wittgenstein .

por um lado, se pode afirmar que a indução é, do ponto de vista metodológico, uma das características essenciais do Círculo de Viena (Paixão, 1998, 2003; Echeverría, 1995), por outro "ao pressupor que as ciências são redutíveis a cálculos lógicos axiomatizados, o critério de significatividade empírica complementado pela lógica matemática passa a ser o fundamento principal da teoria da ciência" (Echeverría, 1999, p. 31).

O positivismo lógico considerou apenas a existência de dois tipos de enunciados científicos: as proposições analíticas e aquelas proposições que podem (pelo menos em princípio) ser confirmadas pela experiência. "De acordo com o positivismo lógico, um enunciado só é significativo se for ou «tautológico» ou empírico" (Lakatos, 1978, p. 14) e os enunciados das ciências formais são tautologias (Wittgenstein, 1921 *in* Echeverria, 1999). Nesse sentido, a verdade dos enunciados empíricos é estabelecida à *posteriori*, por meio da observação e da experiência (critério da verificabilidade) exigindo-se, portanto, a existência de significado empírico para os termos da teoria (Echeverría, 1999). As ciências formais, e em particular a matemática, não são consideradas ciências empíricas por se considerar que os seus enunciados não só não traduzem quaisquer informações sobre o mundo (encaixam-se, por isso, na categoria kantiana de enunciados analíticos), como a sua verdade depende "exclusivamente das regras sintácticas que regulam o respectivo sistema formal (Echeverría, 1999). É precisamente o critério da verificabilidade empírica que, segundo o empirismo lógico, permite distinguir as ciências empíricas doutras ciências. Este critério além de conduzir à exclusão da matemática, da lógica e das ciências formais da tentativa de unificação da ciência, levantou problemas importantes que originaram um debate muito participado e prolongado, um dos quais resultou do facto dos enunciados universais (leis científicas) ficarem excluídos da linguagem da ciência (Echeverría, 1999).

Interessa ressaltar que, pelo menos, durante o período em que o empirismo lógico prevaleceu, a matemática foi tendencialmente encarada pelos filósofos da ciência como uma linguagem ou estrutura formal que respondia ao objectivo máximo de unificar toda a ciência, que assim poderia ser codificada num cálculo lógico formal (Lakatos, 1978; Davis e Hersh, 1995). Assim, por um lado, pode-se afirmar que "o formalismo» é o baluarte da filosofia do positivismo lógico" (Lakatos, 1978, p.15), e, por outro, que esta forma de ver a matemática reforça a visão formalista da matemática desenvolvida por Hilbert. Daí que se aponte como uma das razões para o longo domínio do formalismo a sua ligação com o positivismo lógico (Davis e Hersh, 1995).

Popper, em 1934, assume-se como uma das primeiras vozes críticas ao positivismo, defendendo a impossibilidade de justificar as leis da ciência através de raciocínios indutivos. As suas ideias lançam as bases para uma mudança fundamental no modo de encarar o conhecimento científico, principalmente pela importância que atribui às teorias científicas (Paixão, 2003). A sua postura perante as teorias científicas é a de que estas são produto do homem que as formula como hipóteses ou conjecturas. A sujeição dessas teorias a testes experimentais não pode ter como finalidade provar essas teorias, mas tão somente expô-las à crítica e à refutação. Assim, o grau de credibilidade de uma teoria está associado à sua resistência aos critérios de falsificação introduzidos pela experiência (Echeverría, 1995, 1999).

Na sequência da publicação, em 1962, da obra *Estruturas das Revoluções Científicas* de Thomas Kuhn a reflexão filosófica sobre a ciência muda profundamente e Khun torna-se um dos filósofos da ciência mais marcantes do século XX (Paixão, 1998, 2003). Kuhn não só introduz novos conceitos na filosofia da ciência como também sublinha a importância e relevância dos estudos históricos para a epistemologia da ciência. Khun rompe com a visão cumulativa da ciência e defende que a ciência é fruto de uma acção colectiva das comunidades científicas, com base em crenças, métodos, conceitos e valores partilhados a que chama paradigma. Porém, para além da existência de períodos de ciência normal, em que os cientistas trabalham num determinado paradigma, defende a existência de períodos de revolução científica que implicam paradigmas rivais e comunidades científicas em oposição. Nesses momentos de crise e mudança de paradigma, podem coexistir percepções heterogéneas e mesmo incompatíveis dos fenómenos, inclusive, os próprios termos básicos da ciência podem mudar de significado. Nessa base, uma teoria científica não é posta de lado por refutação empírica ou por uma experiência crucial (crítica a Popper), mas apenas quando surge um paradigma rival que a sustitui iniciando-se um novo período de ciência normal (Echeverría, 1999; Paixão, 1998, 2003).

O que é verdadeiramente marcante e revolucionário no pensamento filosófico de Kuhn é a ideia de que, se queremos compreender o que é a ciência e os processos de produção do conhecimento científico, não podemos ignorar as práticas reais dos cientistas. A filosofia da ciência não deve ser uma filosofia que prescreve o que as práticas devem ser, mas sim uma filosofia que enquadre e descreva essas práticas. Nesse sentido, afirma a importância de se realizarem estudos históricos minuciosos como etapa preliminar da elaboração de teorias gerais sobre a ciência. A história que interessa a Khun é aquela que aprofunda o modo de pensar do passado, tentando compreender as investigações e os debates no seu próprio contexto e não segundo os parâmetros actuais. Com Khun, a história da ciência irrompe como fonte de argumentos para a reflexão sobre a natureza da ciência, iniciando-se uma viragem historicista nos estudos sobre ciência:

> A história da ciência converte-se (…) num complemento imprescindível da reflexão metodológica; e é indubitável que, pelo menos neste ponto, as teses de Khun triunfaram plenamente a partir dos anos 70 (Echeverría, 1999, p. 130).

A partir de Kuhn, muitos outros nomes marcantes da filosofia da ciência da segunda metade do século XX, como Feyerabend, Lakatos, Laudan, Toulmin, Putman, Rorty, Hacking entre outros, apesar de não constituírem um movimento disciplinado e da existência de importantes diferenças no seu pensamento, defenderam que a filosofia da ciência deve falar do que os cientistas fizeram e fazem. Como consequência os estudos sobre a ciência orientaram-se cada vez mais para a *praxis* científica (Paixão, 1998, 2003; Echeverría, 1999; Hersh, 1986).

Lakatos tornou-se conhecido, nos anos 70 do século XX, pelas suas aproximações às teses de Carl Popper. De acordo com Echeverría (1999), é precisamente da sua tentativa de rebater algumas das críticas feitas pelos contemporâneos à teoria do falsicacionismo de Popper que surge uma das suas principais propostas em filosofia da ciência. Lakatos "ataca" o conceito popperiano de refutação de uma teoria e, profundamente influenciado pelas teses de Kuhn, procura estabelecer a síntese das duas posturas. Introduz um critério inovador de demarcação das teorias científicas segundo o qual uma teoria (enquanto conjectura que é) será sempre substituída por aquela que, na fase de crise do paradigma, inclua os aspectos fundamentais da anterior mas que permita estabelecer um maior número de previsões empíricas. Ou seja, a adopção pelos cientistas de uma dada teoria em detrimento de outra, está relacionada com o seu maior conteúdo empírico. Ora, o conteúdo empírico de uma teoria é caracterizado pela descoberta e corroboração de alguns factos novos e surpreendentes e, também, pelo seu potencial heurístico. Esta postura de Lakatos, conhecida por "falsificacionismo metodológico sofisticado", implica que a avaliação das teorias científicas ocorra em função do "programa de investigação científica" em que estas se inserem. Conduz-nos também à tese central de Lakatos segundo a qual uma teoria só pode ser falsificada pela emergência de "um programa de investigação científica" melhor.

Em termos de implicações para a filosofia da ciência, as teses de Lakatos permitiram estabelecer uma relação muito estreita entre as noções de ciência e progresso, pois a escolha entre duas teorias rivais deve orientar-se no sentido de um maior progresso para a ciência (op. cit.).

Outro filósofo importante é Larry Laudan (1986) que levantou novas e importantes questões no interior da concepção historicista. Centrando as análises epistemológicas e metodológicas no progresso e não na razão, Laudan defende que os critérios de cientificidade mudam ao longo do tempo e que a noção de progresso científico está associada à maior ou menor capacidade que uma dada teoria científica tem de resolver problemas[20]. Quanto maior for a capacidade de resolução de problemas de uma dada linha de investigação científica, tanto mais esta contribui para o progresso e mais científica é. Defende a coexistência de teorias de investigação rivais como uma regra, embora a maior efectividade de uma delas na resolução de problemas a converta numa tendência de investigação dominante, preferida pelos cientistas, que passa, por isso, a traduzir a ciência oficial. Assim, a racionalidade da ciência é definida em função de um fim principal - a resolução de problemas – e o objectivo da ciência consiste em obter teorias com uma efectividade elevada na resolução de problemas (op. cit).

Na opinião de Broncano (1998, p. 62), Laudan ao sublinhar a capacidade de resolução de problemas como o critério de avaliação das teorias científicas abriu as portas para uma Filosofia Naturalista do Conhecimento, no sentido em que postula uma adequação empírica entre a explicação da mudança científica e os processos reais levados a cabo pelos cientistas. Esta postura implicou que Laudan defendesse acerrimamente o carácter essencialmente histórico do conhecimento científico, criticando o racionalismo a-histórico e conduzindo-o à aceitação e à defesa do pluralismo metodológico da actividade científica (Echeverría, 1999; Broncano, 1998).

Estas e outras novas orientações na reflexão filosófica sobre a ciência foram acompanhadas por transformações e reorientações noutras áreas como a sociologia da ciência. A partir dos anos 70, no âmbito dos estudos sociais sobre ciência, emergiram diversas escolas e grupos que preconizaram que o objecto de estudo da sociologia da

[20] Para Laudan um facto só constitui um problema científico na medida em que suscite o interesse dos investigadores em resolvê-lo. Estes factos, chamados de "factos problemáticos", constituem o cerne de uma teoria científica, cujo propósito é resolver o maior número possível de factos problemáticos (Laudan, 1986).

ciência deve ser não só a actividade científica, como também os próprios conteúdos do conhecimento científico. Emerge assim uma nova corrente designada globalmente por sociologia do conhecimento científico (Echeverría, 1995, 1999). Como pressupostos gerais, assume-se que a ciência é significativa e constitutivamente social em todos os aspectos que afectam o seu núcleo teórico, a ponto do conhecimento científico ser entendido como um produto social (Pickering, 1992, *in* Echeverría, 1995, p. 21). Valoriza-se a *praxis* dos cientistas, realça-se o contexto de descoberta, sublinha-se a influência dos contextos sociais e culturais (factores externos) sobre a ciência, e, consequentemente, sobre o desenvolvimento do conhecimento científico. Esta tese deu origem a várias tendências[21], que, na opinião de Echeverría (1999, p. 273) "constituem uma viragem sociológica oposta à filosofia clássica da ciência de corte racionalista e epistemológico". De acordo com Paixão (2003, p. 5), a história da ciência, entendida no sentido preconizado por Khun como uma evolução dos quadros conceptuais anteriores, surge como fonte de argumentos e desenvolvimentos teóricos pertinentes para a interpretação da ciência actual, constituindo-se como a base da sociologia e da filosofia da ciência. Em suma, podemos dizer que até à década de 70 do século XX predominou uma Filosofia do Conhecimento Científico que se transformou e alargou, a partir dos anos 80, a uma Filosofia da Actividade Cientifica (Paixão, 2003; Echeverría, 1999).

Hacking é um dos filósofos mais representativos da Filosofia da Actividade Científica de finais do século XX (Echeverría,1999). Este filósofo incide a sua atenção sobre a actividade científica (e também tecnológica) e nos efeitos dessa prática sobre o mundo, isto é, as *praxis* científicas não são olhadas enquanto representações do mundo, mas sim enquanto acções interventoras no mundo (Hacking, 1983). Desse ponto de vista, "a actividade científica, incluindo o trabalho de teorização mais puro (como a axiomatização de uma teoria), orienta-se para a transformação do mundo" (Echeverría, 1999, p.306). Hacking (1983), ao assumir a realidade das acções e dos processos da ciência revelados pela sua capacidade de transformação do mundo insere-se no campo de um *realismo prático* que deixa para trás discussões ontológicas, defendendo que o objectivo principal da ciência é produzir novos fenómenos, conhecer e intervir na natureza.

[21] Echeverría (1999) destaca, em particular, cinco correntes: o programa forte em sociologia do conhecimento científico (Bloor, Barnes, Mackrnzie, …), o programa empírico do relativismo (Collins, Pinch, …), os estudos de ciência e género (Keller, Longino, …) a etnometodologia (Garfinkel, Cicourel, Latour, …) e o construtivismo social (Karin Knorr-Cetina, …).

Também Echeverría (1995, 1999) defende que, quando a reflexão sobre ciência atende não apenas aos produtos conceptuais da ciência (ao conhecimento) mas também à actividade científica, sobressai a ideia de que a ciência é muito mais do que uma acção descritiva, explicativa, preditiva ou compreensiva (como pensaram os filósofos empiristas do conhecimento científico), sendo antes um conjunto de actividades modificadoras e transformadoras do mundo. Nesse sentido a filosofia da ciência deve atender aos valores que influenciam a *praxis* científica, pois “a ciência é, na actualidade, uma forma de cultura de grande influência na sociedade, que por sua vez está profundamente influenciada por esta” (Paixão, 2003, p.14).

Com já foi referido, a história da ciência assumiu-se a partir de Khun como a base da sociologia e da filosofia da ciência. O desenvolvimento de uma nova historiografia da ciência e da sociologia da actividade científica viabilizou a ligação entre as três áreas (Filosofia, História e Sociologia) e uma visão mais holística da ciência (Paixão, 2003). Fruto dessa ligação torna-se claro, como salienta Echeverría (1995), que não só as várias ciências são bem diferentes entre si[22], como a história mostra a existência de pluralismo metodológico em cada uma delas[23]. Nesse sentido, torna-se evidente que não é possível construir uma teoria da ciência que enquadre as várias ciências e assuma a pluralidade de métodos científicos actuais e passados. A solução defendida por este matemático e filósofo passa pela aceitação de que a filosofia da ciência deve tomar o pluralismo das ciências como ponto de partida, bem como o pluralismo metodológico de cada uma delas (op. cit., p. 118). O exemplo escolhido para ilustrar esta tese é precisamente a matemática, que como referido atrás, foi tendencialmente considerada distinta das ciências físico-naturais e considerada pelo positivismo lógico como uma linguagem formal unificadora de todas essas ciências.

---

[22] O conjunto de saberes teóricos e práticos base de cada ciência (Física, Química, Biologia, Matemática, …) inserem-se em quadros conceptuais distintos, tanto pela sua origem histórica como pela ontologia subjacente. Embora se possa falar em interacção entre elas quer em termos de investigação quer de aplicação (Echeverría, 1995, p. 115).

[23] Por exemplo: os métodos dedutivos e indutivos (lógica aristotélica), os métodos de análise e síntese (utilizados primeiramente pelos geómetras gregos, mais tarde retomados por Pappus e que conduziram a uma profunda renovação dos métodos científicos), os métodos experimentais, o método axiomático, os diversos métodos matemáticos (computacionais, algébricos, infinitesimais, etc.), os métodos de observação (muito utilizados pelas ciências humanas), os métodos heurísticos, o método hipotético-dedutivo, os métodos de classificação, os métodos computacionais, etc. (Echeverría, 1995).

A prevalência do positivismo lógico, como já discutido, alimentou a corrente formalista da matemática, nascida da crise dos fundamentos e contribuiu para a aceitação generalizada de que a metodologia da matemática é exclusivamente lógico-dedutiva (Hersh, 1986). Porém, as reorientações sofridas pela filosofia da matemática a partir da década de 80 do século XX, tal como aconteceu relativamente à da ciência, colocaram a tónica na *praxis* dos matemáticos e puseram a “descoberto” que o método lógico-dedutivo não se coaduna com essa *praxis* (Echeverría, 1995; Hersh, 1986, 1996; Davis e Hersh, 1995). De facto, os matemáticos não se limitam a demonstrar teoremas a partir de axiomas, também fazem observações minuciosas, formulam hipóteses e conjecturas não demonstradas, recorrem a métodos heurísticos e, sobretudo, devido ao aparecimento do computador, não põem de lado a possibilidade, para o prosseguimento de investigações, que essa tecnologia dá à experimentação em matemática[24] (Echeverría, 1995, p. 118). Em suma, Echeverría (1995, p. 119) aproxima a matemática da ciência e conclui que a filosofia da ciência/matemática deve tomar, como ponto de partida, o pluralismo das ciências e o facto da ciência ser metodologicamente plural.

Para se entender um pouco melhor o que se acabou de dizer relativamente à filosofia da matemática, impõe-se situar os principais marcos que conduziram à mudança de perspectivas enunciada por Echeverría.

O primeiro desses marcos é Irme Lakatos, matemático e filósofo, que, a par das suas incursões na filosofia da ciência, põe de lado as questões relacionadas com a procura de fundamentos, centra a sua atenção na lógica da descoberta do conhecimento matemático e defende que formalismo não se coaduna com a actividade real do matemático. Até porque, na sua opinião, o formalismo tende a identificar a matemática com abstracção axiomática formal (Lakatos, 1978, 1986). Inserindo-se na linha das teses epistemológicas de Popper segundo as quais o conhecimento científico é hipotético e falível e que a ciência progride a partir de problemas pelo jogo entre factos, conjecturas e refutações, Lakatos propõe-se mostrar que a filosofia moderna da matemática se encontra profundamente

[24] O computador permitiu tornar efectivas muitas aplicações matemáticas (Davis e Hersh, 1995, 1997) e pôr em causa os padrões de demonstração matemática (op. cit, Tymockzo, 1986b). De facto, a “demonstração” em 1976 da conjectura das quatro cores (em aberto há mais de um século) com recurso ao computador levanta questões filosóficas muito sérias. A mais polémica tem a ver com o facto da aceitação conjectura das quatro cores como um “teorema” ter profundas implicações ao nível da concepção de “teorema” e do conceito de demonstração que lhe está subjacente (Tymockzo 1986; Davis e Hersh, 1995). Na opinião de Tymockzo (op. cit.), a aceitação de um novo tipo de demonstração, a que chama demonstração assistida por computador, introduz métodos experimentais na Matemática pura, isto é, na *praxis* matemática.

imersa na epistemologia geral e que só nesse contexto pode ser compreendida (Lakatos in Echeverría, 1999, p.158). Importa clarificar que Lakatos apenas aplica a sua análise epistemológica à matemática não-formal, isto é, à matemática encarada como um processo de descoberta e desenvolvimento (Ponte e tal., 1997, p. 31). Ainda que a matemática formal, com demonstrações estabelecidas e aceites pelos matemáticos, não seja objecto de reflexão, Lakatos defende que esta é o produto da formalização de alguma teoria não-formal (Lakatos, 1986, p. 39). A tese de Lakatos é que a matemática (leia-se matemática não-formal) não se desenvolve de forma cumulativa e através do método dedutivo, com novos teoremas que se juntam a outros já estabelecidos, mas sim a partir de problemas e conjecturas que são sujeitas à discussão crítica, à especulação e à refutação[25], numa tentativa de aperfeiçoamento incessante das conjecturas, através da pesquisa simultânea de 'demonstrações' e contra-exemplos[26] (Lakatos, 1978, 1986).

Assim, a perspectiva filosófica de Lakatos não incide sobre o problema dos fundamentos do conhecimento matemático, mas sim sobre alguns problemas da metodologia da matemática, termo a que atribui o sentido de *heurística* de Pólya (Lakatos, 1978, p. 15), isto é, do estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção matemática (Pólya, 2003, p. 133). A sua reflexão a génese do conhecimento matemático e sobre o processo através do qual as criações matemáticas privadas se transformam em saber matemático publicamente aceite, pode considerar-se como um marco da aproximação à filosofia das ciência, nomeadamente às teses de Popper, na medida em que assume que o conhecimento matemático, a exemplo do conhecimento científico, é intrinsecamente conjectural e falível, que o erro tem um valor insubstituível no processo de produção do conhecimento e que os contextos de descoberta e justificação se interpenetram (Lakatos, 1978, 1986). Nesse sentido, propõe um novo tipo de teoria, que denomina por *quase-empírica* e que permite um novo olhar na reflexão filosófica sobre a matemática[27].

[25] A sua reflexão sobre a lógica da descoberta em matemática culmina com a publicação póstuma, em 1976, da obra iniciada em 1957 e intitulada "Provas e Refutações" (Lakatos, 1978).

[26] O termo demonstração não tem aqui a conotação tradicional, devendo ser encarado como sinónimo de explicações e justificações que contribuem para aumentar a plausibilidade e a precisão da conjectura. Também a crítica à qual são sujeitas as conjecturas deve ser entendida como cepticismo ou como procura de contra-exemplos para um dado argumento (Davis e Hersh, 1995, p. 324).

[27] Lakatos defende que houve três grandes tentativas de organização do conhecimento matemático: a *euclidiana*, a *empirista* e a *indutivista*. No primeiro caso, uma teoria é *euclidiana* quando o valor de verdade dos axiomas se transmite, através da validade lógica das demonstrações a todas as proposições e teoremas da teoria, de cima para baixo. Uma teoria é *empirista* quando os enunciados de base são verdadeiros ou falsos e esse valor de verdade se transmite de baixo para cima através de conjecturas gerais, sendo que o valor de

Apoiando-se na história da ciência e da matemática, sustenta que o desenvolvimento de grande parte das teorias matemáticas, tal como as teorias científicas, é *quase-empírico*. Para tal, argumenta que uma teoria *quase-empírica* começa com problemas, a que se segue a procura enérgica de soluções e, depois, a sua sujeição a testes e refutações severas. O veículo do progresso é a especulação, o criticismo, a controvérsia entre teorias rivais. “The slogans are growth and permanent revolution, not foundations and accumulation of eternal truths” (Lakatos, 1986, p. 35).

Ao preconizar que tanto a matemática como as ciências físico-naturais partem de problemas e não de axiomas e procedem por meio de conjecturas e provas, que são submetidas à crítica e à falsificação, aproxima os processos de construção das teorias científicas e matemáticas. Em ambos os casos, as teorias, tendo por fim resolver problemas, se modificam e se renovam no processo de resolução de problemas, originando-se verdadeiros programas de investigação científica (Echeverría, 1999, p.163). Lakatos assinala que a existir alguma diferença entre a matemática e as outras ciências esta reside na natureza dos falsificadores potenciais (Lakatos, 1978, 1986), afirmando que, no caso das teorias matemáticas, estes não são factos espaço-temporais mas sim falsificadores potenciais lógicos, como, por exemplo, a redução ao absurdo ou a descoberta de contradições. Nesse âmbito, uma teoria pode ser refutada se um dos seus teoremas é «negado» pelo teorema correspondente da teoria não formal, assumindo este último a designação de falsificador heurístico da teoria matemática: “One could call such an informal theorem a *heurist falsifier* of the formal theory” (Lakatos, 1986, p. 39).

Apesar da reflexão filosófica de Lakatos ser assumidamente incompleta, nunca explicando, por exemplo, a sua visão sobre o que é realmente a matemática e quais são os objectos das teorias matemáticas não-formais (Hersh, 1996b; Ponte et al., 1997), lança as bases para uma mudança profunda na reflexão sobre o que é a matemática quando desafia os filósofos a entrarem em conta os aspectos *quase-empíricos* desta ciência e elaborarem uma filosofia “of critical fallibilism, witch takes inspiration not from the so-called foundations but from the *growth* of mathematical knowledge” (Lakatos, 1986, p. 44). Ou seja, acentua que o principal alvo da reflexão sobre matemática não deve ser a

verdade dessas conjecturas resulta do confronto por via hipotético-dedutiva com os enunciados básicos. Por fim, as teorias *indutivas*, características do positivismo lógico, assentam na retransmissão da verdade dos enunciados básicos através de métodos indutivos, de baixo para cima (Echeverría, 1999, p. 161).

problemática da justificação, mas sim o processo de produção e desenvolvimento do conhecimento matemático. Assim, um aspecto fundamental da metodologia lakatosiana é a insistência nos contextos de descoberta e na importância da história da matemática para a construção de uma teoria da ciência/matemática (Echeverría, 1999, p. 164). Numa crítica profunda à prevalência do formalismo e ao facto deste desligar a história da matemática da filosofia da matemática afirma, parafraseando Kant: "a história da matemática, à falta da orientação da filosofia, tornou-se *cega*, ao passo que a filosofia da matemática, voltando costas aos fenómenos mais curiosos da história da matemática, tornou-se *vazia*" (Lakatos, 1978, p. 15).

De acordo com Ernest (1996a, 1996b), o falibilismo e o quase-empirismo de Lakatos inspiraram novas tendências nos estudos filosóficos sobre a matemática. A nova corrente emergente, conhecida, entre outras designações, por *quase-empirismo*[28], foi o fruto do contributo de vários filósofos e matemáticos como, por exemplo, Wittgenstein, Lakatos, Putnam, Wang, Davis, Hersh e Tymockzo. O *quase-empirismo* parte do pressuposto que a filosofia da matemática não se pode limitar à questão dos fundamentos e que deve assumir uma abordagem holística que entre em linha de conta com a *praxis* dos matemáticos, com a sua história e aplicações, com o papel da matemática na cultura humana e com questões axiológicas e de educação - em resumo - que descreva a face humana da matemática. Ainda na opinião de Ernest (op. cit.), esta abordagem remete para a adopção de uma visão externalista, isto é, para a consideração da dimensão social da matemática incluindo as suas aplicações e usos, o que requer uma abordagem multidisciplinar que acomode os contributos de áreas como a história da matemática, a filosofia externalista da ciência[29], a filosofia em geral, os estudos sociais sobre ciência, a etnomatemática, etc.

As primeiras tentativas de reconceptualizar a filosofia da matemática estão bem documentadas numa obra editada, pela primeira vez em 1986, pelo filósofo Thomas Tymockzo e intitulada *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Nela estão incluídos um conjunto de ensaios produzidos por matemáticos, filósofos e lógicos (alguns dos quais já referidos atrás) que constituem um marco pelo realce que é atribuído ao conceito *quase-empirico* da *praxis* matemática e ao abandono da procura de fundamentos

[28] Tradução proposta para o termo *quasi-empiricist*.
[29] Cita, em particular, nomes como Feyerabend, Hacking, Khun, Laudan.

como o centro da reflexão sobre a matemática (Tymockzo, 1986a, p.x). Mais do que uma teoria sobre a matemática, o *quase-empirismo* deve ser encarado como uma abordagem à filosofia da matemática que enfatiza quer a *praxis* matemática, quer as conexões naturais entre a matemática e as outras ciências (op. cit., p.49). Hersh (1986), num texto integrado na obra citada, afirma que é razoável propor como nova tarefa para a filosofia da matemática explicar o que é realmente o conhecimento matemático – falível, corrigível, não definitivo e em desenvolvimento, tal como qualquer outro conhecimento humano. Assim, sugere que, em vez de se continuar a procurar por fundamentos ou de se ficar desorientado pela sua ausência, deve-se procurar olhar para o que é realmente a matemática e considerá-la como uma parte do conhecimento humano em geral. "That is, reflect honestly on what we do when we use, teach, invent, or discovery mathematics – by studing history, by retrospection, and by observing ourselves and each other with the unbiased eye of Martians or anthropologists" (op. cit., p. 22).

Na mesma obra, Hilary Putman (1986) argumenta também que o conhecimento matemático tem um carácter *quase-empírico*, na medida em que, tal como acontece, por exemplo, na Física, este é corrigível e não absoluto e que o critério de verdade em matemática é o sucesso das ideias na prática. Salienta o uso de métodos análogos aos das ciências físico-naturais (indução probabilística, heurística, intuição, etc.) que são a fonte de novos axiomas, novos objectos e novos teoremas e que, frequentemente, o matemático admite serem verdadeiros antes de encontrar uma demonstração que os sustente. Esta posição não retira a importância da demonstração, que para o autor continua a ser o método por excelência da verificação matemática. A este propósito escreve:

> A demonstração e a inferência quase-empírica devem ser vistos como complementares. A demonstração tem a grande vantagem de não aumentar o risco de contradição, enquanto que a introdução de novos axiomas ou objectos incrementa o risco de contradição, pelo menos, até que seja encontrada uma interpretação da nova teoria em alguma teoria já aceite. Por este motivo, a demonstração continua a ser o método primordial da verificação matemática (op. cit., p. 63).

Assumindo uma perspectiva epistemológica realista da matemática, Putman defende que as afirmações das teorias matemáticas são objectivamente verdadeiras ou falsas, como é comprovado pela experiência matemática: "The construction of a highly articulated body of mathematical knowledge with a long tradition of successful problem solving is a truly remarkable social achievement" (op. cit., p. 60). Por outro lado, sustenta que uma interpretação razoável das aplicações da matemática ao mundo físico requer uma interpretação realística da matemática. “Mathematical experience says that mathematics is true under some interpretation; physical experience says that interpretation is a realistic one” (op. cit., p. 60).

Na obra *The Mathematical Experience* de Davis e Hersh (1995[30]), também considerada um marco importante na ruptura dos estereótipos tradicionais sobre a matemática (Rowe, 1996), os matemáticos Philip Davis e Reuben Hersh, assumidamente insatisfeitos com as filosofias tradicionais (platonista e formalista) que consideraram “falsificar a natureza da matemática como ela é na vida humana, na história” (op. cit., p. 368), propõem-se aprofundar a reflexão sobre a génese e o processo de construção do conhecimento matemático, afirmando que qualquer filosofia que não consiga incorporar a experiência matemática é demasiado pequena. Assim, começam por adoptar o ponto de vista de um profissional que olha para a matemática do interior, descrevendo os ingredientes com os quais é elaborada, como é criada e avaliada, o que é sentido e o que parece ser o significado de fazer matemática, além dos valores humanos que lhe podem estar associados. Noutra obra, publicada alguns anos depois, propõem complementar a análise, observando a matemática de fora e centrando a sua atenção nas aplicações matemáticas, pois reconhecem que a reflexão sobre matemática não pode deixar de ter em conta a «matematização do mundo», fruto do impacto da aplicação crescente da matemática ao mundo natural ou às actividades do humanas.

> Estamos preocupados com o impacte que a matemática tem quando é aplicada ao mundo que se estende fora dela (…) Queremos saber quando é que essas aplicações são efectivas, quando o não são, quando são benéficas, perigosas ou irrelevantes. Também queremos saber quando constrangem as nossas vidas e como transformam a nossa percepção da realidade (Davis e Hersh, 1997[31], p.11).

Contrapondo as teses da filosofia platonista e das filosofias fundacionistas (logicista, construtivista e formalista) com exemplos da prática real dos matemáticos, defendem um realismo ontológico e epistemológico. Argumentam que a actividade de investigação matemática obriga a um reconhecimento da objectividade da matemática, que o conhecimento dessa verdade é conseguido por vários métodos (intuição, raciocínio heurístico, métodos hipotético-dedutivos, etc.) e que a matemática é uma realidade

[30] O original publicado em 1981 tem tradução portuguesa em 1995.
[31] Data da tradução da edição original de 1986.

objectiva que é independente da consciência de qualquer pessoa em particular (Davis e Hersh, 1995, p. 337). Advogam que as proposições matemáticas são bem definidas, tal como as conclusões da ciência natural e, ainda, que o significado dos assuntos sobre os quais a matemática se debruça devem ser encontrados no conhecimento partilhado pelos seres humanos. “A matemática é uma criação nossa; é acerca de ideias nas nossas mentes” (op. cit, p. 376).

Em termos ontológicos, os objectos matemáticos existem e têm propriedades bem definidas, que podemos ou não conseguir descobrir (op. cit, p. 376). Porém, os objectos matemáticos não são nem objectos físicos, no sentido em que não têm existência física na Natureza, nem mentais, na medida em que se o fossem seriam fruto do pensamento individual do sujeito, são antes objectos de natureza social que resultam da criação do ser humano e cuja existência ocorre na consciência partilhada da humanidade (Hersh, 1996). De um modo geral, um novo conceito é sugerido por um matemático e, frequentemente, a ideia é desenvolvida e modificada ao longo de um determinado período de tempo pela comunidade matemática até que se fixe uma definição (Hersh, 1999). Os objectos matemáticos que conhecemos e aqueles que serão inventados não são criados de forma arbitrária pelo matemático, são o resultado da actividade matemática desenvolvida a partir de outros objectos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência, da vida diária e também de problemas inerentes à própria matemática (Davis e Hersh, 1995; Hersh, 1986; 1996; 1999). Uma vez criados e definidos, as suas propriedades são descobertas, sendo que essa descoberta nem sempre é imediata e fácil. Assinale-se que mesmo encarando os objectos matemáticos como conceitos sociais, alguns deles estão mais próximos do que outros da realidade física, sendo mesmo susceptíveis de múltiplas representações (tabelas, modelos físicos, gráficos, etc.).

Nesse sentido, o saber matemático é o resultado de um processo histórico, social e cultural (Hersh, 1996, 1999). É histórico porque, mesmo não conhecendo as origens mais remotas da matemática, todos reconhecem que estas são bem antigas e que são um produto da humanidade; é social e cultural na medida em que os matemáticos trabalham inseridos em comunidades, trocando ideias, expondo-as à crítica dos seus pares e grande parte do desenvolvimento da matemática responde a pressões da sociedade. Este último ponto tem desencadeado alguma controvérsia entre a comunidade matemática, na medida em que muitas das aplicações contemporâneas da matemática são estritamente fruto de desenvolvimentos da matemática pura, não sendo assim possível explicar o sucesso dessas aplicações a fenómenos físicos.

É de ressaltar que a discussão sobre a natureza da matemática e sobre a metodologia da descoberta em matemática, a relação entre a teoria e as aplicações e entre a matemática e as ciências físico-naturais tem ocupado, nos últimos anos muitos matemáticos, sendo difícil encontrar opiniões convergentes sobre este assunto. Como salienta Carvalho e Silva numa nota introdutória à obra *Os problemas da Matemática (*Stewart, 1996), as discussões sobre a natureza da matemática, da relação entre a teoria e as aplicações e entre a matemática e as outras ciências são recorrentes em todos os sítios onde se faz matemática ou se utiliza a matemática, sendo difícil encontrar opiniões definitivas sobre qualquer uma dessas questões. Não obstante, parece existir hoje alguma convergência na rejeição do formalismo e na aceitação de que a matemática não é a-histórica nem a-humana, isto é, que deve ser entendida como parte da cultura humana e produzida historicamente.

O matemático Ian Stewart (1996) reconhecendo que um dos maiores problemas da matemática é explicar a todos os outros aquilo de que trata, avança alguns contributos para a reflexão sobre a criação de novo conhecimento:

> A matemática não é sobre símbolos e contas. Estas são apenas ferramentas do ofício (…) A matemática é sobre *ideias*. Em particular, é sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si. O objectivo da matemática é perceber essas questões pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. Não é só uma questão de obter a resposta certa; mais do que isso, importa perceber porque uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma.
> (…)
> Ideias matemáticas realmente boas (…) resultam do trabalho conjunto de muitas pessoas durante longos períodos de tempo. A sua descoberta envolve caminhos errados e becos sem saída intelectual (ibidem, p.14,19).

Olhando para a matemática de um ponto de vista que tem em conta a sua história, observa que uma das características, que a diferencia das outras ciências, reside na longevidade das ideias matemáticas: “as ideias matemáticas têm uma permanência que falta às teorias físicas (…) ideias matemáticas com centenas de anos de idade são usadas todos os dias na matemática mais moderna” (Stewart, 1996, p. 19). Por outro lado, tal como é defendido por autores na actual filosofia da ciência (e.g. Laudan), associa a noção de progresso em matemática à maior ou menor capacidade de resolver problemas: “Os problemas são a força motriz da matemática. Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos" (op. cit, p. 16). Nesse sentido, considera que a escolha judiciosa de exemplos é também uma fonte importante de inspiração matemática: "Um interessante e autocontido pedaço de matemática, concentrando-se num exemplo judiciosamente escolhido, contém normalmente em si o germe de uma teoria geral" (op. cit., p.16). Deste modo, os conceitos e as teorias matemáticas, tal como as científicas, surgem durante o processo de resolução de problemas, como uma criação humana na tentativa de obtenção de respostas e soluções.

Devlin (2002), assumindo também uma abordagem historicista, observa a prática matemática passada e presente e defende igualmente uma perspectiva cultural da matemática: "a matemática (…) [é] um elemento precioso e dinâmico da cultura humana" (p. 5). Assim, a procura de resposta para o que é a matemática não pode deixar de ter em conta os contextos sociais e culturais em que é produzida: "a resposta à pergunta «o que é a matemática?» não foi sempre a mesma ao longo da história"(op. cit, p. 7).

Nesse mesmo sentido apontam outros autores: "When we use the word mathematics (…) we never be sure that those who talked about it in the past gave the same meaning to it as we do today (…) Now, even among research mathematician there is no consensus on what mathematics is" (Grugnetti e Rogers, 2000, p. 43). Ainda que, para alguns, a matemática seja "a body of abstract knowledge which is available to be learned or rediscovered and then improved upon by any individual", e para outros resulte de "problems, which are expressed in the needs of people at a particular time", a sua história mostra que "the conceptions of mathematics at timeless derives from a particular cultural context" (op. cit, p. 44, 45).

Portanto, como refere Kleiner (1996) não é possível obter uma resposta à questão "O que é a matemática?" sem uma compreensão da sua história. Assim, dado que o termo significou diferentes coisas em diferentes épocas, Devlin (2002), reflectindo sobre o profundo desenvolvimento da matemática ao longo de todo o século XX, propõe uma visão da matemática contemporânea como a ciência dos padrões, alegando que esta é uma definição consensual entre a maioria dos matemáticos:

> O que o matemático faz é examinar padrões abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo.

> Podem surgir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das actividades mais ocultas da mente humana (p. 9).

Nesse sentido, a sua reflexão sobre a natureza da actividade matemática permite-lhe concluir que grande parte desta se dedica à descoberta e análise de novos padrões, à procura de outros domínios onde novos padrões estejam presentes, à formulação de axiomas para os descrever e à ampliação do campo de estudo e à aplicação das teorias e resultados matemáticos aos fenómenos quotidianos. Em termos metodológicos defende que um estudo matemático de um fenómeno qualquer envolve uma simplificação inicial, quando são identificados e isolados todos os conceitos e ideias-chave. Depois, a análise aprofundada dos conceitos-chave conduz à descoberta e investigação de padrões relevantes. Segue-se a tentativa de axiomatização, a formulação e demonstração de teoremas. Nesse processo, revelam-se as ligações com outras áreas. Finalmente, a teoria é generalizada, conduzindo à descoberta de novas analogias e ligações com outras áreas da matemática (op. cit, p. 216). Ressalte-se que a demonstração impõe-se como o único critério para o estabelecimento da verdade matemática: "Em matemática, a verdade é decidida pela demonstração" (op. cit., p. 58).

Em termos ontológicos, Devlin realça que "nenhuma das entidades que formam o substrato da matemática existem no mundo físico (…) são puras abstracções que apenas existem na mente colectiva da humanidade" (op. cit. p. 12). Ao defender que a matemática é a ciência dos padrões e que estes podem ser encontrados "em qualquer parte onde esteja interessado em procurá-los: no universo físico, no mundo vivo ou mesmo nas nossas próprias mentes" (op. cit., p. 216), aceita-se, até certo ponto, a ideia que muita áreas da matemática são motivadas pelo mundo físico e que podem ser utilizadas para o descrever e abre-se um novo caminho para a reflexão sobre a relação entre a matemática e as outras ciências e, em particular, sobre as aplicações matemáticas.

Encarar a matemática como um assunto que não é imune a forças exteriores não só deu um impulso imprescindível para a mudança de perspectivas epistemológicas da matemática, como também determinou uma nova forma de encarar a história da matemática. Como afirmam Grugnetti e Rogers. (2000, p. 41), a adopção de uma visão da história da matemática que atenda não apenas a aspectos internos, mas também a aspectos externos, faz com que a tarefa dos historiadores passe a ter em conta as influências, as condições e as motivações (sociais, económicas e políticas, bem como científicas e matemáticas) sob as quais emergem os problemas. Assim, a visão internalista da história da matemática, segundo a qual esta ciência deve ser encarada como um assunto isolado de influências exteriores e cujas ideias tendem progressivamente a tornar-se mais abstractas e gerais, é abandonada como a única possível e começam a surgir escritos históricos "socialmente baseados". Deste modo, a historiografia da matemática contemporânea, centrada nos problemas, põe em evidência o processo de construção e rectificação do conhecimento originado pela resolução de problemas e apoia uma visão construtivista do conhecimento matemático segundo a qual os objectos matemáticos não são nem descobertas de algo presente na realidade, nem invenções a ser aplicadas à realidade, mas sim construções cujo propósito é tornar um problema inteligível ou resolvê-lo (Barbin, 1996).

Na discussão efectuada procurou salientar-se que, nos últimos anos, a reflexão sobre a matemática tem-se orientado para a consideração da *praxis* dos matemáticos. A adopção de abordagens internalistas e externalistas mostra que há muito factores que influenciam a prática dos matemáticos, como sejam, por exemplo, a possibilidade do erro matemático, a existência de explicações matemáticas que não assumem o carácter de prova formal, a comunicação entre matemáticos, as aplicações e usos da matemática (Ponte et. al, 1997, Davis e Hersh, 1995, 1997; Tymoczko, 1986). A título de exemplo, o desenvolvimento e utilização do computador impõe a reflexão sobre o seu papel na matemática contemporânea a vários níveis, como seja a de tornar possível a concretização muitas aplicações matemáticas, com todas as implicações daí derivadas, nomeadamente, em termos de ampliação das possibilidades de aplicação da matemática às ciências físico-naturais, sociais e humanas (Davis e Hersh, 1997; Guzmán, 1995).

A consideração das *praxis* dos matemáticos e da dimensão social da matemática impõe que a filosofia da matemática deixe de encarar esta ciência como um assunto imune a forças exteriores e que assuma uma abordagem holística que atenda, tal como acontece na actual filosofia da ciência (Echeverria, 1999), à prática dos matemáticos, à sua história, aplicações e uso, ao lugar da matemática na cultura humana e a questões de natureza axiológica (Ernest, 1994a). Neste quadro, as perspectivas contemporâneas apontam que a matemática, com as suas especificidades particulares, é uma ciência, a par das outras, metodologicamente plural e que se desenvolve principalmente pela resolução de problemas. A história da matemática mostra que aquilo que hoje conhecemos como uma teoria formal abstracta foi, de um modo geral, originada pela reacção a problemas (muitos deles da vida real, outros internos à própria matemática), que os teoremas hoje aceites permanecem como soluções dos problemas de "ontem", que a demonstração da sua validade é o resultado de muito trabalho e esforço humano e, ainda, revela um passado em que os vários ramos da matemática se interrelacionam e como, ao longo do tempo, essas interrelações se fortaleceram (Grugnetti e Rogers, 2000; Barbin, 1996; van Maanen, 1995). Nesse sentido, se aceitarmos que a resolução de problemas é o âmago da actividade matemática, então é possível sustentar que os conceitos foram criados, modificados e ampliados para dar resposta a problemas e que os teoremas e demonstrações foram descobertos no processo de resolução de problemas (op. cit.).

2.1.2. Valor didáctico da história da matemática

A didáctica é hoje considerada como uma disciplina científica, perfeitamente instituída, com um objecto de estudo bem delimitado, incidente sobre os vários aspectos relacionados com a teoria, a investigação da prática de ensino e aprendizagem e cujas finalidades incidem sobre a melhoria do ensino e aprendizagem e, correlativamente, da formação de professores (Alarcão, 1994; Alarcão, Costa, Araújo e Sá, 1999).

Na opinião de Alarcão (1994), didáctica deve ser perspectivada em termos de três dimensões profundamente interrelacionas: enquanto campo de formação de professores - didáctica curricular; enquanto campo de investigação - investigação em didáctica; e como campo de acção profissional -didáctica da acção profissional. A primeira destas componentes – a didáctica curricular - debruça-se sobre os inúmeros problemas que se colocam na prática docente e, nesse âmbito, as suas fontes de informação são resultantes da investigação em didáctica e da prática em sala de aula que, por sua vez, devem manter entre si uma relação dialéctica (Alarcão, 1994; Alarcão, Costa, Araújo e Sá, 1999). Nesse sentido, a didáctica curricular é interventiva, na medida em que fruto da investigação e da reflexão sobre a acção profissional, visa resolver os problemas que aí se colocam.

Como salienta Alarcão (1994), a investigação em didáctica para "estudar a natureza do processo real, contextualizado, do ensino e aprendizagem (…) busca saberes de referência que recria para a compreensão do problema em questão" (p.725). É precisamente a sua natureza interdiciplinar e integradora de vários saberes, que ilumina o papel mediador desempenhado pelo professor quando, no contexto do processo educativo, tem de estabelecer a relação entre o conhecimento disciplinar e o aluno, de modo a tornar a matéria acessível (Alarcão, Costa, Araújo e Sá, 1999, p. 227). Releva-se assim o contributo para a didáctica do cruzamento de saberes transpostos a partir de outras disciplinas, como as ciências de educação ou a psicologia, entre outras.

A investigação em didáctica centrada na problematização do ensino e aprendizagem de matérias específicas (ciências, matemática, inglês, …) tem vindo não só a adquirir uma importância muito particular nos programas de formação de professores, mas sobretudo ao nível da emergência de campos específicos de investigação e conhecimento. Estão nesta situação, por exemplo, a didáctica das ciências e a didáctica da matemática que, hoje, envolvem uma comunidade de investigadores numerosa, consolidada e profícua que trabalha em numerosas linhas de investigação, ainda que, como disciplinas jovens que são, exista ainda um longo caminho a percorrer até, como afirmam Cachapuz et al. (2001, p. 168), se atingir "uma fase de desenvolvimento científico «normal.

A relevância da didáctica específica quer das ciências quer da matemática está indissociavelmente ligada à necessidade crescente de uma educação científica, matemática e tecnológica para todos e às dificuldades que lhe são inerentes, das quais se destacam o enorme fracasso escolar (manifesto, por exemplo, em estudos como o PISA) e a crescente rejeição que os jovens sentem pelos estudos científicos e a atitude negativa que manifestam face à ciência/matemática, evidenciada por muita investigação (Cachapuz et al., 2001). Esta didáctica emerge assim como um novo campo de conhecimentos "estreitamente ligado à possibilidade de enriquecimento da actividade docente, e uma aprendizagem mais estimulante e satisfatória" (Cachapuz et al., 2001., p.171).

Nesse sentido, nas últimas décadas assistiu-se a várias tentativas de renovação do ensino das ciências/matemática e, concomitantemente, ao desenvolvimento de muita investigação centrada nos múltiplos problemas do seu ensino e aprendizagem (Biehler et al., 1994; Vale, 2000; Cachapuz et al., 2001, 2002). Como salientam vários autores (Biehler et al., 1994; Alarcão, 1994; Vale, 2000, Cachapuz et al., 2001, 2002), muitos desses problemas são também objecto de estudo de muitas outras disciplinas, como, por exemplo, as ciências da educação, a psicologia e a epistemologia e, como tal, a didáctica específica da ciência/matemática só pode fazer um tratamento rigoroso e eficiente dos problemas educativos, se se apropriar (integrar e transpor), de forma fundamentada, de conhecimentos pertinentes de outras áreas disciplinares. Só desse modo, na opinião de Cachapuz et al.(2002, p.37) é possível obter "um todo coerente (quadros teóricos de referência) capaz de tentativamente dar respostas adequadas a problemas de ensino, aprendizagem e formação na sua globalidade concreta". Como referem Biehler et al. (1994, p. 5), a didáctica da matemática sendo uma área do conhecimento onde interactuam diversas ciências vizinhas, para fazer frente aos múltiplos problemas do ensino e aprendizagem da matemática tem ser capaz de explorar o conhecimento disponível nessas áreas e desenvolver e organizar a sua própria abordagem aos problemas.

Em suma, pode afirmar-se que a construção de um corpo próprio de conhecimentos em didáctica da matemática (e também das ciências) é acompanhado da apropriação e integração de conhecimentos adquiridos noutras áreas, nomeadamente os provenientes da própria matemática, da filosofia e história da matemática e da ciência, da psicologia, das ciências da educação, da sociologia do conhecimento e da educação etc.[32] (Biehler et al. , 1994; Biehler, 1994). Nesse sentido, o seu desenvolvimento impõe uma auto-reflexão sistemática (Biehler et al., 1994) e o reforço dos vínculos entre as várias linhas de investigação condição indispensável para uma maior unidade conceptual e metodológica, Cachapuz et. al (2001)

De entre as linhas actuais de investigação, tanto em didáctica da matemática como das ciências, destacam-se as emanadas da actual história e filosofia da matemática/ciência e que compreendem investigações e reflexões sobre inúmeras questões relacionadas, em particular com a relevância da integração da história da matemática e de questões epistemológicas no ensino e aprendizagem (Biehler et al., 1994; Cachapuz et al. (2001). De acordo com Paixão (1998) a história da ciência contemporânea permite fundamentar perspectivas inovadoras de ensino e de (re)orientação didáctica que podem contribuir para uma melhoria considerável da compreensão do saber na sala de aula. De entre as perspectivas fundamentadas na história e filosofia contemporânea da ciência, esta investigadora destaca, em particular: (i) o uso da história da ciência, como forma de apresentar a ciência como uma actividade humana, com forte sentido cultural, social e ético; (ii) a relevância a dar aos problemas e à resolução de problemas, incluindo situações

[32] Cachapuz et al. (2001) reconhecem, por exemplo, a insuficiência de uma formação de professores que separe os conteúdos científicos dos didácticos e evidenciam "a necessidade de um tratamento global, integrado, de problemas específicos que se colocam no processo de ensino/aprendizagem das ciências" (p.158).

problemáticas abertas e capazes de favorecer a realização de investigação por parte dos alunos, na perspectiva de trabalho científico; (iii) as inter - relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS).

Do mesmo modo, a aproximação da filosofia da matemática à filosofia da ciência pós-kuhniana, nomeadamente no que concerne à relevância epistemológica da história e da construção do conhecimento matemático (Hersh, 1994; Otte e Seeger, 1994; Ernest, 1991, 1994a, 1994b, 1998b; Schubring, 1997), tem profundas implicações para a didáctica. Ensinar matemática partindo do pressuposto que o saber matemático "é o produto contingente de forças evolutivas históricas e culturais" e em que sobressai a importância dos problemas para a criação matemática, confronta o professor com problemas que não estão presentes quando se supõe que esse saber é "imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstracto por natureza, que é exterior aos alunos" (Ponte et al., 1997, p. 42). Por outro lado, como é salientado por estes autores, na base das orientações para o ensino da matemática está sempre um conjunto de perspectivas epistemológicas sobre essa disciplina e, como tal, todas as questões acerca do ensino e aprendizagem da disciplina envolvem a reflexão "sobre a natureza da matemática e dos processos de produção do saber matemático" (p.43).

A concepção do saber matemático como produto de um processo histórico, social e cultural, que compreende a existência de diferenças epistemológicas e conceptuais no seu desenvolvimento em culturas e sociedades diferentes, tem como implicação didáctica a consideração de todas essas dimensões no processo de ensino e aprendizagem da matemática (Grugnetti, Rogers et al., p. 61). Quando se considera que "os saberes matemáticos são saberes rectificados, históricos, construídos para resolver problemas postos à humanidade, então o ensino da matemática consiste em pôr o aluno face a problemas" (Barbin, 1994, p. 36). Neste caso, está subjacente a ideia de que saber matemática é sobretudo fazer matemática e, ainda, que aprender matemática é o resultado de uma actividade intelectual e não apenas da aquisição de conhecimentos e destrezas ensinadas pelo professor. Por outro lado, uma vez que a matemática e a sua história não podem ser separadas, a história deve estar presente, de alguma forma, na educação matemática (Heiede, 1993). Ainda que seja possível aprender um conceito, uma estrutura ou uma teoria matemática sem conhecer as motivações, os fenómenos ou os problemas subjacentes à sua construção, vários autores salientam que esse conhecimento histórico pode ser, para muitos alunos, um estímulo para a aprendizagem (van Maanen, 1995; Struik, 1997; Tzanakis e Arcavi, 2000). De igual modo, quando se assume que a matemática permeia e influencia todos os aspectos da vida social e económica e que é influenciada por forças sociais, as influências ao nível da didáctica reflectem-se na aceitação de que as manifestações e usos da matemática são dimensões muito importantes da educação matemática (Ernest, 1994a, 1994b). Destaca-se, assim, como fundamental considerar como dimensões relevantes do processo de ensino e aprendizagem da matemática o seu carácter histórico, social e cultural com os seus aspectos criativos específicos, nos quais sobressai a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (Fauvel, 1991; Otte e Seeger, 1994; Barbin, 1994, 1996; Ernest, 1994a, 1994b; Swetz, 2000b; Grugnetti, 2000a, 200b; Grugnetti e Rogers, 2000).

O estudo *History in mathematics education: the ICMI study,* publicado em 2000 pela *International Commission on Mathematics Instruction* (ICMI), reúne um conjunto incontornável de reflexões, feitas por reputados especialistas em matemática e educação matemática, sobre o papel da história da matemática nas suas muitas dimensões, nomeadamente nas suas relações com o ensino e aprendizagem da matemática, na formação de professores e na investigação sobre a sua integração no ensino. Nesse estudo, Tzanakis & Arcavi (2000), com a colaboração de outros especialistas nesta temática, partem do pressuposto que o uso da história da matemática, em qualquer nível de ensino deve estar sempre dirigido à melhoria das aprendizagens dos alunos e, nesse sentido, discutem várias questões relacionadas com a sua integração no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Assim, argumentam que, do ponto de vista didáctico, a integração da história da matemática no processo educativo pode apoiar, enriquecer e melhorar o ensino da matemática ao nível de cinco grandes domínios: (a) aprendizagem da matemática; (b) desenvolvimento de perspectivas sobre a natureza da matemática e da actividade matemática; (c) desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática; (d) apreciação da matemática como um esforço cultural e humano e (e) formação didáctica dos professores. Passaremos de seguida a discutir cada um deles.

2.1.2.1. Aprendizagem da matemática

Vários autores defendem que uma das funções particularmente relevante da introdução da dimensão histórica no ensino e aprendizagem da matemática é a de poder contribuir para uma aprendizagem significativa e compreensiva da matemática, a partir de um novo ponto de vista e de uma nova abordagem (Furinghetti e Paola, 2003; Man-Keung, 2000; Radford, 1993; Guzmán, 1993; Fauvel, 1991). Desde logo, destacam-se as possibilidades abertas pelo vasto leque de recursos proporcionados pela história, nos quais se incluem episódios, questões, problemas e exemplos relevantes em termos de conteúdo matemático, e que podem ser usados para promover uma compreensão mais profunda de conceitos e teorias matemáticas (Barbin, 2000b; Man-Keung, 2000).

Para além disso, a história oferece inúmeras oportunidades para o estabelecimento de conexões entre diferentes domínios da matemática (Tzanakis e Arcavi, 2000). Isto é, a história surge como um importante recurso didáctico para a unificação de vários domínios matemáticos. Uma boa ilustração desta afirmação é-nos fornecida por Lebesgue (1956, p. 2) ao salientar a profunda ligação no desenvolvimento histórico da Medida, do Número e Geometria:

> Il n'y a pas de sujet plus fondamental: la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'ést-à-dire l'object même de l'Analyse.

Há ainda que destacar o seu contributo para o estabelecimento de outro tipo de conexões. De facto, a história é uma fonte de inúmeros problemas que traduzem aplicações ao quotidiano ou a outras áreas científicas que pode favorecer o estabelecimento de ligações da matemática com outras disciplinas e tornar a sua aprendizagem e mesmo a de outras disciplinas mais significativa (Tzanakis e Arcavi, 2000). Neste âmbito, Grugnetti (2000b) refere, como exemplo, o livro *Liber Abaci,* datado de 1202 e da autoria de Fibonacci (Leonardo de Pisa), que contém um grande número de problemas que potenciam a ligação entre a matemática e outras disciplinas do currículo (Ciências, Geografia, Economia, História). Por exemplo, ao nível da história, os problemas possibilitam a discussão de aspectos relacionados com os desenvolvimentos ocorridos na Idade Média na Europa e no Islão, o que permite também abordar, ao nível da Geografia, questões relacionadas com diferentes espaços físicos identificados na obra (Ocidente, Médio Oriente, mundo islâmico). Finalmente, Grugnetti salienta o contributo da resolução de problemas desta natureza para a aprendizagem da matemática e, em particular, para o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e de raciocínio. Nesse âmbito, defende que o professor, se assim o entender, pode promover a confrontação das estratégias usadas pelos alunos com as antigas propostas de resolução. A confrontação de diferentes processos de resolução abre caminho, na opinião de Barbin (2000a), a um dos aspectos mais importantes da aprendizagem da disciplina: “Only once students become able to compare different strategies (…) can the process of generalisation evolve” (p. 79).

Quando a história é integrada no ensino da matemática com a finalidade específica de potenciar a aprendizagem de conteúdos e processos matemáticos, está-se perante uma abordagem de ensino em que esta surge como um recurso e, simultaneamente, como uma ferramenta de ensino e aprendizagem. Neste caso, requer-se do professor competências em didáctica e em história da matemática (Furinghetti e Paola, 2003; Schubring, 2000; Schubring, 1997), o que remete para a importância de os especialistas conceberem, construírem e disponibilizarem recursos didácticos inspirados na história com o fim de apoiar o ensino e aprendizagem de determinados tópicos (Furinghetti e Paola, 2003).

2.1.2.2. Desenvolvimento de perspectivas sobre a natureza da matemática e da actividade matemática

Um aspecto muito sublinhado pelas mais recentes orientações curriculares para o ensino da matemática prende-se com o desenvolvimento de perspectivas sobre a natureza da matemática e da actividade matemática (ME, 2001; 2007). Como afirma Ernest (1998a) a história desafia o mito de que a matemática é um corpo rígido e imutável de conhecimentos e a sua integração na aula de matemática pode ajudar a modificar as concepções dos alunos sobre a matemática, mostrando-lhes, por exemplo, a importância dos problemas e da resolução de problemas no desenvolvimento do conhecimento matemático e salientando a natureza transdisciplinar da matemática, isto é, a sua relevância em todos os aspectos da vida humana, desde a religião, à política, à arquitectura, à música, à guerra, etc. Também Barbin (1996) defende que a história é um instrumento de consciencialização epistemológica, revelador da natureza da actividade matemática. De entre os argumentos avançados, destaca-se o papel que o conhecimento de questões, problemas e respostas historicamente importantes pode desempenhar para a compreensão de que fazer matemática envolve erros, heurísticas, incertezas, dúvidas, argumentos intuitivos, impasses, controvérsias e abordagens alternativas aos problemas (Tzanakis e Arcavi, 2000). Assim, releva-se o seu contributo para a consciencialização de que a matemática é uma ciência não estática e definitiva, mas sim, em evolução e em que meta-conceitos fundamentais tais como prova, rigor, evidência, erro, … possuem um carácter de dependência temporal (Tzanakis e Arcavi, 2000). Aponta-se, deste modo, que um dos contributos possíveis da história no processo de ensino e aprendizagem se relaciona com a construção de uma visão sobre a natureza da matemática mais consentânea com as perspectivas actuais (Barbin, 2000b). Na opinião de Tzanakis e Arcavi (op. cit.), os alunos poderão através da história, adquirir uma ideia mais ampla do que é a matemática, perceber que a matemática não é um assunto rígido, mas sim algo que se desenvolveu ao longo dos séculos de uma forma não linear, que todas as civilizações deram contribuições importantes e isso torná-los-á cidadãos melhores, capazes de respeitar as culturas diferentes da sua.

Por outro lado, a história mostra a existência de uma profunda interrelação entre diferentes vários ramos da matemática, que a matemática elementar foi construída pela humanidade como resposta a problemas matemáticos e também da vida real (Grugnetti e Rogers, 2000). Muitos desses problemas "were not only mathematics but also indistinguishable from other disciplines to such an extent that it is often not clear whether practical or theoretical problems motivate the development of one or the other" (op. cit., p. 52). Como salientam Furinghetti e Somaglia (1998) um dos problemas do ensino reside na fragmentação do conhecimento que, fruto da organização tradicional do currículo em disciplinas, faz com que os assuntos escolares sejam ensinados separadamente uns dos outros. Essa realidade é ainda mais marcante no caso da matemática na medida em que é tendencialmente ensinada desligada do seu contexto cultural, o que contribui para o desenvolvimento de uma visão da matemática muito pobre. Assim, preconizam que a história da matemática pode ajudar os alunos a perceber a génese das ideias matemáticas e as conexões entre as várias disciplinas e a integrar a cultura transmitida na escola num corpo homogéneo de conhecimento (op. cit, p. 48).

Ou seja, a história da matemática, ao permitir revelar e salientar as conexões intra-matemáticas, permite aprofundar a compreensão de diferentes tópicos e perceber a matemática como um corpo de conhecimentos não fragmentado. Paralelamente, abre uma porta para a concretização de ligações entre a matemática e outras disciplinas do currículo, isto é, para a interdisciplinaridade (Grugnetti e Rogers 2000; Furinghetti e Somaglia, 1998; Otto e Seeger, 1994; Fauvel, 1991). Nesse campo, embora exista, por exemplo, alguma tradição no estabelecimento de ligações com a Física, na opinião de Grugnetti e Rogers (2000), estas, em geral, não ocorrem de uma forma sistemática e organizada sendo, frequentemente, iniciativas isoladas e tendencialmente unidireccionais. Nesse sentido, recomendam que quando se estabelecem ligações da matemática com outras disciplinas do currículo, de um ponto de vista interdisciplinar essas conexões não devem ser vistas numa só direcção pois só assim se pode enriquecer a compreensão dos alunos sobre a matemática e sobre as outras disciplinas (Grugnetti e Rogers, 2000).

> When mathematics as linked with other subjects, the connections must be seen not only in one direction. Students find their understanding both of mathematics and their other subjects enriched, trough the historical liaison, sympathies and mutual aid between the subjects (p.53).

Neste âmbito, Furinghetti e Somaglia (1998) referem alguns estudos desenvolvidos em sala de aula com alunos de vários níveis de ensino não superior (com idades entre 12 e 18 anos), cujos resultados apoiam a ideia de que a história da matemática é um elemento-chave para envolver colaborativamente professores de diferentes áreas disciplinares (Matemática, Física, Arte, Economia, Política, Filosofia, Línguas, etc). Um dos aspectos assinalado pelos professores foi a possibilidade de trabalharem verdadeiramente em conjunto, definindo objectivos comuns e formas de os alcançar.

Estes aspectos tornam-se particularmente pertinentes ao nível da formação de professores, sobretudo se tivermos em conta que a ideia tradicional de que a matemática se desenvolve cumulativamente está definitivamente posta em causa (Grugnetti, 2000). “The awareness of this evolutionary aspect of mathematics can make a teacher more patient, less dogmatic, more humane, less pedantic” (Man-Keung, 2000, p. 59) e sensibilizá-lo para a promoção de uma aprendizagem que desenvolva nos alunos uma atitude crítica acerca do conhecimento (Grugnetti, 2000).

2.1.2.3. Desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática

A importância das atitudes em relação à matemática é hoje amplamente aceite por todos os que se dedicam à educação matemática, pelo reconhecimento de que os sentimentos do aluno, o gostar ou não gostar, a satisfação ou falta dela, a confiança ou não em envolver-se em actividades que envolvam a matemática, reflectem-se no maior ou menor sucesso do aluno. Nesse sentido, aceitando-se que uma atitude positiva conduz, frequentemente, a um maior esforço e a um maior êxito em matemática, um dos objectivos comuns e transversais a todos os níveis de ensino relaciona-se precisamente com o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática (Ernest, 2000). É certo que as atitudes não podem ser directamente ensinadas, porém estas são o resultado indirecto das experiências de aprendizagem dos alunos ao longo dos anos e, nesse sentido, vários autores defendem que a história da matemática pode ter um papel decisivo no desenvolvimento do entusiasmo e interesse intelectual pela disciplina (Fauvel, 1991, Ernest, 1998a; Tzanakis e Arcavi, 2000; Barbin, 2000b). Por exemplo, Fauvel (1991) destaca que os alunos podem sentir um certo conforto ao perceber que não são os únicos a sentir dificuldades e a confrontar-se com obstáculos. O mesmo argumento é avançado por Tzanakis e Arcavi (2000), para quem dar a perceber a matemática como produto do esforço intelectual humano, no qual sobressai a formulação de questões, a persistência, a realização de investigações, o desenvolvimento de pensamento criativo, mas também falhas, erros, incertezas, contribui para a humanização e desmistificação da disciplina e, como tal, pode contribuir para o desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à disciplina. Todos estes argumentos são compatíveis com as finalidades assumidas nos mais recentes documentos curriculares portugueses, nomeadamente para o ensino básico. Por exemplo, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) enuncia-se como uma das duas finalidades do ensino básico o desenvolvimento de atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciência, explicitando-se, entre outros aspectos, que a sua consecução inclui "o desenvolvimento nos alunos da compreensão da matemática como elemento da cultura humana incluindo aspectos da sua história" (ME, 2007, p.3).

A potencial motivação para a aprendizagem que a componente histórica pode aportar ao ensino da matemática é rebatida por Schubring (1997) que defende que não é certo que a abordagem histórica contribua para aumentar o interesse dos alunos e para despertar a sua motivação para a aprendizagem, pois "nas culturas das sociedades mais desenvolvidas economicamente parecem não predominar mais os valores do historicismo" (p. 157). Fauvel (1991) também sugere que se os alunos não tiverem noções históricas e sentido do passado, corre-se o risco do seu uso não ser bem sucedido.

2.1.2.4. Apreciação da matemática como um esforço cultural e humano

A apreciação da matemática envolve alguma consciência do que é a matemática como um todo (o aspecto interno), bem como alguma compreensão do seu valor e papel na sociedade (o aspecto externo) (Ernest, 2000). Esta apreciação exterior remete para a consciencialização de que esta ciência é um elemento central da história humana, social e cultural. De acordo com Ernest (op. cit), o ensino tradicional tende a transmitir uma imagem da matemática como um mala de ferramentas, um conjunto de destrezas básicas, principalmente aritméticas, a serem usadas quando necessárias, descurando aspectos como: (i) o papel da matemática na vida quotidiana; (ii) os usos sociais da matemática para a comunicação e persuasão; (iii) a história da matemática e como é que os símbolos, conceitos e problemas matemáticos se desenvolveram; (iv) o papel da matemática nas várias culturas, na arte e em todas as disciplinas escolares.

A face humana da matemática transmitida pela história é outro dos argumentos encontrados em muitos estudos e reflexões sobre o uso da história da matemática na educação matemática (Fauvel, 1991; Rickey 1996; Davis e Hersh, 1995; Avital, 1995; Otte e Seeger, 1994; Winicki, 2000; Tzanakis e Arcavi, 2000). Nas palavras de Ferreira (1997) "a história em sala de aula mostra como a matemática foi construída pelo homem através dos tempos e como as suas dificuldades foram sendo superadas e ainda o são" (p. 154), isto é, que a matemática é fruto de um processo intelectual em desenvolvimento contínuo que envolve vicissitudes, revoluções e marcos decisivos e que está estreitamente relacionada com outras ciências, culturas e sociedades. Assim, a história pode contribuir para que o aluno se torne um cidadão mais tolerante e aberto relativamente a outras culturas que não a sua e, se não forem esquecidos episódios relevantes do seu próprio país, a história também pode contribuir para a auto-estima do aluno como cidadão do seu país (Cavalho e Silva, 1997).

Jones (1995) lembra que mostrar aos alunos que grandes matemáticos assumiram dificuldades em compreender certos assuntos, cometeram erros, recorreram a métodos diversificados e vibraram com as suas criações, pode humanizar a disciplina e torná-la mais acessível e atraente. Desse modo, acrescenta que dar a conhecer aos alunos que muitos avanços da matemática resultaram de induções, de analogias e de conjecturas frequentemente incompletas e, por vezes mesmo incorrectas deve ser um dos grandes objectos do ensino. Do mesmo modo, Barbin (2000b) defende que, através da história, é possível encontrar o significado do conhecimento matemático, descobrir para que serve e que problemas esse conhecimento pode ajudar a resolver. Na opinião desta investigadora, todos esses aspectos podem contribuir para melhorar a imagem que alunos e professores têm da matemática e, consequentemente, incrementar a sua apreciação e valorização.

Outros autores (e.g. Chandrasekhar, 1987; Kragh, 1990; Tzanakis, 1997 *in* Tzanakis, Arcavi et al., 2000, p. 207) acrescentam que o estudo detalhado de exemplos históricos permite observar que na base do desenvolvimento interno da matemática não estão apenas razões utilitárias (um ponto de vista prevalecente), mas também outras motivações de natureza estética, puramente intelectual ou recreativa e que esse desenvolvimento foi influenciado ou mesmo determinado por factores sociais e culturais.

Em Portugal, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* aponta-se que o recurso à história da matemática pode contribuir para o desenvolvimento da apreciação da matemática. Por exemplo, ao nível da formulação e clarificação dos objectivos gerais do ensino da matemática pode ler-se que a capacidade de apreciar a matemática inclui "mostrar conhecimento da história da matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea" (p. 6). Nesse sentido, recomenda-se que sejam proporcionadas oportunidades aos alunos de contactar com aspectos da história da matemática que proporcionem uma visão dinâmica sobre a matemática e o seu papel na sociedade (p. 10).

2.1.2.5. Formação didáctica dos professores

Como já foi discutido, o recurso à história na educação matemática pode reflectir-se a vários níveis: aprendizagem da matemática, desenvolvimento de perspectivas sobre a natureza da matemática e da actividade matemática, apreciação da matemática como um esforço cultural e humano e desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática (Tzanakis, Arcavi et al., 2000). Nesse sentido, a importância da sua inclusão na formação de professores de matemática de qualquer nível de ensino parece ser inquestionável. Porém, há que destacar um valor acrescido para a sua integração na formação de professores e que se prende com o papel do conhecimento histórico para o conhecimento didáctico do professor.

Portanto, a reflexão sobre o papel da história da matemática na formação de professores deve incidir nas suas implicações para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Com base numa análise comparativa das razões apontadas para a inclusão da componente histórica na formação inicial e contínua de professores, em várias instituições de formação de professores de diferentes países, Schubring et al. (2000, p. 110), destacam as seguintes:

1. facultar aos professores o conhecimento do passado da matemática (ensino directo da história da matemática);
2. aprofundar a compreensão dos professores sobre a matemática que vão ensinar (função metodológica e epistemológica);
3. munir os professores com métodos e técnicas de incorporação de material histórico no processo de ensino (função didáctica);
4. aprofundar a compreensão dos professores sobre a evolução da sua profissão e dos currículos (ensino da história do ensino da matemática).

As três primeiras, pela sua natureza, estão profundamente interrelacionadas, remetendo para a discussão de como é que o conhecimento e a compreensão do desenvolvimento da matemática pode contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Nesse sentido, defende-se que o estudo de situações que salientem as motivações por detrás da criação de um novo conceito ou teoria pode reflectir-se na prática pedagógica do professor a vários níveis. Em primeiro lugar, pode aumentar o entusiasmo dos professores pela disciplina e promover o sentido da sua importância e poder (Kleiner, 1996, p. 261) e, nesse sentido, pode reflectir-se numa mudança da percepção e da compreensão que o professor tem da matemática, influenciando a forma como ensina, quer o elemento histórico esteja ou não explicitamente presente em sala de aula (Barbin, 2000a, 1996). Em particular, o conhecimento histórico, ao permitir uma visão mais alargada da evolução das ideias matemáticas, facilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tópicos do programa (Carvalho e Silva, 1997). De facto, a investigação sugere que os professores de matemática que, em algum momento da sua profissão, se interessaram pelo estudo da história da sua disciplina viveram uma mudança profunda na forma como encaram as questões epistemológicas. Estas conclusões são sustentadas por Barbin (1996) que, apoiada em resultados de investigações conduzidas com professores, refere que estes reconhecem frequentemente que a compreensão matemática adquirida através do estudo da história influencia o seu ensino ou, pelo menos, a forma como encaram a matemática: "A study of the story of mathematics profoundly changes the epistemological concepts of mathematical knowledge: that the introduction of the story of mathematics will transform the practice of teaching mathematics" (op. cit, p.17).

Assim, a percepção da matemática como uma parte integrante da cultura humana torna-se particularmente relevante ao nível da formação de professores, na medida em que os professores têm a grande responsabilidade de transmitir aos alunos essa imagem e a investigação tem demonstrado que isso influencia a forma como ensinam matemática (Winicki, 2000). Esta opinião é apoiada pelos resultados de nove estudos de caso relativos à integração (explícita ou implícita) da história da matemática em aulas do ensino secundário francês que permitiram inferir que o conhecimento histórico, ao enriquecer a cultura matemática dos professores, conduz a mudanças efectivas nas atitudes dos professores em relação ao ensino da matemática e à forma como concebem a matemática, reflectindo-se no modo como se ensina e se encara o papel do aluno (Barbin, 2000a).

Conhecer as motivações por detrás do assunto que se ensina pode repercutir-se não só na forma como se introduz o mesmo, em sala de aula, como também na formulação das questões dirigidas aos alunos, nos exemplos apresentados ou nos problemas propostos, numa maior sensibilidade para os erros cometidos pelos alunos e para as dificuldades ou obstáculos de aprendizagem (Avital, 1995; Tzanakis, 1996; Tzanakis e Arcavi, 2000; Barbin, 1994, 1996, 2000a; Bruckheimer e Arcavi, 2000; Katz et al., 2000). Argumentando no mesmo sentido, Carvalho e Silva (1997) acrescenta que o conhecimento da história da sua disciplina proporciona uma grande possibilidade de escolha de exemplos concretos a que o professor poderá recorrer, se sentir que isso desperta o interesse ou a motivação dos alunos.

De acordo com Avital (1995), o conhecimento histórico repercute-se em quatro áreas específicas da didáctica. A primeira relaciona-se com o desenvolvimento de uma maior sensibilidade e compreensão relativamente às dificuldades de aprendizagem dos alunos, na medida em que é possível identificar alguma similitude entre essas dificuldades e as ocorridas no desenvolvimento histórico. A segunda tem a ver com a percepção de que a generalização é, em geral, a última etapa da construção do conhecimento matemático e, como tal, a abordagem aos assuntos deve começar por privilegiar exemplos específicos e heurísticas: “A generalization that comes before examples is usually lost on us, and to many the loss may be so great that the subsequent examples cannot make up for it” (op. cit., p. 6). A terceira tem a ver com a percepção de que a resolução e da formulação de problemas, cerne da actividade matemática, são actividades fundamentais da aprendizagem da matemática. Finalmente, aponta-se que o conhecimento histórico pode não só sensibilizar os professores para uma maior atenção a factores emocionais e afectivos na aprendizagem da matemática, como também consciencializá-los para a importância da introdução em sala de aula da dimensão social e humana da actividade matemática. Esta valorização do papel metodológico da história da matemática estende-se ao desenvolvimento do meta-saber dos professores, na medida em que pode desempenhar um papel orientador da organização dos conteúdos para as aulas e, em sala de aula, facilitador da integração e interpretação das intervenções dos alunos (Schunbring, 1997). O conhecimento histórico surge, assim, como um importante recurso didáctico para a promoção de aprendizagens mais efectivas e significativas.

Nesse campo, Bruckheimer e Arcavi (2000) descrevem um programa de formação desenvolvido inicialmente no âmbito da formação contínua e que foi, mais tarde, alargado à formação inicial, no qual pretendem proporcionar aos participantes as bases da história de alguns tópicos da matemática escolar (abrangem professores do equivalente ao 3º CEB português). Nesse sentido, elaboraram um conjunto de folhas de trabalho centradas em tópicos curriculares dos níveis de ensino dos professores e estruturadas em torno de pequenos extractos históricos (fontes primárias), precedidas de um enquadramento e algumas informações históricas, seguidos de um conjunto de questões, visando não só garantir a compreensão dos excertos (tendo em conta que estes envolvem, em geral, linguagem e notação não familiares ou mesmo ausência de notações simbólicas), como também a discussão das questões matemáticas envolvidas. Deste modo, o objectivo primeiro da formação é aprofundar a compreensão do tópico, ainda que, como referem, também estejam implícitos objectivos didácticos. De facto, argumentam que através da história é possível viabilizar a discussão de diferentes abordagens de um tópico e consciencializar os professores para possíveis dificuldades dos alunos (muitas delas similares às encontradas na história). Acrescentam que o trabalho com fontes primárias permite também sensibilizar o professor para diferentes modos de pensar e comunicar em matemática, o que também tem reflexos ao nível da didáctica. Dos resultados da experiência, Bruckheimer e Arcavi retiram como principais conclusões: (a) que os professores têm uma visão da matemática e da sua evolução muito ligada à organização curricular e às suas práticas de ensino, o que se repercute, por exemplo, na propensão de ensinar primeiro as definições e, de seguida, exercitá-las e, nesse sentido, salienta-se o contributo da formação para o desenvolvimento de uma visão mais apropriada da matemática e da actividade matemática; (b) que os participantes desenvolveram uma maior sensibilidade e abertura em relação a formas particulares de fazer e comunicar matemática.

Embora exista uma ampla variedade de possibilidades de integrar a componente histórica de modo a enriquecer o ensino e aprendizagem da matemática em qualquer nível de ensino, as possibilidades e os desafios que essa integração coloca aos professores são muito diferentes consoante se trate de professores dos primeiros anos de escolaridade ou dos anos terminais do ensino secundário, sendo escassa a possibilidade de partilha de experiências (Fauvel, 1991). Deste modo, a consciencialização das exigências colocadas ao professor e das dificuldades inerentes ao processo de integração da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática é, na opinião de muitos autores, um aspecto a ter em conta nos programas de formação de professores e que tem sido muito subestimada (Furinghetti, 1996; Fauvel, 1991). Como é salientado por Fauvel (1991):

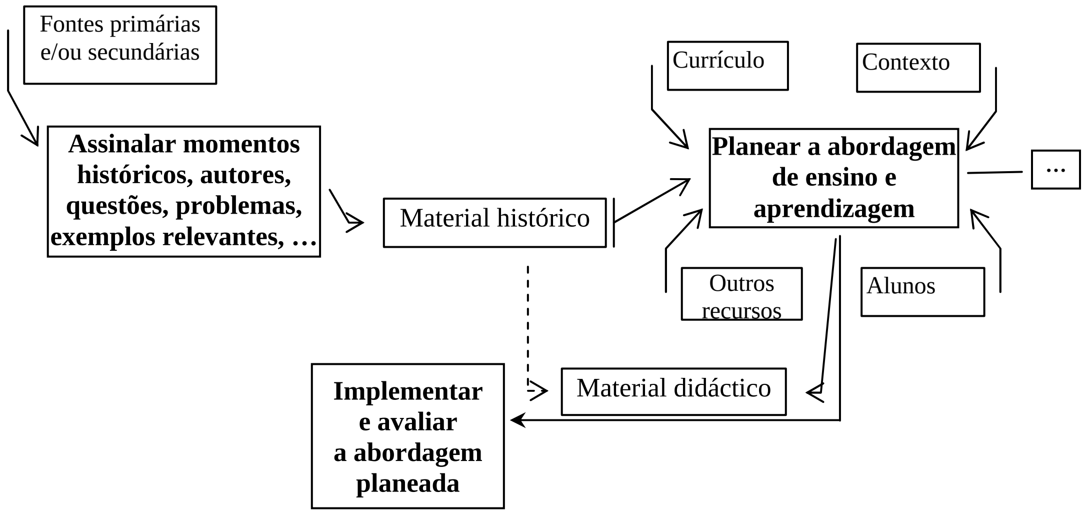
> Usar a história é difícil (…) para os professores que nos seus estudos aprenderam pouco ou nada de história da matemática e foram deixados sozinhos sem terem recebido qualquer formação de como usá-la com os seus alunos (…) Até ao dia em que toda a formação de professores inclua tanto a história da matemática, como o treino das suas formas de utilização na aula, de acordo com os diferentes temas e com os níveis de capacidade dos seus alunos, os professores irão, compreensivelmente, encarar esta área com pouco à vontade, com receio de não saberem o suficiente e de não terem acesso aos materiais convenientes para tornarem essa abordagem mais fácil ou, simplesmente, possível (p. 19).

As considerações anteriores remetem para alguns aspectos críticos da integração da história no processo de ensino e aprendizagem. Relativamente à sua integração explícita há que ter presente que se corre o risco de o professor, ao sublinhar aspectos históricos, subalternize a abordagem matemática (Menghini, 2000), pelo que se requer uma avaliação cuidadosa da relevância didáctica, cultural e motivacional da sua integração que atenda à idade e ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos (Barbin, 2000b). Outro aspecto crítico prende-se com a selecção do material histórico e com a sua transformação em material didáctico (Radford, 1993; van Maanen, 1995). Efectivamente, integrar a história da matemática no processo de ensino e aprendizagem da disciplina requer um trabalho integrado em várias áreas e que o professor dificilmente pode levar a cabo sozinho (Furinghetti e Paola, 2003), pois não existe uma transferência directa da história para o ensino, sendo, portanto, necessário a confrontação cuidadosa entre as situações didáctica e histórica, entrando em linha de conta com as condições e constrangimentos próprios dos ambientes histórico e de sala de aula (Katz et al., 2000). Também Radford (1993) destaca a necessidade de o professor possuir conhecimento histórico que lhe permita identificar e encontrar os episódios históricos mais interessantes e relevantes e, ainda, o facto de, após essa etapa, o professor ter de tomar decisões sobre a forma como vai integrar a história no seu ensino. Este investigador salienta a delicadeza e a complexidade do trabalho de «adaptar» e «manipular» antigos episódios da matemática de modo a torná-los um instrumento genuíno e fecundo para promover a aprendizagem dos alunos.

Se atendermos a que os livros de história da matemática se revelam frequentemente insuficientes e que é reduzido o número de recursos desenvolvidos com finalidades didácticas (ainda que exista alguma investigação neste campo, a divulgação dos materiais produzidos é escassa), conclui-se que conceber tarefas e materiais integrando a história da matemática requer do professor competências em várias áreas, nas quais se incluem, em particular, a matemática, a história da matemática e a didáctica. De facto, o desenvolvimento de tais tarefas exige que o professor seja capaz de: (a) pesquisar textos de história da matemática e/ou livros antigos de matemática (por exemplo, consultar fontes originais) (b) destacar momentos/autores históricos apropriados ao nível de ensino; (c) preparar materiais didácticos para usar na sala de aula; (e) implementar e avaliar as actividades matemáticas desenvolvidas (Grugnetti, 2000; Furinghetti e Paola, 2003). Todos esse aspectos são referidos por Kool (1993) a propósito de uma experiência de ensino da matemática através de problemas históricos em que esteve envolvida. Na reflexão sobre o trabalho desenvolvido salienta que encontrar "a suitable piece of historical material is only step one" (p. 215). Ultrapassada essa etapa e escolhidos os problemas, há que procurar a resposta a muitas questões de índole didáctica: Como é que posso usar isto com os alunos e em que momento? Que apoio lhes devo dar para a resolução do problema? Quero que os alunos o resolvam de um modo específico? Que questões posso colocar a partir do problema? Que conexões se podem estabelecer? Devo confrontar os alunos só com o problema ou também com a solução original? Devo pedir-lhes que estudem o processo de resolução original e que o comparem com o seu próprio processo?

Em função do exposto, procurou esquematizar-se na figura 2.1 as várias etapas do processo de integração da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática, destacando-se os diferentes tipos de materiais requeridos: material histórico (fontes primárias e secundárias) e materiais didácticos concebidos com base nos primeiros para uma abordagem inspirada na história.

Figura 2.1. Etapas para a integração da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática[33]



Cientes de que a introdução da história da matemática nos programa de formação ou de que facultar sequências de ensino já prontas para implementação na sala de aula não é suficiente para garantir o sucesso da sua integração em sala de aula, Furinghetti e Paola (2003) preconizam a criação de condições para que os professores possam ter oportunidade de fazer as suas escolhas e envolverem-se de forma activa em todas as fases do processo da sua integração no ensino e aprendizagem da matemática. Nesse sentido, começam por defender o desenvolvimento, por especialistas, de materiais históricos que possam servir de suporte ao trabalho do professor e apresentam como exemplo, um conjunto de materiais por si desenvolvidos e tornados acessíveis aos professores através de um CD-ROM. Estes materiais, destinados a apoiar a abordagem do tema "Probabilidades" no ensino

[33] Adaptado de Tzanakis e Arcavi (2000) e Furinghetti e Paola (2003).

secundário, incluem materiais históricos (excertos e ilustrações originais retirados de antigos livros e de tratados de história da matemática) e artigos descrevendo e discutindo uma experiência bem sucedida de introdução da história do tema em sala de aula (directamente relacionada com os materiais incluídos no CD) e, ainda, artigos em que historiadores profissionais apresentam e discutem pontos cruciais do desenvolvimento do tema. A inclusão do relato de uma experiência de ensino baseada no uso dos materiais apresentados e da discussão de questões didácticas (papel do professor, dos alunos, da gestão da aula, etc.) é considerado um aspecto crucial do CD. As autoras, baseadas na sua experiência pessoal como professoras e investigadoras, são de opinião que este é um modelo com potencialidades que interessa explorar e desenvolver com professores.

Isto é, proporcionar aos professores a oportunidade de estudar história da matemática e de se envolver na reconstrução didáctica apropriada de aspectos do desenvolvimento histórico de um tópico pode ter muitas implicações ao nível do seu conhecimento didáctico.

Na medida em que a investigação tem salientado a existência de uma relação forte entre as experiências de aprendizagem vividas pelo futuro professor e a forma como ensina matemática, Avital (1995) defende que formar professores para um uso da história no processo de ensino que contribua para uma aprendizagem mais significativa passa por expor os futuros professores a abordagens que este possa aplicar de forma directa no seu próprio ensino. Nesse sentido, a formação deve articular resultados de investigação em educação matemática e em história da matemática:

> We have to isolate problems encountered in the teaching and learning of mathematics (…) and then point out developments in the history of mathematics which can help the teacher better understand and cope with these problems" (ob. cit, p. 3).

Neste contexto, defendem que o recurso a problemas históricos na formação incial de professors se torna particularmente relevante: "The seeking out and employing historical mathematical problems in classroom instruction is a rewarding and enriching experience of which all mathematics teachers should partake" (op.cit., p. 33).

Como já foi referido, a aproximação cultural à matemática, propiciada pela história da matemática, revela esta ciência como um produto da actividade humana ligada a muitas outras áreas do saber e pode favorecer a concretização da interdisciplinaridade (Barbin, 1994; Grugnetti, 2000a; Swetz, 2000b). Michalowicz (2000) referindo-se, em particular, à formação de professores generalistas para a escolaridade básica, salienta o potencial da formação em história da matemática para a concretização de um ensino da matemática mais significativo e articulado. Argumenta que quando esses professores têm a oportunidade de perceber como é que a matemática pode ser conectada com outras áreas do currículo como a História, Geografia ou mesmo com as línguas, a aritmética pode começar a assumir um papel mais significativo na sala de aula (op. cit., p. 173).

Complementarmente, Bruckheimer e Arcavi (2000), investigadores com uma larga experiência na integração da história da matemática na formação de professores (em particular, de professores da escolaridade básica) defendem que esta deve ser motivadora e relevante para os participantes e, como tal, deve incidir em tópicos curriculares centrais e ter potenciais aplicações na sala de aula dos níveis de ensino onde é suposto os docentes exercerem a docência. Deste modo, não só se aprofunda a compreensão dos participantes e se detectam possíveis concepções alternativas relativamente a esses tópicos como, ao nível da didáctica, se podem discutir diferentes abordagens do tópico e consciencializar os futuros professores para erros e dificuldades dos alunos. A necessidade de uma formação que ajude os professores a estabelecer conexões da história da matemática com a matemática escolar é também assumida por Michalowicz (2000) que, simultaneamente, lembra o papel importante que a formação na componente matemática desempenha para a compreensão da história da matemática. Esta autora, que defende a introdução da história da matemática a partir dos primeiros anos de escolaridade pelas potencialidades que lhe reconhece, em particular, no desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática, preconiza como desejável que todas as instituições formadoras de professores facultem formação para o uso didáctico da história da matemática, o que deve incluir questões relacionadas com o acesso a recursos didácticos inspirados na história.

É também de ressaltar que os documentos mais recentes do NCATE[34] (em parceria com o NCTM[35]) para a acreditação dos currículos de formação de professores de matemática explicitam que um dos indicadores do conhecimento de conteúdo matemático de que as instituições de formação de professores devem fazer prova para a creditação dos seus programas de formação incide sobre o desenvolvimento de conhecimento histórico de

[34] National Council of Accreditation of Teachers Education.
[35] National Council of Teachers of Mathematics.

áreas específicas da matemática, no qual se inclui o conhecimento das contribuições de várias culturas (NCTM-NCATE, 2003a, 2003b, 2003c).

Assim, reveste-se de particular importância o desenvolvimento e a certificação, através da investigação, de materiais didácticos de diferente natureza, construídos a partir de fontes primárias e/ou secundárias, visando uma abordagem de tópicos matemáticos inspirada na história.

2.2. A Literacia Matemática como Finalidade Primordial da Educação Matemática

As perspectivas sobre a matemática, discutidas anteriormente, conduziram a uma mudança de perspectiva relativamente ao que são consideradas as grandes finalidades do ensino da matemática em todos os níveis de ensino. Essa é a posição assumida nos mais recentes documentos de orientação curricular portugueses e internacionais. Por exemplo, em Portugal a publicação, em 2001, do documento *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*[36] (ME, 2001) introduziu modificações curriculares muito significativas. Em primeiro lugar, há que destacar o reconhecimento de que o ensino e aprendizagem da disciplina no ensino básico deve permitir ao aluno "contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e natureza" (op. cit., p. 57). Para além da ênfase que é dada à compreensão da natureza e do papel da matemática, salienta-se como outra grande finalidade "desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a auto-confiança necessária para fazê-lo" (op. cit., p. 57). Estas finalidades foram alvo de alguma reformulação e clarificação no processo de reajustamento dos programas de matemática dos 1º, 2º e 3º ciclos e que conduziu à elaboração de um documento único - *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) - para os três ciclos do ensino básico. Neste Programa esclarece-se que a capacidade de apreciar a matemática inclui, entre outros aspectos, o desenvolvimento da "compreensão da matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua

[36] Trata-se de um documento que "enquadra os programas escolares em vigor (…) e um guia à luz do qual se procederá a uma reformulação geral desses programas" (ME, 2001, p. 3), o que veio a acontecer em 2007.

história" e a "capacidade de reconhecer e valorizar o papel da matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico" (op. cit., p. 3). Relativamente à segunda grande finalidade, reforça-se a importância de promover conjuntamente "a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática" e "o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados [matemáticos e não matemáticos]" (op. cit, 3).

Em súmula, preconiza-se uma educação básica em matemática que permita ao aluno adquirir e compreender conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos, bem como a capacidade mobilizar e utilizar (com sucesso) esse conhecimento na análise, interpretação e resolução de inúmeras situações da sua vida escolar (nas diferentes disciplinas) e não escolar (na vida pessoal, em sociedade ou profissional). Paralelamente, põe-se também a tónica na importância de promover o desenvolvimento de uma visão adequada da matemática e da actividade matemática, bem como da sua relevância social e cultural e do seu papel no desenvolvimento científico e tecnológico (op. cit, p. 3).

Como referem Kafai e Gilliland-Swetland (2001), os alunos necessitam de compreender conceitos, ideias e procedimentos chave da matemática, mas também como é que o conhecimento matemático é aplicado no mundo que os rodeia e ainda conhecer os contextos sociais e culturais nos quais se processa o desenvolvimento da matemática. De facto, se tivermos em conta que vivemos numa sociedade em mudança, mudança essa, por vezes, vertiginosa e que se reflecte no exercício de um largo espectro de profissões e de actividades e na vida privada e social dos cidadãos, a matemática não pode deixar de ser considerada como um instrumento incontornável na vida social contemporânea (de Lange, 2003; Schoenfeld, 2001; Davis e Hersh, 1995, 1997; Guzmán, 1993). Daí que uma das grandes finalidades da educação em matemática deve ser a de preparar os jovens para actuarem de forma conhecedora e confiante em situações problemáticas do mundo real (OCDE, 2003, 2004; Rico, 2006).

Deste modo, sobressai a ideia de que a educação em matemática se deseja orientada pelas três dimensões que foram teorizadas e desenvolvidas por Hodson (1992) e que aqui adaptamos à matemática[37]: *aprender matemática*, *aprender sobre matemática* e *fazer*

[37] Aliás, esta é a perspectiva assumida em Portugal relativamente à educação matemática que deve ser proporcionada a todos os jovens que frequentam o ensino básico: "a matemática para todos não deve

matemática. A primeira destas dimensões - aprender matemática - respeita à aquisição de conhecimento conceptual e à familiarização com tópicos de áreas centrais da matemática[38], o que envolve o conhecimento de conceitos e procedimentos e das conexões entre eles e ainda a capacidade de articular os significados e princípios subjacentes às ideias matemáticas (aspectos também apontados pelo NCRTL[39], 1992). Aprender sobre matemática refere-se ao desenvolvimento de alguma compreensão sobre a natureza e os métodos da matemática enquanto disciplina científica, isto é, saber, por exemplo, como é que as respostas podem ser verificadas ou as conjecturas provadas, saber qual é o papel das definições, o que é que é considerado um raciocínio válido, etc. (op. cit.). Esta dimensão inclui também conhecimentos acerca dos usos e origens da matemática, ou seja da sua história (Hodson, 1992). Finalmente, a última dimensão – fazer matemática - refere-se ao envolvimento e desenvolvimento de actividades matemáticas genuínas, cujo entendimento está intimamente relacionado com a assunção de uma determinada perspectiva epistemológica relativamente à matemática e aos processos de produção matemática (Ponte et al., 1997). Como alertam Cachapuz et al. (2002, p. 441), é preciso ter presente que o nível de aprofundamento das três dimensões referidas (aprender matemática, aprender sobre matemática e fazer matemática) deve atender às finalidades da formação, ou seja, uma educação matemática para a cidadania é necessariamente diferente da formação de futuros especialistas em matemática. De igual modo, salientam que no âmbito do ensino formal, o nível de aprofundamento da tríade de Hodson não é necessariamente o mesmo para os diferentes níveis de ensino.

Nesse sentido, as perspectivas contemporâneas da filosofia da matemática, discutidas anteriormente, resumem alguns aspectos consensuais relativamente ao que significa aprender sobre e fazer matemática. Relativamente a esta última dimensão, tendo presente que a actividade matemática inclui múltiplas vertentes, destaca-se, em particular, resolver problemas, raciocinar matematicamente, comunicar em matemática, fazer e testar conjecturas, fazer generalizações, etc.

---

identificar-se com o ensino de um certo número de conteúdos matemáticos específicos, mas sim com a promoção de uma educação em matemática, sobre matemática e através da matemática" (ME, 2001, p. 59).

[38] Referimo-nos, por exemplo, a áreas que fazem parte dos currículos de Matemática nos ensinos básico e secundário.

[39] National Council for Research on Teacher Learning.

Do exposto, quando pensamos na matemática enquanto objecto de ensino e aprendizagem, a principal responsabilidade da educação matemática, em todos os níveis de ensino, deve incidir no desenvolvimento da literacia matemática[40] (Niss, 2003b), até porque "reconhecer a importância da literacia matemática resume-se apenas em querermos ensinar matemática no nosso tempo virados para o futuro" (Carvalho e Silva, 2002, p.18).

Já tivemos ocasião de referir anteriormente que no estudo internacional PISA direccionado para a avaliação da literacia matemática de jovens de 15 anos, esta noção é entendida como "a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo" (ME-GAVE, 2004a, p. 7). Na opinião de Rico[41] (2005, p. 15), a escolha do termo *literacia matemática* no PISA prendeu-se com a necessidade de sublinhar e realçar que o foco da avaliação não incide sobre conhecimentos isolados mas que recai sobre a utilização do conhecimento matemático em diferentes contextos, por meios reflexivos, variados e baseados em competências e capacidade pessoais. De facto, a resolução de inúmeras situações do mundo real exige do indivíduo a capacidade de utilizar o seu conhecimento matemático e de mobilizar/activar um conjunto de competências através das quais lhe é possível estabelecer a relação entre o mundo real, no qual os problemas estão localizados, e a matemática necessária à sua resolução (OCDE, 2003, 2004). Matos (2002) defende que o conceito de literacia tem a ver com a capacidade de usar os conhecimentos e as aptidões (ensinadas e aprendidas) em contextos da vida activa diária, sendo, por isso, uma noção que, podendo englobar a aplicação dos saberes matemáticos básicos que fazem parte dos currículos escolares, remete para a vida futura dos alunos, isto é, para a vida adulta. Schoenfeld (2001) encara este conceito como "a propensão e a capacidade para usar o conhecimento e os modos de pensamento matemático para atribuir sentido a situações com que o individuo se depara no mundo real" (p. 51). Embora não existam respostas definitivas sobre o que é a literacia matemática, de Lange

[40] Terminologia usada nas culturas anglo-saxónicas; o mesmo constructo é, também, designado pela UNESCO por cultura matemática ou, ainda, por alfabetização matemática nas culturas francófonas. Com uma significado muito próximo, outros autores referem-se a literacia quantitativa ou, ainda, a numeracia (Niss, 2003b).

[41] Luís Rico integra o grupo de especialistas em Matemática do projecto PISA.

(2003) destaca que esta noção remete para a matemática tal como é usada no mundo real e que o seu âmago é “usar, fazer e reconhecer a matemática numa variedade de situações”.

2.2.1. Literacia e competência matemática: conceptualização

Importa, assim, começar por discutir alguns conceitos interrelacionados com a noção de literacia matemática, nomeadamente o de competência matemática, até porque como é salientado por Rico (2006, p.282), no próprio programa PISA, ocorreu “un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la Alfabetización [Mathematical Literacy] y concluyen con un mayor uso del término Competencia Matemática”. Abrantes (2001), também chama a atenção para o facto de, nos estudos sobre literacia, se ter verificado uma evolução desse conceito para o uso do conhecimento em situações concretas, aproximando-se da noção de competência matemática. Niss (2003b), membro do grupo de especialistas em matemática do PISA (tal como Rico), define o conceito de competência matemática como sendo “a capacidade de entender, julgar, fazer e utilizar a matemática em contextos variados intra- e extra-matemáticos” (p. 218). Também para English (1996 *in* Contreras e Carrillo, 2000, p.17) a competência do indivíduo num determinado domínio (matemático, científico ou tecnológico) deve ser encarada em termos da sua capacidade para conceber e pôr em prática acções concordantes com os princípios básicos de conhecimento nesse domínio. Abrantes (2001), que segue a linha da teorização desenvolvida por Perrenoud (1997), defende que o termo competência não indica nem algum tipo de comportamento, nem algum tipo de desempenho específico. A competência num determinado domínio está relacionada com o processo de activar recursos (conhecimentos, aptidões, estratégias) numa enorme variedade de contextos, nomeadamente perante situações problemáticas. Embora relacionada com a capacidade de improvisar, a competência matemática não se desenvolve de modo espontâneo, mas sim como resultado da aprendizagem. Deste modo, o conhecimento e a capacidade para o usar estão envolvidos, mas esse uso é uma acção emancipada, baseada na reflexão e que implica algum grau de autonomia (Abrantes, 2001). É com este significado geral que o conceito de competência surge nos mais recentes documentos curriculares portugueses que salientam a aquisição de competência matemática como a principal meta do ensino e aprendizagem da matemática. Embora não seja apresentada uma definição deste conceito, a sua caracterização através de um conjunto de indicadores aponta para: (a) a mobilização de saberes para compreender a realidade e para abordar situações e problemas da vida escolar ou não escolar do aluno; (b) a aquisição integrada de conhecimentos, de capacidades e de atitudes em relação à matemática; (c) a compreensão de aspectos fundamentais da natureza e do papel da matemática (ME, 2001). A integração efectiva de conhecimentos, capacidades e atitudes é assumidamente uma ideia chave na noção de competência matemática e reflecte-se na forma como são enunciados os objectivos gerais do ensino da matemática apresentados no novo *Programa de Matemática do Ensino Básico*: "Os objectivos gerais propostos contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes (…) por se considerar que deste modo se favorece uma visão integradora destes três domínios" (ME, 2007, p. 4).

Na opinião de Rico (2006), a noção de competência surge como um constructo usado para caracterizar a actuação global do sujeito quando colocado perante uma tarefa contextualizada à qual há que dar resposta, ou seja, é uma forma de literacia matemática. Esta aproximação entre os dois conceitos permite aceitar que a competência matemática do indivíduo remete para a sua capacidade de aplicar conhecimentos e compreensão matemáticos quando confrontado com situações que requerem a formulação, a interpretação e a resolução de problemas e envolvem conceitos matemáticos quantitativos, espaciais, probabilísticos ou outros (ME-GAVE, 2004a; Rico, 2005, 2006). Porém, apesar da aproximação entre as duas noções, o conceito de literacia é encarado por alguns autores como mais abrangente do que a de competência matemática, na medida em que requer do sujeito competência matemática mas também algum conhecimento sobre a natureza da matemática e da actividade matemática. Por exemplo, no entendimento de Niss (2003a, 2003b, 2003c) a literacia matemática inclui a compreensão de aspectos da natureza da matemática e do seu papel, nomeadamente os que se relacionam com as aplicações actuais da matemática em áreas e técnicas que possuam impacto científico ou social. Para Schoenfeld (2001, p. 51), o conceito de literacia matemática inclui entre outros aspectos: a confiança em lidar com situações que envolvam a matemática; a apreciação cultural da matemática; a capacidade de interpretar dados, de pensar logicamente, de tomar decisões reflectidas e de usar a matemática em contextos diversificados. Nesse sentido, Kafai e Gilliland-Swetland (2001), apoiando-se na reflexão e contributos de vários educadores e investigadores em ciência, salientam o papel crucial que o conhecimento da história da ciência/matemática pode desempenhar na construção dos fundamentos da literacia científica/matemática. A mesma opinião é partilhada por de Lange (2003), que afirma que para a construção da literacia matemática é desejável que o aluno desenvolva uma apreciação cultural da matemática de um ponto de vista histórico, filosófico e social. Assim, embora exista ainda entre a comunidade matemática muita discussão acerca do conceito de literacia matemática, parece-nos consensual aceitar que esta inclui a propensão e a capacidade de usar o conhecimento e o pensamento matemático para atribuir sentido a situações variadas do mundo real, mas também a compreensão do valor, papel e natureza da matemática (OCDE, 2003; de Lange, 2003; Schoenfeld, 2001). Nesse sentido, este conceito resume bem as grandes metas da educação matemática contemporânea.

Porém, o termo competência é usado em documentos curriculares e outros textos sobre educação, com outros significados. Por exemplo, no âmbito do projecto PISA o termo competência também se refere ao domínio de processos cognitivos específicos da actividade matemática que têm de ser activados pelo sujeito de modo a estabelecer a ligação entre o mundo real, no qual se inserem os problemas, e a matemática que permite resolver esses problemas: "the mathematical process that students apply as they attempt to solve problems are referred to a mathematical competencies" (OCDE, 2003, p. 31). Ou como afirma Rico (2005) a "competencia general se pude desglosar en una serie de competencias específicas o particulares" (Rico, 2005, p. 14). Também Niss (2003a, 2003b) distingue duas acepções da noção de competência, que, aliás, denomina diferentemente por *"competence"* e *"competency"*. O primeiro termo é usado para designar a competência matemática tal como a caracterizámos acima, enquanto que o termo *competency* refere-se a um constituinte principal, claramente reconhecível e distinto da *"mathematical competencies"* (Niss, 2003b)[42]. O mesmo acontece no programa Pisa, onde se pode ler "A «mathematical competency» is clearly recognizable and distint, a major constituint in mathematical competence (2004b, p. 218). Ou seja, a competência matemática do sujeito inclui um conjunto de *competências matemáticas* específicas que, embora distintas, não são nem independentes nem disjuntas entre si. Essas competências específicas têm a ver com processos mentais ou físicos, actividades e comportamentos específicos que o sujeito executa quando se envolve na realização de uma tarefa que coloca desafios matemáticos,

[42] A "mathematical competency" is clearly recognizable and distint, major constituint in mathematical competence (2004b, p. 218).

como, por exemplo, resolução de problemas puros ou aplicados, leitura de um texto matemático, escrita de um texto com componentes matemáticas ou demonstração de um teorema (Niss 2004b, 2003b, 2003c). Em qualquer uma das competências matemáticas específicas é possível identificar um aspecto analítico e um aspecto produtivo (Niss, 2003c). O primeiro está focalizado na compreensão, na interpretação, na investigação e na avaliação dos fenómenos e processos matemáticos (como por exemplo, seguir e controlar uma cadeia de argumentos ou compreender a natureza e o uso de alguma representação matemática. O aspecto produtivo, como a própria designação sugere, centra-se na acção, isto é, na aplicação de processos de raciocínio, de representação ou outros (como por exemplo, criar uma cadeia de argumentos ou utilizar uma determinada representação matemática numa situação dada) (op. cit.).

Entende-se assim que as competências matemáticas específicas se manifestam através dos processos que o indivíduo põe em marcha para resolver uma determinada tarefa que envolva a matemática, requerendo do sujeito a capacidade de desempenhar certas actividades cognitivas. Ou seja, as competências matemáticas específicas da actividade matemática são caracterizáveis através de um certo número de capacidades. Por exemplo, diremos que um indivíduo manifesta competência de comunicação matemática quando este é capaz de se expressar tanto oralmente como por escrito sobre assuntos de conteúdo matemático e de compreender afirmações orais ou escritas de terceiros sobre assuntos com conteúdo matemático. Esta competência de comunicação matemática não é disjunta de outras competências. De facto as competências matemáticas podem e devem ser encaradas como um *continuum*.

Do que foi exposto, fica claro que as *competências matemáticas específicas,* que expressam os modos como o sujeito deve actuar quando faz matemática, surgem como constituintes principais, distintos e claramente reconhecíveis da literacia e da competência matemática do sujeito e concorrem, a par de outras dimensões, para a sua concretização (OCDE, 2003; ME-GAVE, 2004a; Niss, 2003; Rico, 2006).

Procurando captar os aspectos essenciais envolvidos na competência matemática, (Niss, 2003b, pp. 218-219) identifica e caracteriza oito competências matemáticas de acordo com os vários domínios cognitivos específicos da actividade matemática e cuja aquisição e desenvolvimento devem ser promovidos ao longo de toda a escolaridade:

pensar matematicamente; formular e resolver problemas matemáticos; modelar matematicamente (inclui analisar e construir modelos); raciocinar matematicamente; comunicar em, com e acerca da matemática; representar entidades matemáticas; manipular símbolos e formalismos matemáticos e utilizar materiais e instrumentos de apoio. Essas competências foram agrupadas em dois grandes grupos. O primeiro grupo inclui as competências que têm a ver com a capacidade de fazer e responder a perguntas acerca de e através da matemática e no segundo, as que têm a ver com a capacidade de compreender e usar a linguagem e instrumentos matemáticos (Figura 2.2).

Figura 2.2. Competências matemáticas (Niss, 2003a, 2004b)

Competências Matemáticas

- Fazer e responder a perguntas de e com a matemática
  - **Pensar matematicamente**
  - **Raciocinar matematicamente**
  - **Formular e resolver problemas matemáticos**
  - **Modelar matematicamente**
- Lidar com a linguagem e instrumentos matemáticos
  - **Comunicar em, com e acerca da matemática**
  - **Representar entidades matemáticas**
  - **Manipular símbolos e formalismos matemáticos**
  - **Utilizar materiais e instrumentos de apoio**

Ressalta-se que a formulação das competências está intencionalmente desligada de qualquer conteúdo matemático ou de currículos particulares, mas que estas não fazem qualquer sentido se não existir conhecimento matemático e que a forma como se manifestam está estreitamente relacionado com os níveis de ensino e com os estádios de desenvolvimento cognitivo dos alunos (Niss, 2003c; de Lange, 2003).

Ainda que as competências matemáticas sejam identificáveis e caracterizáveis, independentemente de conteúdos específicos, não podem deixar de estar estreitamente relacionadas com os conteúdos matemáticos. De facto, vários autores acentuam que é necessário, embora não suficiente, que o indivíduo possua conhecimentos e destrezas matemáticas básicas, para que se possa alcançar um uso abrangente e funcional da matemática, isto é, para que se possa falar em literacia ou competência matemática (Schoenfeld, 2001; OCDE, 2003; ME-GAVE, 2004a; Niss, 2003a, 2003b, 2003c; Rico, 2005, 2006). "A mathematical competency can only be developed and exercised in dealing with such subject matter" (Niss, 2003c, p.10). Considerando que as competências matemáticas específicas são transversais aos conteúdos curriculares escolhidos para um determinado nível de ensino, Niss (op. cit.) representa essa relação recorrendo à imagem de uma matriz cujas linhas são os conteúdos e as oito colunas, as competências. Cada célula da matriz especifica como é que, num determinado nível de ensino, uma certa competência específica se manifesta perante o tópico correspondente. Tal perspectiva é reforçada e ampliada por Cachapuz (2004, p. 120) que, na reflexão que apresenta sobre o conceito de competência[43] afirma que "não pode haver competências sem os conhecimentos disciplinares, o que há é uma outra forma de entender o sentido dos diferentes conteúdos disciplinares, uma vez que passam a estar ligados a práticas sociais".

É incontornável reconhecer que a literacia e a competência matemática também envolvem implicitamente uma outra dimensão relacionada com a expressão de sentimentos e respostas do aluno em relação à tarefa proposta, em particular, e à matemática, em geral. Referimo-nos à dimensão das atitudes, que inclui gostar ou não gostar, ter satisfação ou falta dela, ter confiança ou falta de confiança na realização de actividades que envolvam pensamento matemático. A importância do desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à matemática, como, por exemplo, interesse, entusiasmo, curiosidade, persistência, autonomia, autoconfiança e vontade de enfrentar, compreender e realizar actividades que envolvam a matemática (ME, 2001), é amplamente aceite como positiva por si própria, mas, sobretudo, porque conduz frequentemente a um maior esforço e a um maior êxito em matemática (Ernest, 2000). Esta dimensão foi aliás introduzida no estudo PISA 2003[44], por se considerar que a apreciação e a valorização da matemática tem implicações para a aprendizagem e para o desenvolvimento da predisposição para a aprendizagem ao longo da vida (OCDE, 2003, p. 110):

> Students with an interest in a subject like mathematics are likely to be more motivated to manage their own learning and develop the requisite skills to become effective learners of the subject. Hence, interest in mathematics is relevant when considering the development

[43] Embora a reflexão incida sobre o conceito de competência em geral e não sobre o conceito de competência matemática em particular, consideramos que esta reforça a perspectiva que adoptámos.
[44] Embora já fosse referida, mas não tida em conta em avaliações anteriores (OCDE, 2004).

> of effective learning strategies for mathematics. In contrast, anxiety about learning mathematics can act as a barrier to effective learning. Students who feel anxious about their learning can act as a barrier to effective learning.

Como nota Ernest (2000), as atitudes em relação à matemática não podem ser directamente ensinadas, são antes de mais o resultado indirecto das experiências de aprendizagem dos alunos ao longo dos anos. Nesse processo, o papel do professor é determinante, não só ao nível da selecção das tarefas e da orientação das actividades dos alunos, como também do entusiasmo, do gosto e do envolvimento na tarefa de ensinar.

Do que ficou explicitado, no nosso estudo, consideramos três componentes que confluem para a competência matemática do sujeito: o conhecimento matemático, as competências matemáticas específicas ou capacidades (de pensamento e raciocínio, de argumentação, de formulação e resolução de problemas, de modelação, de comunicação, de representação, de manipulação de símbolos e linguagem formal e de uso de auxiliares e instrumentos) e as atitudes em relação à matemática.

Em síntese, posicionamo-nos num modelo de ensino da matemática centrado no desenvolvimento da literacia matemática que apela à necessidade de promover uma aprendizagem compreensiva de conceitos, teorias e procedimentos matemáticos, interligada com a aquisição de capacidades matemáticas (ou competências matemáticas específicas) e de atitudes positivas em relação à matemática, no sentido do desenvolvimento da apreciação e compreensão da natureza da matemática, nomeadamente de uma visão da matemática como uma actividade humana, com forte sentido cultural e social.

2.2.2. Reptos de um ensino da matemática orientado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática

Têm sido identificadas algumas dificuldades na expressão de um currículo orientado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática, tanto ao nível da sua descrição detalhada, como da identificação da matemática relevante (de Lange, 2003; Schoenfeld, 2001). Tradicionalmente, os currículos de matemática incluem determinadas componentes, tais como: a formulação das finalidades e objectivos a alcançar, a indicação de uma listagem de conteúdos matemáticos a abordar, um conjunto de orientações metodológicas gerais e a indicação das formas e instrumentos de avaliação das aprendizagens (eg. ME, 1991). Como refere Niss (2003b), trata-se de uma forma circular de definir o currículo que, de uma forma ou de outra, conduz à ideia de que ensinar e aprender matemática se reduz e limita aos conteúdos identificados e listados, e ainda que "saber matemática" se reduz ao conhecimento de factos e à execução de destrezas relacionadas com os conteúdos programáticos. Schoenfeld (2001) defende a ideia de que se no passado o que se aprendia na escola e a literacia matemática podem ser vistos, em grande parte como disjuntos, hoje isso não pode ser assim: "Now (…) they should thought of as largely overlapping" (Schoenfeld,2001, p. 52). Hughes-Hallett (2001) acrescenta que um ensino tradicional da matemática "pede" aos alunos que ponham de parte o contexto, enquanto que um ensino orientado para a literacia está focado em aplicações da matemática e, como tal, "pede" aos alunos que se situem num determinado contexto (geralmente não familiar).

De Lange (2003), apoiando-se no enquadramento conceptual do projecto PISA (projecto em que as competências matemáticas específicas constituem a respectiva "coluna vertebral"), defende que os objectivos do ensino e aprendizagem da matemática não devem ser formulados exclusivamente em termos de conteúdos matemáticos mas devem incluir competências. "Enfatizar as competências facilita a transferência de conhecimentos de uma área de aplicação para outra, as competências são independentes da área de aplicação" (op. cit, p. 80). Tal ponto de vista aponta para a importância dos processos de pensamento próprios da matemática como componentes fundamentais do ensino e aprendizagem da matemática. Esta ideia foi muito bem defendida por Guzmán (1993) através de dois argumentos poderosos. O primeiro, de natureza epistemológica, aponta que a matemática é, sobretudo, saber fazer: "es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido" (op. cit, p. 13). O segundo, apoiado na consciência de que numa sociedade em transformação vertiginosa há, cada vez mais, necessidade de repensar que conteúdos matemáticos são prioritários[45] e que conhecimentos científicos e tecnológicos são indispensáveis para ultrapassar os problemas, aponta que o mais valioso que a educação matemática pode proporcionar aos jovens é a aquisição de processos verdadeiramente eficazes de pensamento matemático:

[45] De Lange (2003) defende, a este propósito, que uma educação matemática que suporte o desenvolvimento da literacia matemática exige uma revisão regular dos conteúdos matemáticos do currículo (por exemplo, de 10 em 10 anos).

> Es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento (…) es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros jóvenes. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en (…) «ideas inertes»(…) que non son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente (op. cit., p. 14).

Tal óptica obriga a repensar o papel e a abordagem dos temas tradicionais do currículo. De Lange (2003), remetendo, mais uma vez, para as perspectivas veiculadas pelo PISA, sugere, desde o Pré-escolar, uma abordagem fenomenologica do conteúdo[46] e um desenvolvimento longitudinal dos conceitos matemáticos de forma coerente ao longo de toda a escolaridade. Defende também, como já referimos, a centralidade que o desenvolvimento de competências matemáticas de raciocínio e pensamento matemático, de argumentação, de formulação e resolução de problemas, etc.) deve assumir no currículo de matemática. Para além dessas perspectivas sugere que os conceitos matemáticos devem ser aprendidos através da resolução de problemas em ambientes apropriados e com oportunidades de progressiva matematização e generalização e, ainda, a ênfase que o ensino deve dar ao estabelecimento de conexões intra-matemáticas e de ligações com a vida pessoal e escolar dos alunos.

Das perspectivas apontadas sobressai a centralidade do desenvolvimento de competências matemáticas que não se adquirem sem a implicação dos alunos na realização de actividades de aprendizagem significativas, acompanhadas de discussão e reflexão sobre as mesmas (Bishop e Gofree, 1986 in Abrantes, 1996, p. 98). Como afirma de Lange (2003, p. 88) um ensino assim perspectivado pode coexistir, por exemplo, com a aquisição de destrezas de cálculo, mas requer oportunidades para desenvolver a intuição, para explorar problemas reais, para aprender a raciocinar, etc. Até porque, como dizia Sebastião e Silva (1977):

> A cultura científica resulta precisamente da síntese dos dois termos complementares: a teoria e a prática (…) Um dos objectivos fundamentais da educação é sem dúvida criar no aluno hábitos e automatismos úteis (…) mas trata-se aí, manifestamente, de meios, não de fins (…). Os (…) automatismos são (…) precisamente meios de acesso à cultura. A sua finalidade é a de aumentar o poder e a liberdade do verdadeiro pensamento (pp. 10-11).

[46] O conteúdo matemático é organizado e descrito em termos dos fenómenos e dos tipos de problemas para os quais foi criado. O PISA organiza o conteúdo matemático em quatro categorias fenomenológicas: Quantidade (lida com fenómenos numéricos, relações e modelos quantitativos); Espaço e Forma (lida com fenómenos e relações espaciais); Mudança e relações (lida com a descrição ou modelação por funções matemáticas de processos de mudança de relações temporárias ou permanentes entre fenómenos; Incerteza (lida com fenómenos e relações probabilísticos e estatísticos).

No contexto de um ensino orientado para o desenvolvimento da literacia e competência matemática do aluno, destaca-se o papel que a vivência de experiências matemáticas diversificadas e relativas a situações e contextos diversificados, intra- e extra-matemáticos, em profunda articulação com os tópicos curriculares[47], pode desempenhar para que, progressivamente, o aluno se torne num resolvedor de problemas, aprenda a dar sentido a situações aplicadas, se envolva na recolha e análise de dados reais e desenvolva a capacidade de comunicar o seu pensamento de forma convincente (Schoenfeld, 2001). Paralelamente à aquisição e desenvolvimento de competências matemáticas específicas é expectável que o aluno se sinta progressivamente mais confiante nas suas capacidades pessoais para lidar com a matemática (Niss, 2003a; De Lange, 2003; Schoenfeld, 2001).

As perspectivas enunciadas apontam a funcionalidade e a potencialidade do conhecimento matemático para dar resposta a problemas e situações do quotidiano, sociais, científicas, técnicas, isto é, põem a ênfase no conhecimento matemático posto em marcha perante uma grande diversidade de tarefas e contextos, por meios reflexivos variados e baseados em competências e capacidade pessoais, sustentadas por diversos processos cognitivos (Rico, 2006). Há porém que ter em conta que os alunos sentem, em geral, dificuldades em aplicar a matemática a contextos diferentes daqueles em que a aprenderam, sobretudo quando estes remetem para outros campos do conhecimento (Física, Economia, História, Arte, …) e requerem a compreensão desse mesmo contexto. Por isso, na opinião de Hughes-Hallett (2001), um passo essencial para a literacia é a promoção da colaboração entre professores das diferentes disciplinas e o seu envolvimento num diálogo interdisciplinar. Se o professor de matemática necessita ajudar os seus alunos a identificar ideias matemáticas em contextos diversificados, também noutras áreas os alunos devem ser encorajados a olhar para os assuntos com "lentes quantitativas" (op. cit., p. 98).

Na discussão desta temática é incontornável referir as orientações e propostas curriculares para a matemática escolar, do pré-escolar ao final do ensino secundário, veiculadas pelos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Neste documento, entre outros aspectos, defende-se que o currículo de matemática se deve centrar sobre um núcleo de temas aglutinadores de um conjunto de ideias matemáticas

[47] Como afirma Niss (2003c, p.10) "A mathematical competency can only be developed and exercised in dealing with such subject matter".

importantes, a abordar longitudinalmente, desde o pré-escolar até ao final da escolaridade não superior[48]. Outro dos aspectos que merece destaque é a necessidade de se dar atenção à compreensão dos conteúdos matemáticos e, em paralelo, ao desenvolvimento de competências matemáticas, colocando estas duas componentes em pé de igualdade (Ponte, 2000; Guimarães, 2005). Argumentando-se, por exemplo, que a resolução de problemas apela ao uso de saberes escolares e à compreensão de conteúdos subjacentes ao problema a resolver. Para a concretização desta perspectiva, apresentam-se dez normas para a matemática escolar que especificam aquilo que o ensino da matemática deve possibilitar ao aluno *saber* e *saber fazer*. Cinco dessas normas estão centradas na descrição dos conteúdos matemáticos que os alunos deverão aprender – *normas de conteúdo* - e, as restantes, são relativas aos modos de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos - designadas por *normas de processo*: Resolução de Problemas, Raciocínio e Demonstração, Comunicação, Conexões e Representação (NCTM, 2000, p. 29). Deste documento sobressai a ideia de que aprender matemática requer a compreensão de conceitos e processos matemáticos e a capacidade de os aplicar em contextos diversificados. Guimarães (2005, 2007) destaca como particularmente marcante o facto de se assumir que a capacidade de utilizar a matemática está associada à compreensão da matemática, mas também ao conhecimento de factos e ao domínio de técnicas e procedimentos matemáticos. Schoenfeld (2001), um dos redactores dos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), salienta a preocupação com a elaboração de orientações e propostas curriculares centradas num ensino da matemática de elevada qualidade que responda às necessidades matemáticas e de literacia de todos os alunos e afirma que, na sua opinião, este documento pode ser encarado como "the primary mechanism for achieving broad-based quantitative literacy" (op. cit, p. 54). Porém, de Lange (2003) afirma que o documento ainda reflecte a dificuldade em encontrar um consenso sobre o significado básico da literacia matemática e que embora possa ser considerado um ponto de partida, não deve ser encarado como um quadro definitivo do que deve ser um ensino orientado para a literacia matemática, sendo necessária a realização de muita investigação nesse campo.

---

[48] Essas ideias matemáticas fundamentais estão organizadas em cinco grandes temas que começam a ser abordados desde o pré escolar e que são: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, Análise de Dados e Probabilidades.

Como já se referiu anteriormente, também em Portugal se assistiu a uma modificação das orientações curriculares para a educação matemática[49] dos jovens a frequentar a escolaridade obrigatória, as quais se inserem nas perspectivas discutidas atrás. Nesse sentido, preconiza-se que a formação escolar em matemática deve permitir que o aluno: (a) compreenda e utilize a matemática, nas diferentes disciplinas em que ela é necessária, depois da escolaridade, na profissão e na vida pessoal e em sociedade; (b) adquira uma visão adequada da matemática e da actividade matemática; (c) reconheça o contributo da matemática para o desenvolvimento científico e tecnológico e a sua importância cultural e social em geral; (d) desenvolva uma relação positiva com a disciplina e a confiança nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela (ME, 2007, p. 3). Em termos organizacionais o Programa estrutura-se em quatro grandes temas – *Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados* – e de três grandes capacidades, consideradas transversais a toda a aprendizagem da matemática – *a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática* – porém é salientada a valorização a dar a outras capacidades, tais como 2as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática” (op. cit, p. 8). Nesse âmbito, recomenda-se que as situações a propor aos alunos remetam para contextos matemáticos e não matemáticos e incluam outras áreas do saber e do quotidiano dos alunos· Também se assume como importante proporcionar aos alunos o contacto com aspectos da história da matemática, argumentando-se que a integração de uma perspectiva histórica no ensino da disciplina ao permitir evidenciar a relação da matemática com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporciona uma perspectiva dinâmica sobre a matemática e o seu papel na sociedade (op. cit, p. 10). Concomitantemente, também se aponta a valorização a dar ao papel da matemática na ciência e tecnologia na sociedade actual. Ou seja, pode afirmar-se que este Programa é consistente com a ideia de uma educação matemática orientada para o desenvolvimento da literacia e competência matemática. È de ressaltar, no entanto, o papel determinante que a forma como a matemática é abordada em sala de aula desempenha na construção da literacia (de Lange, 2003; Carvalho e Silva, 2002). Por exemplo, no texto do próprio programa se alerta para o facto de as situações de contextos menos conhecidos

[49] Iniciada com a publicação do C*urrículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais* (ME, 2001) e culminando com a publicação do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007).

poderem criar obstáculos à aprendizagem se não forem familiares aos alunos ou se estes não as compreenderem.

Em síntese, um ensino da matemática orientado para o desenvolvimento da literacia e da competência matemática deve fundamentar-se numa visão da matemática como um campo dinâmico em contínua expansão, criado pela humanidade e atender às dimensões interna e externa da produção e justificação do conhecimento matemático, ou seja, entrar em linha de conta com a prática dos matemáticos, a história e as aplicações da matemática, aspectos sociais e culturais e, ainda, questões de natureza axiológica. Tal perspectiva implica a criação de um ambiente de trabalho em que se valorize a exploração, a descoberta, a criação de regras e padrões e em que a actividade a desenvolver pelo aluno provoque o raciocínio e outros processos de pensamento matemático (Abrantes, 1996; Guzmán, 1993; NCTM, 1991). Deste modo, a aula de matemática deve ser encarada como uma comunidade matemática genuína em que se enfatiza a construção de ideias matemáticas, se cria conhecimento e se desenvolvem capacidades matemáticas (Schoenfeld, 1992). Como salientam Ball e Bass (2003), a preocupação com o desenvolvimento do raciocínio matemático deve ser central, pois este é a base da actividade matemática e, em particular, da actividade de resolução de problemas. De Lange (2003) sugere como fundamental que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas que remetam para contextos diversificados e que sejam relevantes para eles, ou seja, tanto problemas relativos a situações da vida real que os ajudem a ser cidadão informados e críticos, como a situações que sejam relevantes para as suas áreas de interesse profissionais ou escolares.

Uma última nota, refere-se à importância dos conhecimentos matemáticos. Como é salientado por Guzmán, o conhecimento de estratégias gerais de pensamento, por mais sofisticadas que sejam, não pode suprir o conhecimento dos conteúdos, não sendo, por isso, de esperar, que um aluno iniciado num determinado assunto (por exemplo, na proporcionalidade) seja capaz, por si mesmo, de aprofundar os assuntos e resolver os problemas (Guzmán, 1994). Não pode também deixar de ser salientado que a aquisição de destrezas na realização de certos procedimentos (cálculo mental, domínio de algoritmos, utilização de uma fórmula, uma construção geométrica, …) continua a ser uma componente vital para a aquisição da competência matemática, “desde que não seja descurada a sua compreensão e a sua integração em experiências matemáticas significativas" (ME, 2001), e que a aquisição de fluência na execução dos procedimentos ocorra concomitantemente com a sua compreensão (Ball et al., 2005b).

2.2.2.1. Resolução de Problemas

Muitos têm sido os investigadores que se têm debruçado sobre a problemática da resolução de problemas contribuindo quer para clarificação de aspectos conceptuais, quer para a reflexão sobre várias questões levantadas pela discussão do papel da resolução de problemas na educação matemática. Na base deste interesse, é incontornável referir o contributo de George Pólya como o grande impulsionador da preocupação contemporânea com a resolução de problemas. Porém, se bem que a sua obra mais marcante "How to Solve It" tenha sido publicada em 1945, só nos anos 80 é que a resolução de problemas surge como uma ideia central da renovação do ensino da matemática.

De acordo com Abrantes (1996), a relevância educativa concedida aos problemas começou por se relacionar especialmente com as heurísticas, isto é, com as operações mentais úteis na procura de uma solução, ou seja, no processo de resolução do problema. Todavia, a reflexão sobre os processos de resolução de problemas evidenciou que estes implicam, muitas vezes, a exploração do contexto mais além do que é explicitado pelo enunciado, implicando a criação de formulações alternativas ou a interpretação e clarificação das informações facultadas. Deste modo, a resolução de problemas está também associada a actividades de exploração e formulação de problemas, o que determina uma evolução dessa noção, que passa a dizer respeito não só a problemas, como também a situações problemáticas (op. cit.). Emerge assim uma perspectiva mais ampla da resolução de problemas que põe a tónica nos processos característicos da actividade matemática tais como formular (questões, problemas, conjecturas, …), provar, demonstrar, argumentar, usar procedimentos de natureza metacognitiva, etc (Schoenfeld, 1992). Na opinião de Guimarães (2005), nas orientações curriculares do NCTM de 2000 há uma mudança de perspectiva em relação à resolução de problemas que, embora considerada uma parte integrante da aprendizagem da matemática, já não é apresentada como a principal componente da matemática escolar. Como já referimos atrás, na base desta mudança de posição está a defesa de uma abordagem que integre conteúdos e processos. Ainda assim, a resolução de problemas é encarada como um objectivo da aprendizagem da matemática, mas também como um meio fundamental para a sua aprendizagem, ou seja, surge como um processo que deve permear o estudo da matemática e que proporciona o contexto para a aprendizagem de novos conceitos e capacidades matemáticas:

> *Os bons problemas e tarefas que envolvem a resolução de problemas estimulam os alunos a reflectir e a comunicar (…). Geralmente, servem multiplos propósitos, tais como, estimular os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, introduzir novos conceitos e proporcionar um contexto para a aplicação das suas capacidades (NCTM, 2000, p. 183).*

Quando usamos a terminologia "problema", referimo-nos a um tipo específico de tarefa proposta em situação de ensino (em sala de aula ou num ambiente não formal) que potencialmente desencadeia no(s) destinatário(s) um conjunto de acções (também designadas por actividade). Como qualquer outro tipo de tarefa (um exercício, uma questão, um jogo, …), um problema envolve informações sobre uma dada situação (situação inicial) e exige uma resposta (encarada como o produto da actividade desencadeada pela tarefa). Todavia, tem especificidades que importa esclarecer. Em primeiro lugar, aceitamos que a classificação de uma tarefa como problema não é uma característica *per si* dessa tarefa, isto é, a classificação de uma tarefa como problema está estreitamente relacionada com os alunos a quem se pretende propor, com os seus conhecimentos e capacidades. Assim, no campo da matemática escolar, é ao professor que cabe julgar se uma determinada tarefa constitui ou não um problema para os seus alunos, entrando em linha de conta com o seu conhecimento sobre o currículo, sobre os alunos e o seu próprio estilo de ensino (Cabrita, 1998, p. 29). Por exemplo, para um professor que desenvolva uma prática de ensino muito centrada na memorização e prática de procedimentos matemáticos, um simples problema de palavras[50] reúne certamente todos os requisitos de um problema[51].

Posto isto há que especificar quais são os aspectos característicos de um problema, isto é, quais os aspectos que o proponente deve ter em linha de conta para que uma dada tarefa constitua um problema e não um exercício, para um aluno ou determinado grupo de alunos. Dos muitos autores que contribuíram para esta questão (Henderson e Pingry, 1953, Goldin 1982; Newell e Simon, 1972; Kantowski, 1970, 1977, 1980; Mayer, 1983, Charles

[50] Considera-se um problema de palavras como um exercício de cálculo que é apresentado através de pequenas frases (Ponte e Serrazina, 2000).
[51] De acordo com Palhares (1997, p. 97) a resolução de um problema subentende a existência de um formulador, de um apresentador e de um resolvedor, isto é, de um ou mais sujeitos que desempenham distintos papeis. O primeiro refere-se ao sujeito que descobre ou cria o problema (as actuais orientações curriculares para o ensino básico incorporam a necessidade de facultar ao aluno oportunidades para a formulação de problemas), o segundo refere-se ao sujeito que sugere o problema a terceiros e o último ao sujeito que decide resolver o problema.

e Lester, 1983, Krulick e Rudnick, Kilpatrick, 1985, Palhares, 1997, discutidos em Palhares, 1997, e Cabrita, 1998) sobressai a ausência de acordo em torno do conceito de problema e uma certa tendência para imiscuir na definição de problema alguns aspectos inerentes à resolução do problema em si. Contudo, é possível identificar um conjunto de características que reúnem a concordância de vários autores e que contribuem para uma definição aceitável de problema.

No âmbito da nossa vida diária, estamos perante um problema quando a partir da situação em que estamos queremos chegar a outra, que conhecemos com mais ou menos claridade, mas da qual desconhecemos o caminho (Guzmán, 1994). Em educação matemática, um problema, seja ele matemático ou aplicado, deve ser desafiador e interessante a partir de uma perspectiva matemática (NCTM, 2000). Para Pólya (2003), está-se perante um problema quando se procura de forma consciente alguma acção apropriada à consecução de um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível. Kantowski (1977) precisa que um individuo está perante um problema quando se confronta com uma questão à qual não consegue responder ou com uma situação que não é capaz de resolver usando o conhecimento imediatamente disponível. Esta investigadora acrescenta que a obtenção de solução para um problema requer do indivíduo a combinação do conhecimento de que dispõe de uma maneira que é nova para ele. Kilpatrick (1985) define problema como uma situação em que se pretende alcançar um objectivo, mas em que existe um obstáculo. Mayer (1985) assume que ocorre um problema sempre que o indivíduo se depara com uma situação inicial e quer alcançar uma situação final, sem conhecer um caminho óbvio para o conseguir. Lester (1983), acrescenta como um elemento caracterizador de um problema a necessidade que o indivíduo sente em dar resposta à situação ou tarefa.

Um problema pressupõe, pois, um objectivo a atingir, mas contém sempre um obstáculo, uma dificuldade de natureza cognitiva não transponível de forma imediata (Cabrita, 1998, Palhares, 1997). Assim, um problema caracteriza-se pela existência de uma situação inicial que contém certos elementos (dados e condições) a partir da qual se pretende chegar a outra situação (situação final), através da realização de um conjunto de transformações sucessivas, que não são, a *prio*ri, conhecidas do potencial resolvedor, e que deverão conduzir à obtenção de uma solução (ou mais soluções), ou ainda à conclusão da inexistência de solução. Embora um exercício seja também uma tarefa que contém também um conjunto de informações sobre uma situação inicial e/ou sobre uma transformação a operar, a grande diferença entre problema e exercício é que este último possui caminhos bem delimitados para se chegar à solução (por exemplo, um algoritmo que uma vez aplicado conduz à solução): "um problema difere de um exercício pelo facto de o resolvedor não dispor de um algoritmo que, uma vez aplicado, o conduz à solução (Kantowski, 1977, p. 163). Assim, pode encarar-se um exercício como uma tarefa de aplicação de conceitos e procedimentos algorítmicos já aprendidos (Cabrita, 1998), que para a sua resolução exige apenas a identificação do(s) algoritmo(s) a aplicar e a sua manipulação adequada (Kantowski, op. cit.).

Das definições de problema apresentadas ressaltam vários aspectos que passamos a sintetizar (Palhares, 1997, p. 167): um problema é uma tarefa ou situação que fornece um conjunto de informações sobre uma situação inicial e sobre uma situação final que é requerida, ou sobre a transformação que é requerida; num problema existe um obstáculo que impede uma classe de indivíduos de efectuar a transformação requerida sem recorrer a algum tipo de raciocínio que lhes permita, pelos seus próprios meios, obter a solução ou concluir sobre a inexistência desta. Um problema envolve, pois, a aplicação de conceitos, procedimentos e capacidades de pensamento matemático e deve ser apresentado de forma a captar e manter o interesse do potencial resolvedor: Um problema realmente bom deve ser um estímulo para explorações matemáticas e discussões em sala de aula pelo que deve reunir certas características, tais como: requerer a aplicação de conceitos e técnicas matemáticas; exigir alguma dose de interpretação; despertar e manter o interesse dos alunos; dar origem a outros problemas (Swetz, 1997). Este último aspecto é também salientado por Stewart (1996, p. 16): "um bom problema é aquele cuja solução (…) abre horizontes inteiramente novos".

Os problemas têm sido classificados de diferentes modos por diferentes autores. A tipologia desenvolvida no projecto GIRP[52] por Fernandes et al. (Vale e Pimentel, 2004) propõe quatro tipos de categorias, que não pretendendo ser incompatíveis entre si, permitem, entrando em linha de conta com a natureza do problema e as características e conhecimentos dos alunos a quem este se destina, classificar os problemas em termos dos procedimentos a utilizar para a sua resolução (Cabrita, 1998). De acordo com esta

[52] Grupo de Investigação em Resolução de Problemas

tipologia, problemas cuja resolução pede a utilização de um equipamento experimental e sobre o qual o aluno deve exercer as suas acções (por exemplo, fazer uma medição[53], determinar uma massa) são enquadrados na categoria de *problemas de aparato experimental*. Porém, noutros, o aspecto mais característico da resolução é a utilização/aplicação de conteúdos curriculares específicos (conceitos, algoritmos,… abordados nas aulas e já adquiridos ou que se pretendem reforçar). Neste caso, usa-se a designação de *problema de conteúdo*. Os chamados *problemas de processo* salientam-se por não serem resolúveis por aplicação de uma definição ou algoritmo e por exigirem processos complexos de pensamento como a selecção de uma estratégia de resolução (por exemplo a descoberta de um padrão e a formulação e testagem de uma conjectura). Em geral, não envolvem mais do que conhecimentos elementares de aritmética e geometria. A última categoria é a dos *problemas de aplicação* que, como a designação sugere, se referem a situações e contextos da vida real em que é necessário lidar com dados reais que, nalguns casos, têm de ser recolhidos e analisados. São problemas cuja resolução se pode estender no tempo, exigindo normalmente a escolha de uma ou mais estratégias de resolução e a tomada de decisões (e.g. Vale e Pimentel, 2004, Vale, 2000, Cabrita, 1998, Palhares, 1997).

De acordo com Pólya (2003), o indivíduo resolve um problema quando consegue realizar a acção que lhe permite alcançar o objectivo almejado. Ou seja, um problema está indelevelmente associado à sua resolução, isto é, à procura de uma solução e, consequentemente, à sua obtenção ou à conclusão (justificada) da sua inexistência. Uma vez perante um problema, o sujeito tem de procurar qual a melhor forma de o enfrentar para chegar à solução[54], isto é, tem de executar determinados procedimentos, à partida desconhecidos. Assim, a resolução de problemas envolve duas componentes essenciais: (a) o processo, ou conjunto de comportamentos ou actividades que dirigem a procura de solução; (b) o produto ou solução (Kantowski, 1977). Na opinião de Palhares (1977, p.

[53] Por exemplo, um problema que exija para a sua resolução o conhecimento da relação entre determinadas unidades de volume, relação essa que é desconhecida do sujeito, pode ser enquadrado nesta categoria, pois exige que através de medição directa o resolvedor ultrapasse esse obstáculo. Um exemplo possível é a seguinte situação, relativa a antigos sistemas de unidades portugueses: tenho necessidade de somar sete alqueires, três quartas e seis selamins de milho com dez alqueires, duas quartas e sete selamins de milho. Pergunto: quanto é a soma (Pacheco, 1624).

[54] Cometemos este abuso de linguagem por uma facilidade de exposição, mas estamos cientes de que não entramos em contradição com o que antes foi evidenciado, isto é, que muitos problemas têm mais do que uma solução e que outros não têm qualquer solução.

167), "O processo de resolução de um problema é um processo de descoberta e não de criação. Os problemas podem ser criados ou descobertos, mas uma vez que existam, a sua solução (ou soluções, ou falta de solução) existe à espera de ser descoberta" (Palhares, 1997, p. 167). Contrapõe-se, no entanto a ideia de que o estabelecimento de um plano de resolução corresponde a uma fase de criação.

A resolução de problemas em matemática requer o uso de um conjunto de procedimentos que permita representar e transformar o problema, o uso de conhecimentos matemáticos e um sistema de regulação que permita guiar a selecção de conhecimentos e procedimentos (Kilpatrick, 1985). Esta última dimensão, referente a aspectos metacognitivos, é considerada por vários autores como indispensável para a melhoria do processo de resolução de problemas (Schoenfeld, 1992, Guzman, 1991). Os alunos devem aprender a valorizar o processo de resolver problemas, tanto, pelo menos, quanto valorizam as soluções (NCTM, 1991, p. 29), porém, como reconhece Guzmán (op. cit, p. 19), a reflexão sobre o processo de resolução pode ser a mais proveitosa de todas, mas é a que mais vezes nos esquecemos de fazer. Também as duas primeiras componentes se assumem como particularmente relevantes, como aliás foi reconhecido por Pólya (2003, p. 30) quando afirma que "os materiais necessários para a resolução de um problema são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos, ou teoremas anteriormente demonstrados".

Na literatura sobre o assunto podemos encontrar vários modelos de resolução de problemas que procuram organizar e sistematizar os processos de pensamento típicos desta tarefa. De um modo geral, muitos dos modelos existentes podem considerar-se oriundos do modelo apresentado em 1945 por Pólya, que distinguiu quatro fases representáveis por acções como: (a) compreender o problema, (b) delinear um plano; (c) executar o plano e (d) rever a resolução. Outros modelos como os de Charles e Lester (1984) e Burton (1984) (in Cabrita, 1998, Vale, 2000) associam as segunda e terceiras fases de Pólya. Outros autores como Krulick e Rudnick (in Cabrita, 1998; Vale, 2000) propõem um modelo estruturado em cinco etapas, no qual se distingue, na fase correspondente à compreensão do problema, uma fase relativa à leitura do mesmo (que inclui a identificação dos dados e da questão e a compreensão do vocabulário) e outra à exploração /manipulação autónoma dos elementos da situação. Guzmán (1993), muito próximo de Pólya, considera também quatro etapas e distingue-se deste último por manifestar explicitamente preocupações de natureza metacognitiva. De facto, a última fase do modelo de Guzmán inclui a reflexão sobre os processo de resolução e de pensamento como dimensões relevantes da resolução de problemas, argumentando que tal permite ao sujeito conhecer-se melhor e preparar-se para enfrentar melhor futuros problemas. Esta última etapa, sendo a que os alunos menos frequentemente executam, é considerada fundamental por permitir consolidar conhecimentos e também descobrir novos problemas".

Em súmula, independentemente da adopção de um outro modelo, é consensual aceitar que a resolução de problemas matemáticos exige a compreensão do problema, a tradução do problemas para uma questão matemática precisa, a escolha e utilização de métodos apropriados à obtenção de uma resposta à questão matemática, a interpretação e verificação da solução em termos do problema original e a reflexão sobre o processo de resolução (Ball et. al, 2005b).

Na figura 2.3 apresenta-se um modelo de resolução de problemas baseado essencialmente nos modelos de Pólya e Guzmán e em contributos dos estudos analíticos sobre esta temática conduzidos por Cabrita (1998) e Vale (2000) que apoiará a análise que desenvolveremos neste estudo no âmbito da resolução de problemas e do ensino da matemática na escolaridade básica centrado na resolução de problemas.

Figura 2.3. Modelo de resolução de problemas

Compreender o problema

Corresponde à familiarização com os elementos da situação exposta, nos quais se incluem os dados, as condições expressas e aquilo que é pedido. Implica:

- Leitura atenta do enunciado do problema;
- Compreensão do vocabulário;
- Formulação do problema por outras palavras;
- Identificação dos dados;
- Identificação da questão do problema;
- Construção de uma figura/esquema com indicação dos dados e incógnita (se adequado);
- Introdução de notação adequada.

↓

Estabelecer um plano de resolução

Tem a ver com a identificação de modos de ataque ao problema, ou seja com a percepção dos cálculos ou das construções a executar para responder à questão e/ou com a escolha de estratégias possíveis de resolução:

- Procurar regularidades;
- Identificar um padrão;
- Formular e testar conjecturas
- Proceder por tentativa e erro;
- Identificar um problema relacionado e reconhecer as semelhanças;
- Reduzir a um problema mais simples, com menos dados;
- Fazer um esquema, uma figura ou um desenho;
- Construir uma tabela
- Supor o problema resolvido;
- Escolher uma boa notação;
- Usar raciocínio indutivo ou dedutivo;

↓

Executar o plano

Trata-se da resolver o problema pondo em prática uma estratégia delineada o que pode obrigar à sua reformulação ou mesmo a sua substituição por outra. Inclui:

- Execução dos vários passos do plano concebido;
- Verificação da correcção de cada passo (intuitivamente ou por meio de um raciocínio dedutivo):
- Reformulação da estratégia se necessário (com base nas ideias ocorridas na fase anterior);
- Avaliação da razoabilidade da solução, isto é, certificação de que a solução matemática obtida é efectivamente solução do problema.
- Apresentação por escrito da resolução e da resposta ao problema.

↓

Rever a resolução e reflectir sobre o processo de resolução

Esta fase diz respeito a um "olhar para trás". Abrange a revisão do caminho seguido e a reflexão sobre o processo de resolução de forma a melhorá-lo, a aprofundar a compreensão sobre a resolução (e.g. potencialidades e alcance da estratégia seguida) e investigar as conexões do problema com outras situações. Inclui:

- Apreciação do caminho seguido, isto é, da forma como se chegou à solução; Percepção do alcance da estratégia seguida;
- Procura de ligações a conhecimentos já anteriormente adquiridos;
- Reflexão sobre o próprio processo de pensamento;

2.2.2.2. Raciocínio Matemático

Uma das características fundamentais da actividade matemática e, consequentemente, da resolução de problemas é a utilização de algum tipo de raciocínio, aditivo, multiplicativo, espacial, proporcional ou outro (Ball e Bass, 2003).

> Matemática é raciocínio. Ninguém pode fazer matemática sem raciocinar (…) Para dar a um maior número de alunos o acesso à matemática como uma via poderosa de interpretar o mundo, é essencial que a ênfase no raciocínio seja estendida a toda a actividade matemática (Mayer, 1985 in NCTM, 1991).

A ideia de aprendizagem compreensiva da matemática põe a tónica no desenvolvimento do raciocínio ao longo de todas a escolaridade, pois este é a base de qualquer actividade matemática. Quando os alunos exploram e resolvem problemas ou quando justificam ou avaliam as explicações apresentadas pelos seus pares, estão envolvidos em formas de raciocínio, mais ou menos formais, de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo. Qualquer justificação matemática faz apelo ao raciocínio, é o raciocínio que permite ao aluno o uso flexível de ideias, conceitos e procedimentos e é também o raciocínio que permite ao aluno reconstruir conhecimento quando algo o suscita (Ball e Bass, 2003). Assim, impõe-se que desde os primeiros anos de escolaridade se dê atenção à criação de hábitos de raciocínio, incentivando os alunos a apresentar justificações para as suas afirmações, soluções e processos de resolução usados nos problemas, a sujeitar essas justificações à crítica (NCTM, 1991, 2000). Porém, como salientam Ball e Bass (2003), o nível de justificação exigido não se pode limitar a pedir aos alunos que expliquem o seu pensamento. De facto, o raciocínio matemático associado a uma justificação assenta em dois pilares: o conhecimento matemático estabelecido e a linguagem matemática. Pelo que, os alunos têm de aprender, de acordo com o seu desenvolvimento intelectual, a usar definições de conceitos, terminologia matemática, ideias e métodos matemáticos publicamente aceites (Ball e Bass, 2003). É exigido que os alunos percebam desde muito cedo que as afirmações matemáticas têm justificações e que sejam habituados a fazê-lo com níveis progressivos de exigência e rigor, de modo que, nos anos terminais do ensino secundário, sejam capazes de compreender, apreciar e construir demonstrações matemáticas, isto é, argumentos que estabeleçam a validade de uma afirmação a partir de um conjunto de hipóteses e fazendo uso de deduções lógicas rigorosas (NCTM, 2000, p. 56). De acordo com Niss (2003a, 2003b), possuir competência de pensamento e raciocínio matemático envolve ser capaz de: (i) Colocar questões características da matemática, por exemplo do tipo: «Haverá…?», «Se há, quantos…?», «Como encontramos …?»; (ii) Conhecer ou, pelo menos, saber como obter os tipos de respostas que a matemática oferece a estas questões; (iii) Distinguir diferentes tipos de afirmações matemáticas (definições, teoremas, conjecturas, hipóteses, exemplos, proposições condicionais); (iv) Compreender e utilizar os conceitos matemáticos na sua extensão e limites.

Na base da capacidade de identificar padrões, regularidades, estruturas ou resolver problemas, em situações do mundo real ou puramente matemáticas está o raciocínio e o pensamento matemático. Assim, sendo o raciocínio a base da actividade matemática, a preocupação com o desenvolvimento do raciocínio matemático deve ser central no ensino da matemática. O professor deve ter o cuidado de escolher e propor tarefas que criem a oportunidade e a necessidade de raciocínio (Ball e Bass, 2003).

2.2.2.3. Conexões em matemática

Embora permaneça uma certa tendência de encarar o currículo de matemática como um conjunto de temas isolados, estanques e disjunto dos currículos das outras disciplinas curriculares (NCTM, 1991, 2000), uma das principais características do conhecimento matemático é a existência de conexões intra-matemáticas e extra-matemáticas. Não é possível compreender um conceito matemático sem fazer conexões: “understanding involves making connections” (NCTM, 2000, p. 64).

A investigação sugere que para que o cidadão compreenda e consiga enfrentar com sucesso situações reais que envolvam pensamento matemático, isto é, para que esteja apto a fazer uma utilização eficiente, flexível e reflectida da matemática, o ensino da disciplina não pode descurar experiências de aprendizagem que exijam a efectiva activação dos conhecimentos e capacidades matemáticos dos alunos em problemas e situações extra-matemáticas[55] (Niss, 1992, 1994). Já Sebastião e Silva (1977, p.8,9) recomendava: “Entre os exercícios com mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas. O nosso ensino (…) peca (…) por ausência de contacto com o húmus da

[55] Niss (1992, p.2) clarifica que se refere a casos de aplicação e de modelação matemática no âmbito de uma disciplina ou actividade exterior à matemática e em que estão envolvidos objectos, fenómenos, questões e problemas que têm um interesse genuíno de uma perspectiva extra-matemática para as pessoas ligadas a essa disciplina ou actividade.

intuição e com a realidade concreta”. Ou seja, a educação matemática deve incluir, além de conceitos, procedimentos e resultados matemáticos, o modo como estes se relacionam com a realidade exterior, pois só desse modo podemos esperar que o cidadão seja capaz de praticar e analisar, de modo competente, aplicações da matemática e construir modelos em áreas exteriores à própria matemática (op. cit). Como afirma Carvalho e Silva (1992, p. 4), não é possível ensinar matemática de forma eficaz, ensinando apenas teoria:

> Como a teoria, por alguma razão, existe enraizada no mundo que nos rodeia, o ensino deve proporcionar ao aluno a oportunidade de contactar com aplicações significativas que usem os conceitos que vão aprendendo, pois só desse modo podem alcançar a sua compreensão.

Embora do ponto de vista didáctico, a abordagem em sala de aula das aplicações matemáticas possa decorrer de diferentes modos, importa ter presente que podem ser encaradas como um veículo para tornar visível aos olhos do aluno o papel da matemática no mundo, para desenvolver o seu espírito crítico relativamente aos usos amplos da matemática na sociedade passada e contemporânea (Niss, 1992, 2003a). Embora a abordagem mais comum possa consistir na sua introdução após o ensino de certos conteúdos, o que é certo é que quando somos confrontados na vida real com situações que requerem o uso da matemática, estas surgem frequentemente com contornos matemáticos mal definidos, sem qualquer indicação dos conteúdos e métodos matemáticos adequados à sua resolução (Schoenfeld, 1991; OCDE, 2003; ME-GAVE, 2004a; de Lange, 2003). Assim, uma ideia chave é que as aplicações matemáticas devem também ser usadas como o contexto a partir do qual ocorre a aprendizagem de conceitos e se desenvolvem competências (De Lange, 2003). É este o entendimento das Normas (NCTM, 1991, p. 163), nas quais pode ler-se: “os problemas e as aplicações da matemática devem ser utilizados para introduzir novos assuntos, para ajudar os alunos a desenvolver simultaneamente a compreensão de conceitos e o desembaraço nos procedimentos e para aplicar e rever processos já aprendidos”. Refira-se que esta perspectiva supõe a necessidade de focar a atenção dos alunos nas ideias matemáticas que se pretendem desenvolver através destes, isto é, de articular conteúdos e processos matemáticos e estabelecer relações entre a matemática e o mundo real (Niss, 1992).

Conexões intra-matemáticas

Por conexões intra-matemáticas entende-se as ligações entre conceitos e procedimentos, entre diferentes temas da matemática e entre diferentes representações de ideias ou problemas matemáticos.

A resolução de problemas é considerada o processo por excelência para a aprendizagem da matemática, podendo mesmo afirmar-se que se aprende matemática resolvendo bons problemas. As situações e contextos descritas nos problemas podem ser mais ou menos familiares ao aluno, contudo a investigação ressalta que sobretudo nos primeiros anos muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas com contextos familiares aos alunos (NCTM, 2000).

Bons problemas dão ao aluno a oportunidade para consolidar e ampliar os seus conhecimentos e, quando bem escolhidos, podem motivar e estimular a aprendizagem de conceitos matemáticos e a aquisição de formas de pensamento, criar hábitos de persistência e curiosidade (NCTM, 1991, 2000, Ponte e Serrazina, 2000, Schoenfeld, 2001, De Lange, 2003). Por outro lado, uma abordagem de ensino através da resolução de problemas pode facilitar e promover uma abordagem integrada da matemática, e o consequente estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas (Usiskin, 2001, De Lange, 2003). Por exemplo, o ensino tradicional dos Números ignora frequentemente as conexões internas que se podem estabelecer com temas como a Medida[56], a Geometria, as Probabilidades ou a Estatística e que esse facto tem implicações particularmente negativas para um ensino focado no desenvolvimento da literacia matemática (Usiskin, 2001). De facto, as conexões intra-matemáticas podem ser conseguidas de diversas formas. Por exemplo, diferentes interpretações dos números fraccionários podem ilustrar as ligações com a medida e com a razão, o conhecimento das áreas pode ajudar na compreensão das operações com fracções ou na resolução de problemas de proporções (NCTM, 1991). Os problemas surgem neste contexto como um campo privilegiado para a construção de ideias matemáticas e para ressaltar conexões entre ideias e tópicos matemáticos. Como salienta Rico (2006) as conexões internas reforçam a linguagem matemática, dão sentido a cada

[56] O ensino tradicional da matemática ignora, em geral, a estreita relação que existe no mundo real entre Números e Medida (perímetro – adição, área – multiplicação, conversão de unidades e multiplicação e divisão)

noção através dos vínculos com a estrutura conceptual na qual o conceito se insere e proporcionam objectividade e potencial argumentativo.

Conexões com outras áreas e com o dia-a-dia

Os programas de matemática incluem muitas oportunidades de aprender matemática a partir da resolução de problemas que surgem em contextos exteriores à matemática, tanto relativos a outras áreas ou disciplinas do currículo[57] como ao dia-a-dia do aluno ou, numa perspectiva mais lata, relativos às chamadas aplicações matemáticas terminologia que, na opinião de Carvalho e Silva (1992), pretende traduzir a profunda relação existente entre a matemática e o mundo real. Esta visão é assumida em orientações curriculares recentes quer portuguesas, quer internacionais. Por exemplo, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) releva "a exploração de conexões entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno" (p. 9). Embora não sejam apresentadas sugestões muito concretas, aponta-se, por exemplo, que a *Geometria e a Medida*, bem como a *Organização e tratamento de dados* são campos com muitas potencialidades a esse nível. Do mesmo modo, o NCTM (2000, p. 66) recomenda que as experiências matemáticas a proporcionar aos alunos de todos aos níveis de ensino devem incluir a resolução de problemas emergentes de contextos exteriores à matemática, quer relativos a outras áreas temáticas e disciplinas escolares, quer ao quotidiano do aluno. Em concreto sugere-se que os alunos do pré-escolar ao 2º ano aprendam matemática sobretudo através de conexões com situações do mundo real. Já os alunos do 3º ao 5º ano de escolaridade deverão aprender a aplicar conceitos matemáticos a outras áreas disciplinares. Ou seja, aponta-se para um ensino da matemática na escolaridade básica menos formal e mais intuitivo, menos abstracto e mais contextualizado, menos simbólico e mais concreto (de Lange, 2003).

As conexões da matemática com outras áreas e com o dia-a-dia remetem assim situações e problemas da realidade concreta surgidos no âmbito de disciplinas, profissões ou actividades que têm um interesse genuíno, em particular, para os próprios intervenientes, e, em geral, para o cidadão, na medida em que a sua resolução contribui

[57] Por exemplo, quando os alunos comunicam em matemática estão também a integrar e a utilizar língua. Quando resolvem problemas que envolvem situações e contextos relativos a outros países ou outras culturas, estão a fazer matemática e a aprender coisas novas ou reforçar aprendizagens de outras áreas o que pode contribuir também para a apreciação do papel da matemática na cultura e na sociedade.

para a tomada de decisões informadas e críticas e, em última análise, para a qualidade de vida do cidadão (Niss, 1992, 1994). Em inúmeras situações da vida real em sociedade (negócios elementares, transacções monetárias, coordenadas geográficas, medida do tempo, do espaço da massa, representações gráficas, etc.), requere-se apenas a utilização de uma ideia, uma estrutura ou resultado matemático conhecido (Ponte 1992b). Noutras, de carácter mais aberto, é necessário construir um modelo matemático, ou seja, "uma estrutura matemática que descreva aproximadamente as características de uma determinada situação ou fenómeno" (Swetz, 1992, p. 45). Perante estas últimas, o aluno pode lidar em profundidade com todo o processo de modelação, isto é, tem a oportunidade de idealizar, construir e validar um modelo matemático (Swetz, 1992). Contudo, como também recomendava Sebastião e Silva (1977, p. 9.) "o professor de matemática deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos".

Num sentido estrito, o termo modelação é usado para problemas cuja tradução matemática envolva símbolos algébricos. Porém, em níveis mais elementares da escolaridade (ensino básico e, em particular, 1º e 2º ciclos) é também possível falar em modelação se atendermos a que, perante um problema referente a um contexto real, o aluno é solicitado a realizar todas as etapas da modelação (Haylock, 2004): (1) partir de um problema do mundo real; (2) organizar o problema de acordo com conceitos matemáticos e identificar a matemática relevante de modo a transformar o problema num problema matemático que represente a situação exposta, sendo que, nos primeiros anos, o modelo matemático construído pode ser uma expressão numérica, envolvendo uma ou mais operações; (3) resolver o problema matemático e obter a solução matemática; (4) interpretar e validar a solução matemática em termos da situação real. Se a solução não fizer sentido quando confrontada com a realidade do problema original, então há que reexaminar todo o processo, isto é, repetir o ciclo para identificar o que correu mal (ME-GAVE, 2004a; Haylock, 2004).

Por exemplo, nos níveis mais elementares, problemas reais que proporcionem a aplicação de fracções, decimais, percentagens e grandes números podem enriquecer as experiências concretas de muito alunos e conduzir a uma melhor compreensão tanto da teoria como da prática (Usikin, 2001). Como afirma Savizi (2006), as aplicações podem iluminar e tornar mais tangíveis os conceitos matemáticos que estão a ser aprendidos pelas crianças. Por outro lado, a compreensão adquire nas aplicações matemáticas uma grande importância: “quem resolve o problema é compelido a definir e clarificar o problema com cuidado” (Swetz, 1992, p. 47), tanto ao nível da situação exposta pelo problema, como do próprio processo de modelação.

Hughes-Hallett (2001) chama a atenção para o facto que a compreensão do contexto é um aspecto particularmente crítico, pois a capacidade de um aluno o compreender depende muito da relação de proximidade que mantém com o campo em que o problema se insere. Um estudo conduzido pelo autor sobre o efeito do contexto no desempenho dos alunos na resolução de dois problemas com exigências matemáticas idênticas, um deles, integrado num contexto familiar e o outro num contexto científico, revelou precisamente a existência de dificuldades e fragilidades na aplicação do conhecimento matemático em contextos não familiares. Por outro lado, compreendido o contexto do problema é ainda necessário traduzi-lo da realidade para a matemática o que implica compreender as relações entre a linguagem do mesmo e a linguagem simbólica e formal (OCDE, 2003; ME-GAVE, 2004a).

Embora, do ponto de vista didáctico, a abordagem mais comum às aplicações matemáticas possa consistir na sua introdução após o ensino de certos conteúdos, o que é certo é que quando somos confrontados, na vida real, com situações que requerem o uso da matemática, estas surgem frequentemente com contornos matemáticos mal definidos, sem qualquer indicação dos conteúdos e métodos matemáticos adequados à sua resolução (Schoenfeld, 1991; OCDE, 2003, 2004; de Lange, 2003). Assim, uma ideia chave é que as aplicações matemáticas devem também ser usadas como o contexto a partir do qual ocorre a aprendizagem de conceitos e se desenvolvem competências: “os problemas e as aplicações da matemática devem ser utilizados para introduzir novos assuntos, para ajudar os alunos a desenvolver simultaneamente a compreensão de conceitos e o desembaraço nos procedimentos e para aplicar e rever processos já aprendidos” (NCTM, 1991, p. 163).

Finalmente importa ter presente que as aplicações matemáticas podem ser encaradas como um veículo para tornar visível aos olhos do aluno o papel da matemática no mundo, para desenvolver o seu espírito crítico relativamente aos usos amplos da matemática na sociedade passada e contemporânea (Niss, 1992, 1994, 2003a).

A apologia da integração na sala de aula de problemas aplicados, a partir da escolaridade básica, que envolvam, em particular, o processo de modelação, implica uma selecção cuidadosa das tarefas a propor aos alunos. Com efeito, é preciso estar ciente da necessidade de conciliar os problemas do mundo real, com toda a complexidade que lhes é inerente, com os conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Como salienta Savizi (2006), existem duas fontes principais para a pesquisa de problemas aplicados, a que inclui problemas do mundo contemporâneo dos mais variados ramos do saber e a história da matemática. Neste âmbito, a história da matemática é uma fonte que deve ser seriamente tida em conta e, em particular, para os níveis escolares mais baixos. De entre as razões apontadas destaca-se a existência de inúmeros exemplos de problemas reais ajustados ao nível de ensino dos alunos e susceptíveis de serem modelados e resolvidos por estes, que pelo seu próprio contexto podem despertar o interesse do aluno e desenvolver a percepção do papel da matemática na vida quotidiana ou na resolução de problemas concretos.

2.2.2.4. Integração da história da matemática

Anteriormente foram identificadas e discutidas algumas razões que sustentam a relevância do uso da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Importa agora discutir de que modo isso pode ser concretizado e com que finalidade, tendo sempre presente que a forma como se processa a integração e as razões por detrás desta, variam em função da idade, do nível de ensino, dos conhecimentos e capacidades dos alunos.

Começa-se por clarificar que integrar a história no ensino da matemática não é sinónimo de ensinar história da matemática (como um assunto em si). Fauvel (1991, p. 18) expressa bastante bem esta ideia dizendo que "na aula de matemática a história deve permitir ao professor explorar processos que ajudem o ensino da matemática em si, tornando-o mais rico, variado e eficaz". Citando Heppel, esclarece que "a história da matemática deve ser estritamente auxiliar e subordinar-se ao ensino da matemática e só devem ser usados aspectos que ajudem realmente o aluno". Assim, entende-se que a ajuda e enriquecimento que a história pode dar à aprendizagem da matemática passa, inevitavelmente, por dar significado ao que se ensina, ou seja pela introdução em sala de aula, da relevância social e humana da disciplina (Swetz, 1986, 1997, 2000b; Winiki, 1993, 2000).

Há, assim, que começar por discutir a forma como essa integração pode ser concretizada. Tzanakis e Arcavi (2000) distinguem duas vias distintas mas complementares: directa e indirecta.

A primeira refere-se à integração explícita da componente histórica, isto é, a abordagens que privilegiam a informação histórica directa, quer através de fontes primárias, quer secundárias. De entre as múltiplas possibilidades de integração directa da história da matemática, destacam-se a informação factual isolada (nomes, datas, acontecimentos e trabalhos famosos, frisos cronológicos, biografias, histórias ou mesmo anedotas acerca de um matemático), a visita a museus, a realização de projectos baseados em textos históricos, a visualização de filmes ou de outros materiais audiovisuais, ….), a discussão de questões e problemas famosos, o relato ou pesquisa da história do desenvolvimento de um conceito ou de um tópico (Tzanakis e Arcavi, 2000; Man-Seung, 2000). Nesta situação, o professor pode recorrer à informação histórica incluída no manual escolar dos alunos, a livros de história da matemática, à web, à visita a museus, ao visionamento de filmes, etc. Em qualquer dos casos, isso deve ser feito de forma natural, isto é, como uma parte integrante da aula, e que promova o envolvimento activo dos alunos, por exemplo, na discussão sobre um determinado assunto, na resolução de um problema histórico, na realização de uma pesquisa, etc. (Swetz, 1984). Autores como Tzanakis (1996) defendem que uma abordagem estritamente histórica não é apropriada do ponto de vista didáctico, sustentando essa opinião na aceitação de que a matemática não evolui de forma contínua e cumulativa, envolvendo períodos de inércia e de alguma confusão. Assim, se a construção de novos conceitos ou demonstrações não ocorre de forma linear e simples, não parece adequado introduzir na aula de matemática a história da descoberta de conceitos em toda a sua extensão. O mesmo já não se passa relativamente à introdução de questões, exemplos e problemas centrais desse desenvolvimento.

No âmbito da integração explícita da história da matemática, importa relevar o papel que livros antigos de matemática ou de história da matemática podem desempenhar como fontes de problemas passíveis de serem propostos em sala de aula. Como é salientado por Swetz (1995, 1996, 1997), o professor procura, frequentemente, problemas que requeiram a aplicação de certos conceitos e procedimentos, que exijam uma certa dose de interpretação e que, em simultâneo, possam despertar o interesse e a motivação para a sua resolução e, nesse âmbito, "historical excursions based on problems devised by our forebears also enliven and enrich classroom presentations" (Swetz, 1996, p.201). Apesar de o professor ter ao seu dispor problemas relativos a inúmeras situações relevantes da realidade contemporânea, o recurso a situações históricas permite que certos aspectos do desenvolvimento histórico de um assunto "become a working knowledge for the student" e, dessa forma, a história não surge em sala de aula como algo estranho à matemática propriamente dita mas como algo natural e inerente à própria matemática (Tzanakis, Arcavi et. al, 2000, p.205). Paralelamente, o uso de problemas relacionados com o currículo do aluno e que remetam para um determinado contexto histórico permite dar um significado cultural à matemática, tantas vezes ausente na aula de matemática (Winiki, 1993).

Esses problemas, constituindo-se como fontes primárias do conhecimento matemático, podem ser de vários tipos: problemas sem solução, isto é, problemas relativamente aos quais está provado não existir solução[58]; problemas famosos ainda por resolver ou resolvidos com muito esforço; problemas que motivaram e/ou anteciparam o desenvolvimento de novos domínios matemáticos; problemas com contexto puramente matemático; problemas de aplicação da matemática ao quotidiano; problemas de aplicação da matemática a outras áreas; problemas apresentados com propósitos recreativos (Tzanakis e Arcavi et al., 2000; Swetz, 2000b). Todos estes problemas que, de algum modo desempenharam um papel significativo no desenvolvimento da matemática, são designados por problemas históricos (Tzanakis e Arcavi et al., 2000; Grugnetti, 2000a; Swetz, 2000b; Avital, 1995). Alguns são problemas do domínio estrito da matemática como, por exemplo, o problema da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado de lado unitário, base para a criação dos números irracionais ou o problema colocado pelo quinto postulado de Euclides que deu origem às geometrias não euclidianas. Outros, espelham inúmeras aplicações da matemática ao quotidiano passado ou a outras áreas do conhecimento, mas são também marcos do desenvolvimento da matemática. Ilustram esta afirmação, por exemplo, os inúmeros problemas integrados em textos de aritmética um pouco por toda a Europa a partir do século XIV, cujo conteúdo aritmético e algébrico conduziu à introdução do simbolismo, ao desenvolvimento de novos métodos para lidar

[58] Os alunos podem desta forma tomar uma maior consciência de que muitos problemas têm uma resposta negativa, isto é, não têm solução. Este é um aspecto que, na opinião de Avital (1995) raramente aparece nos manuais escolares ou que quando surge o enunciado é do género "mostre que isto ou aquilo é impossível", ou seja, com uma formulação contrária ao objectivo de consciencializar o aluno de que mostrar que um problema não tem solução é resolver o problema.

com problemas algébricos complexos, à aplicação das novas técnicas algébricas a problemas teóricos provenientes dos gregos, etc. (Katz, 1998, pp. 344-345):

> Although these texts were strictly practical, they did have significant influence on the development of mathematics because they instilled in the Italian merchant class a facility with numbers without which no future advances could be made. Furthermore, some of these texts also brought to this middle class the study of Islamic algebra (…) the abacists extended the Islamic methods in several directions (…) With a growing competence in algebra (…) it was only natural that European scholars would attempt to apply these techniques to solve more theoretical problems arising from the rediscovery of many of the classic Greek.

A integração da história da matemática através de problemas históricos pode ser justificada por várias razões. A primeira, de ordem epistemológica, prende-se com o pressuposto de que grande parte da criação matemática resultou da tentativa de resolver problemas e que o ensino da matemática deve reflectir a natureza primordial da actividade matemática. Um segundo argumento tem a ver com o contributo da resolução de problemas históricos para a aprendizagem da matemática. Enquanto resolve problemas, o aluno está envolvido de forma activa numa experiência de aprendizagem matemática que pode contribuir para o desenvolvimento da sua competência matemática (ao nível da clarificação de um conceito, do aprofundamento da compreensão de conceitos e procedimentos, do desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, de raciocínio, de comunicação, …). Acresce que dar ao aluno a possibilidade de resolver problemas com contexto histórico pode imprimir à disciplina um sentido de continuidade temporal[59] e ajudar a suprir a ausência de significado cultural da matemática (Winiki, 1993, p. 283). Os problemas históricos, ao proporcionarem *insights* históricos e culturais das pessoas e da época envolvida, favorecem o estabelecimento de ligações da matemática com outras áreas do currículo (Grugnetti, 2000a; Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Swetz, 1995, 1996, 2000b) e, como tal, a possibilidade de relacionar o tópico matemático com o mundo do aluno (Winiki, 1993). De entre as múltiplas conexões da matemática com outras áreas do currículo destaca-se a física (Tzanakis, 1996), mas também a história, a geografia, a literatura, a economia, a política, etc. (Furinghetto e Somaglia, 1998).

[59] "Over the ages as the same problem or type of problem can often be found and appreciated in diverse societies at different periods of time" (Swetz, 2000b , p. 59).

Há ainda que salientar a possibilidade dos problemas históricos poderem despertar o interesse do aluno pela matemática, dando a conhecer, indirectamente, alguns aspectos da sua evolução:

> Such problems (…) transport the reader back to the age when the problems were posed and illustrate the mathematical concerns of the period. Often, these are the same concerns that occupy modern day mathematics students. This simple realization of the continuity of mathematical concepts and process over past centuries can help motivate learning. There can be a certain thrill and satisfaction for students in solving problems that originated centuries ago (Swetz, 1995, p. 25).

Investigadores como Wikini (1993) e Furingheti (1996) referem resultados de estudos envolvendo a integração de problemas históricos na aula de matemática muito promissores a este nível, tanto por parte dos professores como dos alunos envolvidos. Winiki (1993) menciona uma experiência envolvendo três professores que, ao longo de um período de seis meses, integraram na sua prática pedagógica problemas históricos directamente relacionados com o currículo leccionado (no âmbito da álgebra e geometria). Todos os professores consideraram essa experiência muito positiva, nomeadamente pelo interesse identificado nos alunos (de faixas etárias correspondentes aos 8º, 9º e 10º anos). Um dos professores menciona explicitamente que os seus alunos manifestaram muito entusiasmo com o facto de se ter estabelecido ligações com assuntos abordados na disciplina de história. Relativamente aos alunos, os resultados da análise das respostas dadas a dois questionários (um prévio à experiência e outro posterior) sugerem um incremento considerável do interesse dos alunos relativamente aos problemas históricos (no final do estudo, dos cerca de 50 % dos alunos que tinham declarado não se interessar por história da matemática, apenas 16 % mantiveram essa opinião). Furinghetti (1996) refere um estudo de caso com uma professora que introduziu em sala de aula (alunos de 10 e 11 anos) problemas que seleccionou de textos de aritmética do século XVI e que permitiu, sem que a história da matemática surgisse explicitamente, introduzir algo extra na aula de matemática: “historical insights and mathemtical insights” (ob. cit, p. 276). Kool (1993) também dá conta de uma experiência levada a cabo com jovens (entre os 12 e os 16 anos) com dificuldade de aprendizagem e pouco interessados na escola, em que com intervalos regulares, lhes propôs problemas retirados de aritméticas do século XVI. Relata o entusiasmo dos alunos na resolução de problemas e, sobretudo, a sua surpresa quando descobriam as semelhanças entre os problemas resolvidos há mais de quatro séculos e os que ainda hoje são propostos. Da confrontação com as resoluções originais, observa também a reacção de estranheza dos alunos ao perceberem que estes eram resolvidos sem recurso a simbolismo e notações matemáticas.

Finalmente, o recurso a problemas históricos permite rebater dois argumentos recorrentemente utilizados relativamente à integração da história da matemática no ensino desta disciplina e que apela à falta de tempo para cumprir os programas e às dificuldades de avaliação dessa componente (Tzanakis et al., 2000, p. 203). Aliás, ambos são facilmente rebatíveis se acolhermos a ideia de que a "history can follow the curriculum from topic to topic" e que é possível encontrar inúmeros problemas históricos directamente relacionados com o que está preconizado no currículo dos alunos (Avital, 1995, p.7). Por outro lado, a resolução de problemas é uma componente muito relevante dos currículos de matemática e, enquanto resolve problemas históricos, o aluno está envolvido de forma activa numa experiência de aprendizagem matemática (Winiki, 1993). Assim, afigura-se que o recurso a problemas históricos permite ultrapassar as duas objecções referidas, pois sendo problemas matemáticos (alguns puramente matemáticos, outros de aplicação da matemática ao quotidiano passado ou a outras áreas) permitirem favorecer a compreensão dos conceitos e processos matemáticos e desenvolver capacidades matemáticas de resolução de problemas, de pensamento e raciocínio matemático, de comunicação matemática, etc. Paralelamente, muitos deles, ao reflectirem as necessidades imediatas das sociedades e o papel da matemática na vida quotidiana passada, favorecem o estabelecimento de ligações entre a matemática e outras disciplinas do currículo, beneficiando de uma abordagem interdisciplinar (Barbin, 2000a; Grugnetti, 2000a; Tzanakis et al., 2000; Swetz, 2000b).

Uma segunda via para a integração da história da matemática, conhecida por abordagem genética, encara-a como uma fonte de ideias para a abordagem didáctica de um determinado tópico, seja porque a sua aprendizagem envolve dificuldades que a história pode ajudar a ultrapassar ou porque se pretende proporcionar conhecimento adicional que permita ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão mais alargada do tópico em questão (Menghini, 2000). A abordagem genética é inspirada nas etapas fundamentais do desenvolvimento histórico de um assunto e, de acordo com Tzanakis (1993, 1996), tem essa designação porque parte do pressuposto de que a abordagem de um assunto matemático deve ocorrer apenas após este ter sido motivado de forma natural: "A subject is studied only after one has been motivated enough to do so, in the sense that questions and problems to which this teaching may answer have been sufficiently appreciated"

(Tzanakis, 1996, p. 96). Assim, mais do enfatizar teorias, métodos e conceitos, a abordagem genética procura ser uma abordagem de ensino inspirada e sustentada no desenvolvimento conceptual do tópico a ensinar que procura tornar claras as motivações por detrás da introdução de novos conceitos, ideias chave ou teorias. De entre as vantagens desta abordagem de ensino destacam-se vários aspectos: a possibilidade de a história ser introduzida através de uma formulação actual e familiar aos alunos; a resolução de problemas é indispensável para a compreensão de qualquer assunto matemático, pelo que é uma componente indispensável da abordagem genética; a possibilidade de recorrer a muitos exemplos concretos e relevantes (aspecto nem sempre presente no ensino da matemática) e, naturalmente, a presença forte de muitas conexões com outros domínios da matemática (Tzanakis, 1993).

A abordagem genética exige do professor um conhecimento geral da história do assunto a abordar e a identificação dos passos chave da sua evolução histórica (Tzanakis, 1996) e implica uma transposição didáctica que envolve sempre alguns riscos, um dos quais é o do professor seguir demasiado a via histórica (Menghini, 2000). Um segundo risco está relacionado com a tradução e reinterpretação feita pelo professor quando se procura fazer um ajustamento didáctico de situações históricas para uma linguagem que seja compreensível para o aluno. Embora possa fazer uso de informação histórica directa, este tipo de abordagem, ao recorrer prioritariamente a uma integração implícita da componente histórica, pressupõe, por parte do professor não só competência histórica, como também competência didáctica, o que surge como um dos principais obstáculos ao seu uso (Menghini, 2000). De facto, após se terem identificado os passos cruciais da evolução histórica do tópico (ideias chave, questões e problemas), é necessário, de seguida, reconstitui-los de modo a torná-los didacticamente apropriados para o uso em sala de aula sob a forma de “sequences of historically motivated problems of an increasing level of difficulty, such that each one built of some of its predecessors” (Tzanakis, Arcavi et al., 2000, p. 209). Porém, como também é acrescentado por Tzanakis (1993, p.271), “any course or textbook following a genetic approach can be kept to a razonable size”.

Schubring (1997) defende que a abordagem genética constitui, em particular, uma forma realista de introduzir a história da matemática na formação de professores, na medida em que esta abordagem é dirigida para o desenvolvimento de um meta saber que tem implicações decisivas para o ensino. Argumenta ainda que, deste modo, ao aprofundar a compreensão que o professor possui da disciplina, assume também como função "orientar os professores na organização dos conteúdos para as aulas e na integração e interpretação das contribuições dos alunos" (op.cit., p.158).

Em súmula, os problemas históricos afiguram-se como recursos muito promissores para a integração efectiva da história da matemática no ensino da matemática (Tzanakis, Arcavi et al., 2000; Grugnetti, 2000a; Swetz, 1995, 1996, 2000b; Wikini, 1993, 2000; Avital, 1995). "These problems let us touch the past, but they also enhance the present. Their content reveal the mathematical traditions that we all share" (Swetz, 2000b, p. 65) mas exigem novos papeis para o professor.

2.2.2.4. Papel do professor

No quadro 2.1. procuramos sintetizar os atributos dominantes de uma perspectiva de ensino da matemática centrada na resolução de problemas, defendida por vários organismos nacionais e internacionais ligados à educação em matemática (e.g. ME, 2001, OCDE, 2003, 2004; NCTM, 1991, 2000; APM, 1986) e por matemáticos e educadores matemáticos (Guzmán, 1993, 1993, Abrantes et al., 1999, Abrantes, 1996). Por considerar que esta apresenta pontos comuns com a perspectiva de ensino por pesquisa, que em Portugal foi apresentada e defendida com muito detalhe por Cachapuz, Praia e Jorge (2002), tomamos esta última como referência principal e como ponto de partida para a sua caracterização. Salienta-se que ela se organiza e estrutura em torno de seis indicadores: (i) finalidades do ensino da matemática na escolaridade básica; (ii) vertente epistemológica; (iii) vertente de aprendizagem; (iv) papel do professor; (v) papel do aluno e (vi) caracterização didáctica.

Quadro 2.1. Principais características da perspectiva de ensino da matemática centrada na resolução de problemas (adaptado de Cachapuz et al., 2002)

Indicadores	**Características**
Finalidade do ensino da matemática	• Desenvolvimento da literacia e competência matemática; • Ênfase na educação em matemática[60].
Vertente epistemológica	• Visão contemporânea da ciência/matemática que atende às dimensões interna e externa da produção e justificação do conhecimento, o que inclui a prática dos matemáticos, a história e as aplicações da matemática, e ainda questões de natureza axiológica e aspectos sociais e culturais. • Valorização: da resolução de problemas; do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática; da história da matemática e dos contextos sócio-culturais de produção do conhecimento; • Considera o erro como consubstancial ao conhecimento.
Vertente de aprendizagem	• Ênfase na resolução de problemas; • Baseada em perspectivas sócio-construtivistas de raiz cognitivista; • Conhecimento para a acção.
Papel do professor	• O professor como proponente dos problemas deixa o processo de resolução em aberto; • O professor como problematizador de saberes assume uma função de questionamento e de orientação da actividade do aluno; • O professor como fomentador da motivação e do envolvimento dos alunos nas actividades a realizar.
Papel do aluno	• Aluno activo no sentido em que manipula objectos matemáticos, activa as suas capacidades de pensamento matemático e a sua criatividade; • Aluno que reflecte criticamente sobre o seu pensamento, a sua forma de agir e de sentir, a fim de melhorá-los.
Caracterização didáctica	• Proposta de problemas (mais ou menos abertos) com foco preferencial em situações que envolvam a aplicação da matemática ao mundo real e que tenham sentido para o aluno (experiências vividas ou que envolvam a aplicações da matemática noutras disciplinas do currículo), valorizando deste modo o papel da matemática na sociedade e na cultura; • Método de ensino centrado na resolução de problemas, ou seja, a resolução de problemas é encarada como um processo cognitivo de aprendizagem. Através desta metodologia, o aluno constrói conhecimento matemático (conceptual e processual) e, simultaneamente, desenvolve competências matemáticas (de resolução de problemas, de raciocínio, de comunicação, …) • Abordagem do problema, de forma a assegurar a sua adequada conceptualização e resolução; • Actividades de síntese e reflexão crítica; • A avaliação das aprendizagens engloba conceitos, capacidades e atitudes relativos à matemática; • A avaliação é parte integrante do ensino e incide sobre os produtos do ensino, isto é, sobre as mudanças ocorridas em função das aprendizagens e sobre os processos de ensino/aprendizagem.

[60] Na escolaridade obrigatória, na linha do preconizado por Cachapuz et al. (2002, p. 46), uma educação matemática orientada para a aquisição de cultura (literacia) matemática deve ser centrada no aluno e na aprendizagem dos saberes disciplinares através de temáticas inter/disciplinares e, eventualmente, situações problema que contextualizem e humanizem a matemática escolar e, consequentemente, possam despertar o interesse e o gosto pelo seu estudo.

A perspectiva de ensino da matemática centrada na resolução de problemas não é sinónima de ensino da resolução de problemas, nem de um ensino em que os problemas surgem como factor de motivação externa ou como aplicação dos conhecimentos matemáticos aprendidos ou apenas como uma forma de introdução a novos temas. Como salientam vários autores (Guzmán, 1993; Abrantes, 1996; Lester, 1997; Cabrita, 1998, Vale, 2000,) um ensino centrado na resolução de problemas, aliando todas estas características, está estreitamente relacionado com a valorização da aquisição de processos de pensamento eficazes na resolução de verdadeiros problemas, com o ambiente de trabalho e com a natureza das tarefas propostas ao aluno. Guzmán afirma que tal perspectiva de ensino "põe a ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e toma os conteúdos matemáticos, cujo valor não deve de modo algum pôr de lado, como o campo de operações privilegiado para a tarefa de aprender com formas de pensamento eficazes" (Guzmán, 1993, p. 19). Esta era também a visão de Sebastião e Silva (1977) presente em inúmeras das suas reflexões didácticas profundamente actuais e desafiadoras:

> Um dos principais deveres do ensino é ensinar o aluno a pensar (p. 176).
>
> Todo o problema novo, com interesse, tem uma ideia-chave, um abre-te Sésamo que ilumina o espírito de súbita alegria (…) é esse momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: Só por essa porta se entra no segredo da matemática (…) Ensino vital de ideias, eis o que se impõe – em vez de exposição mecânica de matérias (p. 8).

Assim, num ensino centrado na resolução de problemas, o professor tem um papel fundamental, não só na selecção das tarefas a propor na aula, como também na forma como orienta as actividades desenvolvidas pelo aluno (Vale, 2000). De facto, trata-se de uma abordagem de ensino da matemática que é consistente com uma visão de aprendizagem sócio-construtivista, em que a aprendizagem resulta da construção activa de significados e compreensões por parte do aluno, com os outros, e em que o professor (sobretudo o da escolaridade básica) assume fundamentalmente o papel de facilitador da aprendizagem. Nesse sentido, o professor deve procurar estimular o pensamento matemático dos alunos através do questionamento e da discussão, ajudando os alunos a ultrapassar dificuldades e obstáculos e perseguindo como finalidade última o desenvolvimento da capacidade de resolução autónoma dos problemas (Pólya, 2003). Também Sebastião e Silva (1977) fez recomendações nesse sentido "é essencial que o aluno consiga, ele próprio, *sem ajuda, resolver exercícios*[61] pela primeira vez (p.8). Guzmán (1993) acrescenta que cabe ao professor dirigir e incentivar a participação do aluno, “sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo” (p. 20). Para tal, é inquestionável, a necessidade de o professor ter, ele próprio, uma experiência considerável em resolução de problemas, conhecer a fundo o processo de resolução de problemas e ser capaz de interpelar os alunos de modo a orientá-los para a execução das operações mentais necessárias à resolução (Pólya, 2003). A investigação desenvolvida tem revelado que o facto dos alunos poderem enveredar por caminhos não previstos previamente pelo professor é uma fonte de insegurança e um obstáculo muito sério que muitos professores têm dificuldade em ultrapassar e que se agudiza quando o professor não domina compreensivamente a matemática. Guzmán (1993) acrescenta que uma das principais dificuldades que o professor enfrenta quando tenta concretizar um ensino centrado na resolução de problemas é a conciliação da componente heurística, ou seja, a atenção a dar aos processos de pensamento, com a componente dos conteúdos matemáticos específicos. Menciona, a este propósito, a existência de obstáculos concretos em aplicar o espírito da resolução de problemas à transmissão dos conteúdos de matemática estipulados nos currículos dos vários níveis, o que se traduz frequentemente por situações práticas em que o professor, em determinados dias da semana, se dedica a ensinar estratégias particulares e modos de proceder específicos da resolução de problemas e, os dias restantes, são dedicados à transmissão os conteúdos matemáticos, num claro divórcio entre as duas componentes (Guzmán, 1993). Por isso, sugere que quando o professor é confrontado com a necessidade de ensinar um determinado tópico (por exemplo, a proporcionalidade) a sua primeira preocupação deverá ser proporcionar uma assimilação dos principais esquemas mentais do campo. Para tal, deve partir de uma situação problema a partir da qual surge o tópico (situação essa baseada na história, em aplicações, em modelos, em jogos, …). Segue-se a manipulação autónoma pelos alunos que conduza à familiarização com a situação, à identificação das dificuldades, à elaboração de estratégias possíveis de resolução, ao seu aperfeiçoamento, à apresentação de ferramentas elaboradas ao longo da história (conteúdos motivados), para então se passar à escolha de estratégias, à resolução do problema, à reflexão sobre o processo de resolução, à formalização (se necessário), à

[61] É claro que não se refere apenas a tarefas visando a aquisição de técnicas /procedimentos. Refere-se também, em particular a problemas e a aplicações matemáticas.

generalização, a novos problemas, a possíveis transferências de resultados, de métodos, de ideias, etc.

Por outro lado, Ernest (1989) sustenta que o modelo de ensino implementado pelo professor depende de um conjunto de elementos chave que se entrecruzam, nos quais inclui, para além do conhecimento matemático do professor, as suas concepções sobre a natureza da matemática[62] e sobre o seu ensino[63] e aprendizagem[64], o contexto social em que decorre a prática de ensino e o nível de pensamento e reflexão do professor sobre a sua prática de ensino. Acrescenta que, no quadro de uma abordagem centrada na resolução de problemas, a adopção de um papel de facilitador da aprendizagem dos alunos requer, por parte do professor, uma profunda reflexão sobre a sua prática de ensino da matemática, nomeadamente sobre o papel do professor e do aluno e o ambiente de aprendizagem.

Em súmula, espera-se do professor o desempenho de um papel de tutoria, isto é, de mediador que ajuda os alunos a avançar. Para tal, cabe ao professor a função de conduzir o diálogo em sala de aula e determinar o sentido da comunicação. Simultaneamente, enquanto proponente dos problemas, deve deixar o processo de resolução em aberto (Vale, 2000, p. 59), enquanto problematizador de saberes, deve assumir uma função de questionamento e de orientação da actividade do aluno e, finalmente, cabe-lhe fomentar a motivação e o envolvimento dos alunos nas actividades a realizar. Como afirma Guzman (1993a), este último papel deve ser assumido numa perspectiva que resulta do interesse da própria matemática e das suas aplicações, ou seja, numa perspectiva que dê conta dos impactos da cultura, da história, dos desenvolvimentos sociais e das diversas ciências sobre a matemática**.**

Do aluno, espera-se também uma atitude diferente da tradicional postura passiva como receptor do conhecimento. Exige-se um aluno activo no sentido em que manipula objectos matemáticos, activa as suas capacidades de pensamento matemático e a sua criatividade, isto é, capaz de trabalhar de forma autónoma em grupo (em díade ou em pequenos grupos) ou individualmente, com maior ou menor apoio do professor. E, ainda, que crie hábitos de reflexão crítica sobre o seu pensamento, sobre a sua forma de agir e de sentir, a fim de melhorá-los (Cachapuz et. al, 2002, Guzmán, 1993).

[62] Entendida como o sistema de crenças do professor relativamente à natureza da matemática como um todo.
[63] Modelos ou visões sobre a natureza do ensino da matemática.
[64] Visão sobre o processo de aprendizagem da matemática.

2.3. Formação Inicial de Professores de Matemática

2.3.1. Desenvolvimento do conhecimento profissional do futuro professor

Nas palavras de Alarcão (1996), o fracasso de certas abordagens formativas com carácter tecnicista deu origem à valorização dos processos cognitivos e à dimensão humana na aprendizagem da profissão de professor.

De entre os impulsionadores do "paradigma reflexivo" destaca-se John Dewey, fonte de inspiração de Schön que se tornou um marco indispensável no campo da educação e da formação de professores (Alarcão, 1991). De acordo com esta investigadora, Schön, ao tentar compreender a actividade profissional, afirma que, perante contextos instáveis, indeterminados e complexos, o profissional é confrontado com a necessidade de reflectir e de dialogar com a realidade. Assim, o saber profissional é um saber-fazer sólido, teórico e prático, inteligente e criativo resultante da reflexão. Esta pode ocorrer em simultâneo com a acção (reflexão na acção) ou retrospectivamente através da reflexão sobre a acção ou da reflexão sobre a reflexão na acção. De acordo com Alarcão (1991), esta última forma de reflexão ajuda a determinar as acções futuras, a compreender futuros problemas ou a descobrir novas soluções. Em qualquer dos casos, a reflexão tem sempre como objectivo um melhor conhecimento e uma melhor actuação.

O desenvolvimento da capacidade reflexiva assume, deste modo, uma função fundamental no desenvolvimento profissional do professor, implicando a implementação de estratégias de formação que valorizem o conhecimento que advém da prática reflectida. Nesse sentido, os processos de formação devem envolver os professores "num processo pessoal, de questionação do saber e da experiência numa atitude de compreensão de si mesmo e do real que o circunda" (Alarcão, 1996, p. 181).

As actuais perspectivas de formação de professores, de natureza reflexiva, apontam a que a formação inicial de professores deve criar condições que estimulem a criação de posturas reflexivas sobre a sua própria aprendizagem e sobre a prática profissional.

Integrado nas perspectivas gerais de formação de professores, de tendência reflexiva, como salienta Ponte (2002, p. 62), "o professor é, antes de mais, uma pessoa que ensina qualquer coisa a alguém" e, portanto, a essência da actividade docente pode encontrar-se na relação que se estabelece, num determinado contexto social, institucional e político, entre o professor, o aluno e a disciplina que ensina. Quando falamos de ensino, está subjacente a ideia de que este tem sempre como objecto a aprendizagem e, como tal, perde sentido tratar isoladamente dois conceitos que estão profundamente interrelacionados. Ressalta-se, porém, que não existe necessariamente uma relação de causa e efeito entre o ensino e a aprendizagem e que o ensino não é uma condição suficiente para que ocorra aprendizagem. Assim, entende-se por ensino tudo o que o professor faz para apoiar a aprendizagem dos seus alunos, o que inclui a prática de ensino em sala de aula e todas as tarefas nela envolvidas, como, por exemplo, a planificação das aulas ou a avaliação do trabalho e das aprendizagens dos alunos (Ball et. al, 2005b).

Quando nos centramos em situações de prática de ensino, em que o futuro professor "interage com o aluno com a intenção explícita de favorecer a sua aprendizagem e promover o seu desenvolvimento, estamos quiçá perante uma das tarefas mais exigentes e mais marcantes da sua profissão (Ponte, 2002, p. 62). De facto, estar perante uma turma a ensinar matemática requer a mobilização de diferentes tipos de conhecimentos (Albuquerque et. al, 2006) nos quais se incluem conhecimentos relativos aos conteúdos matemáticos que pretende ensinar, ao currículo dos alunos (finalidades do ensino da matemática, objectivos curriculares,...), a teorias de aprendizagem, à forma de apresentar o conteúdo matemático de modo a que este seja aprendido e compreendido pelos alunos, etc. Nesse sentido, compreender e caracterizar o conhecimento de que o professor é portador na sua actividade docente diária é fundamental para que se possam desenvolver instrumentos para práticas de formação inicial e contínuas mais ricas e produtivas (Saraiva, 2001).

Shulman (1986), um dos primeiros autores que se interessou por esta problemática, na tentativa de compreender qual o conhecimento que os professores e futuros professores precisariam de adquirir para promoverem um bom ensino, desenvolveu um quadro teórico para analisar o conhecimento do professor. Nesse quadro, Shulman identifica e caracteriza diferentes categorias do conhecimento que se tornam particularmente relevantes para a investigação desenvolvida com futuros professores (Brown e Borko, 1992). De entre os vários domínios teorizados do conhecimento do professor, destaca-se a distinção entre duas formas de conhecimento directa e estreitamente relacionadas com a área disciplinar/científica do professor e com a prática pedagógica do professor: o conhecimento do conteúdo disciplinar (*subject-matter knowledge*) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge).*

A primeira destas categorias é definida por Shulman (1986, p. 9) como sendo "the amount and organization of the knowledge *per si* in the mind of the teacher". Incluem-se nesta categoria o conhecimento de factos, conceitos e algoritmos, bem como a compreensão dos métodos de demonstração matemática e outras formas de argumentação usadas pelos matemáticos (Brown e Borko, 1992). No âmbito da reflexão de Ball (1990) sobre a natureza e a especificidade do conhecimento do conteúdo matemático do professor, esta autora salientou que tal conhecimento deve incluir conhecimentos de e sobre matemática. Assim, além dos aspectos já referidos, requer uma compreensão explícita dos princípios e significados por detrás dos procedimentos matemáticos, uma visão integrada dos tópicos e conceitos matemáticos, e, ainda, a compreensão da natureza da matemática e da actividade matemática.

A designação de conhecimento pedagógico do conteúdo sugere uma forte interacção entre conhecimento do conteúdo disciplinar e conhecimento pedagógico, como de facto foi enfatizado pelo próprio Shulman (1986) quando afirma que se o professor não possuir um profundo conhecimento dos conteúdos que ensina, não é possível falar em *pedagogical content knowledge (PCK)*. Trata-se de uma forma de conhecimento que se refere às formas mais apropriadas para apresentar e formular os assuntos, de forma a torná-los compreensíveis pelos alunos. Inclui o conhecimento de analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações que possam contribuir para uma representação do assunto adequada aos alunos, e ainda a compreensão do que é tornar a aprendizagem de um determinado tópico fácil ou difícil (Shulman, 1986; Ball, 2000).

Uma terceira categoria introduzida por Shulman (1986) refere-se ao chamado conhecimento curricular que inclui o conhecimento das finalidades e objectos do ensino da matemática, mas também dos materiais curriculares disponíveis para apoiar o ensino de um determinado tópico, incluindo as suas vantagens e desvantagens. De acordo com Fennema e Franke (1992), no caso do professor de matemática, inclui o conhecimento de materiais manipulativos que sirvam para representar ideias matemáticas ou ainda de *software* específico.

De entre as várias designações usadas na literatura consultada para referir o *PCK* de Shulman, vários autores e investigadores optaram pela terminologia *conhecimento didáctico*, por esta dar a entender que esta forma de conhecimento pressupõe "sempre um conteúdo de ensino" (Vale, 2000, p.105) e também porque se trata de um tipo de conhecimento que é "chamado a intervir directamente na prática lectiva" (Ponte e Oliveira, 2002, p.148). Fala-se assim de um tipo de conhecimento na acção relativo à prática lectiva do professor que envolve uma profunda interacção entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento de estratégias de ensino eficazes e que requer uma profunda compreensão do conteúdo a ensinar, bem como conhecimentos ao nível da pedagogia e da psicologia da aprendizagem. De acordo com Ponte et al. (1998), o conhecimento didáctico inclui quatro vertentes, a saber, o conhecimento da matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento do processo instrucional. Relativamente à primeira vertente, Ponte e Oliveira (2002, p. 148) clarificam que não se trata do exclusivamente do conhecimento da matemática como ciência, mas sim a interpretação que o professor faz da matemática enquanto disciplina escolar, isto é, o "conhecimento e a visão que o professor tem dos aspectos específicos do saber que ensina".

Como referem Brown e Borko (1992), o professor adquire e desenvolve o seu conhecimento didáctico através da reflexão sobre o conteúdo, perante a necessidade de ensiná-lo a um determinado grupo de alunos. Isto pressupõe o professor como um profissional que reflecte sobre a sua prática e que identifica e faz os ajustamentos necessários para incrementar a aprendizagem dos alunos. Embora esta ideia seja pouco clara nos trabalhos iniciais de Shulman, posteriores clarificações ressaltaram que o conhecimento didáctico envolve um processo de reflexão na acção que é mobilizado sempre que o professor, perante uma situação de ensino imprevista, corrige e improvisa, desenvolvendo novas compreensões, intuições e disposições (Shulman. 1993, citado em Montero, 2005, p. 197).

É precisamente esta componente que constitui a marca mais distintiva do conhecimento profissional do professor e que o diferencia de outro especialista (Shulman, 1986). No caso do professor de matemática é o conhecimento didáctico que o distingue de outros profissionais como, por exemplo, de um matemático profissional (Fenemma e Franke, 1992; Brown e Borko, 1992; Ball, 2003).

Neste contexto, o conhecimento didáctico do professor manifesta-se em situações de ensino, formal ou não formal, sendo indicadores do mesmo a forma como o professor organiza e desenvolve a abordagem dos conteúdos curriculares, o que inclui a forma como envolve e motiva o aluno para o assunto em questão, o tipo e diversidade de explicações que dá ao aluno, a adopção de estratégias de ensino diversificadas, a capacidade de relacionar diferentes áreas da matemática (Ball, 2000). Essa tradução do conteúdo matemático complexo em representações acessíveis e compreensíveis pelos alunos pressupõe que o professor saiba como interpretar ou representar as ideias matemáticas que pretende que os seus alunos aprendam: "The mathematics must be translated for them [learners] so that they can see the relationship between their knowledge and the new knowledge that they are to learn" (Fennema e Franke, 1992, p. 153). De acordo com estas investigadoras, trata-se de uma forma de conhecimento que é especialmente exigida num ensino centrado em problemas e aplicações matemáticas e/ou em que se recorra a materiais manipulativos ou a representações pictóricas[65]. De facto, a mesma ideia matemática pode surgir em situações bem diferentes, exigindo-se do professor a capacidade de a identificar e representar de forma adequada para que possa promover a sua aprendizagem.

> Acredita-se que o uso de situações do mundo real e de representações concretas ou pictóricas ajuda o aluno a aprender com compreensão ideias matemáticas abstractas. Assim, para que os professores possam agir como facilitadores de uma aprendizagem compreensiva, devem saber interpretar ou representar as ideias matemáticas que desejam que os seus alunos aprendam (Fennema e Franke, 1992, p. 154).

Embora coexistam diferentes entendimentos sobre o significado de conhecimento didáctico, este inclui: (i) a compreensão das matérias que se ensinam, o que requer conhecer o significado e a justificação de conceitos e procedimentos, possuir fluência e à vontade no uso da linguagem matemática – terminologia e símbolos – e possuir ideias muito claras sobre o que é considerado uma justificação em matemática; (ii) a capacidade de representar e formular o conteúdo disciplinar de modo a torná-lo compreensivo para quem está a aprender, isto é, estabelecer conexões entre as representações usadas e os tópicos matemáticos que estas representam; (iii) a capacidade de explicar um conceito, um procedimento ou uma ideia, usando palavras que as crianças percebam, preservando o rigor e a precisão da linguagem matemática; (iv) a compreensão do que é que torna a

[65] O recurso a problemas e aplicações matemáticas e a materiais manipulativos ou a representações pictóricas oferece o contexto para a representação de grande parte da matemática escolar, sobretudo da escolaridade elementar (Fennema e Franke, 1992).

aprendizagem de um determinado tópico fácil ou difícil; (v) a capacidade de escolher e implementar estratégias de ensino que permitam não só fazer ligações entre o que os alunos já sabem e o que estão a aprender, como também para eliminar concepções erróneas; (vi) a capacidade de acompanhar e perceber o caminho seguido pelos alunos na resolução de um problema (Ball, Hill, Bass, 2005a; Lamon, 2005; Clements & Bright, 2003; Carpenter et al., 1993).

Assim, entre os indicadores em termos de conhecimentos e aptidões didácticas desejáveis e expectáveis em futuros professor de matemática, destacam-se (NCTM-NCATE, 2003a, 2003b, 2003c):

- Seleccionar e usar materiais concretos apropriados para a aprendizagem da matemática;
- Usar múltiplas estratégias, incluindo ouvir e compreender a forma como os alunos pensam acerca da matemática, para avaliar o conhecimento matemático dos alunos;
- Planear aulas e unidades de ensino visando alcançar objectivos de aprendizagem apropriados/adequados, incluindo os preconizados por documentos curriculares oficiais;
- Conhecer e usar na planificação das aulas diferentes tipos de estratégias de ensino;
- Demonstrar a capacidade para orientar a turma na resolução de problemas e no desenvolvimento da compreensão conceptual e para ajudar os alunos a desenvolver e testar generalizações;
- Promover/desenvolver aulas em que usa o potencial da tecnologia para construir a compreensão de conceitos matemáticos e desenvolver ideias matemáticas importantes.

Assim, um professor com um elevado nível de conhecimento didáctico é aquele que demonstra uma compreensão profunda dos assuntos que ensina, o que se revela através da forma clara, desafiadora e motivadora com que desenvolve esses assuntos, da flexibilidade revelada, quando necessário, em apresentar diferentes explicações do mesmo assunto e da adopção de estratégias de ensino que promovam a sua aprendizagem e que actua, portanto, como um facilitador da aprendizagem (NCATE, 2006, p. 15).

Brown e Borko (1992), baseando-se numa revisão de literatura sobre estudos no âmbito da temática da cognição do professor de matemática, afirmam que os mesmos proporcionaram um conjunto de dados e resultados consistentes sobre as diferenças em termos de conhecimento, pensamento e acções de professores experientes e de professores principiantes (futuros professores ou no início da sua actividade docente). Dos resultados ressaltam várias conclusões sobre as práticas pedagógicas: os professores experientes revelam, no ensino da matemática, maior conhecimento do conteúdo, didáctico e pedagógico e revelam também sistemas conceptuais de organização e gestão desse conhecimento mais elaborados e interconectados que os professores principiantes, o que se manifesta numa maior eficiência no processamento de informação, quer durante a planificação da actividade lectiva quer no decorrer desta. Sobressai também como conclusão que o conhecimento didáctico está relativamente pouco desenvolvido em professores principiantes/mais jovens, o que limita a sua capacidade de mudar o rumo da aula, de improvisar, de dar exemplos ou explicações não previstos nas suas planificações. Como salientam Brown e Borko (1992, p. 213) enquanto o conhecimento didáctico de professores experientes inclui um amplo conjunto de explicações, demonstrações e exemplos poderosos para representar as ideias matemáticas, os professores principiantes desenvolvem essas representações à medida que se envolvem na planificação de cada aula. Porém, como as suas capacidades de raciocínio pedagógico estão menos desenvolvidas do que nos professores experientes, a planificação é frequentemente levada a cabo de forma ineficiente.

Nesse sentido, nos últimos anos, a comunidade de investigação em educação e, em particular, em educação matemática, começou a centrar-se na problemática da formação inicial de professores e a reclamar a relevância que a formação de professores deve dar ao desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino (*mathematical content knowledge for teaching)*, reforçando o peso da componente de conhecimento matemático para o conhecimento didáctico do professor (Hill e Ball, 2004; Ball, 2000; Ma, 1999). De entre as várias recomendações, sobressai a necessidade de a formação inicial de professores dar uma atenção especial à formação matemática do futuro professor, defendendo-se, porém, que esse conhecimento não é do mesmo tipo que é requerido a um gestor, a um engenheiro ou a um matemático profissional: "making good decisions about the appropriate pedagogy to use depends on teachers having solid knowledge of the subject" (Ball, Hill e Bass, 2005a). De facto, na sua profissão, o professor é confrontado com a necessidade de explicar aos alunos ideias, procedimentos e relações, mas também com a necessidade de seleccionar exemplos, responder às perguntas dos alunos ou ser capaz de pensar a partir da perspectiva do aluno. Cada uma dessas tarefas que envolvem tanto de raciocínio matemático, como de pensamento pedagógico (Ball, Hill e Bass, 2005), tornam muito específico o conhecimento matemático do professor e diferenciam-no do conhecimento requerido para o exercício das profissões citadas. Nesse sentido, preconiza-se que a formação inicial de professores deve dar uma atenção especial à articulação entre conhecimento do conteúdo e conhecimento didáctico do professor, direccionando-se para formas do conhecimento de conteúdo mais estreitamente relacionadas com o ensino de conteúdos específicos.

Esta recomendação torna-se particularmente relevante para a formação de professores da escolaridade básica, na medida em que a investigação tem vindo a salientar que o conhecimento matemático dos professores dos primeiros anos não é muito adequado ao ensino da matemática que é proclamado pelos currículos e pelas organizações ligadas à educação matemática (Fennema e Franke, 1992; Brown e Borko; 1992; Ma, 1999; Ball, 1990). Embora não existam evidências que sustentem a existência de uma relação directa entre o conhecimento de conteúdo do professor e a aprendizagem dos alunos, alguns estudos têm salientado que quando o professor possui compreensão conceptual isso reflecte-se de forma positiva no seu ensino.

2.3.2. Orientações para a formação inicial de professores de matemática para a escolaridade básica

Muita da investigação desenvolvida, sobretudo a partir da década de 90 do séc. XX, sobre formas do conhecimento profissional do professor, evidenciou a existência de muitas fragilidades e insuficiências na formação específica para o ensino da matemática. De facto, diversas investigações, desenvolvidas sobretudo nos EUA, centradas no conhecimento matemático do professor e do futuro professor de matemática, sobretudo da escolaridade básica, evidenciaram a existência de um hiato entre a componente de formação matemática dos programas de formação inicial e a matemática escolar que os futuros professores vão ensinar. De entre as principais conclusões, sobressai a ideia que os conhecimentos matemáticos dos futuros professores e também de muitos professores em exercício se resumem basicamente ao conhecimento de conceitos, algoritmos ou procedimentos matemáticos, sendo poucos aqueles que sabem justificar um algoritmo, uma fórmula ou um procedimento, ou conhecem conexões entre ideias ou conceitos matemáticos, ou mesmo possuem alguma compreensão sobre a natureza da matemática (Veloso, 2004; Fennema e Frank, 1992; Brown e Borko, 1992). Como é salientado por Veloso (2004), vários desses estudos permitiram pôr em causa alguns pressupostos correntes relativos à componente de formação matemática dos candidatos de professores e que tem vigorado também em Portugal. O primeiro é o de que o conteúdo da matemática escolar (sobretudo da escolaridade básica) é simples, isto é, que para se ensinar basta saber definir conceitos e executar correctamente procedimentos. Também é corrente admitir-se que o conhecimento matemático adquirido no ensino básico ou secundário é suficiente para a preparação matemática dos futuros professores, o que é confirmado, por exemplo em Portugal, pelas reduzidas percentagens da componente específica de matemática, nos currículos de formação de professores para o 1º CEB[66]. Finalmente, admite-se que uma formação em matemática superior (universitária) assegura o conhecimento matemático para o ensino. Já nos finais do século XIX, Félix Klein (citado em Veloso, 2004) notava que, em geral, os professores universitários não estabelecem qualquer tipo de conexão com a matemática escolar, a matemática aprendida na escola, por não ser necessária, é naturalmente esquecida. Paralelamente, parece não existir qualquer ligação entre a matemática estudada na universidade e a matemática escolar. Ou seja, os estudos matemáticos universitários, perspectivados desta forma, pouca ou nenhuma influência exercem sobre o ensino, nem ao nível do conteúdo nem das metodologias de ensino. Aliás, a investigação realizada sobre a relação entre o número de disciplinas universitárias concluídas pelos professores e o seu conhecimento matemático não têm sido conclusivas (Fennema e Franke, 1992; Brown e Borko, 1992).

[66] Até 2007, nas Escolas Superiores de Educação públicas, a componente de formação em Matemática e Didáctica da Matemática situava-se entre 5,6% e 9,5% nos cursos de formação inicial de professores do 1º ciclo e entre os 20% e os 30% nas variantes de Matemática/Ciências da Natureza para o 2º CEB (Albuquerque et. al, 2006, p. 26).

Este problema, que juntou pela primeira vez e de forma consistente, matemáticos e educadores matemáticos[67], tem sido alvo de muita investigação e reflexão. Destas, sobressaem alguns consensos sobre o que deve ser a formação dos professores para o ensino da matemática nos vários níveis de ensino, nomeadamente a aceitação generalizada da necessidade de a componente de formação matemática contribuir para o real e efectivo desenvolvimento de conhecimentos de e sobre matemática. O primeiro aspecto consensual é que o conhecimento matemático considerado essencial para um ensino compreensivo da matemática, em concordância com as orientações curriculares actuais, exige uma sólida e consistente formação matemática dos futuros professores. Efectivamente, um ensino que promova o desenvolvimento da literacia e competência matemática do aluno, requer, igualmente, professores com um alto nível de literacia e que sejam capazes de transformar, de um modo adequado e acessível ao aluno, o seu próprio conhecimento e compreensão da disciplina (Abd-El-Khalick e BouJaoude, 1997). Anderson (1989 in Brown e Borko, 1992, p.220) conceptualiza, na linha do teorizado por Bereiter e Scardamalia (1987), dois níveis de literacia do professor, um alto e outro baixo. Um professor com um elevado nível de literacia é aquele que possui uma compreensão profunda da sua área disciplinar e que deve ser capaz de:

> Think deeply and flexibly about the relationships among facts, concepts, and procedures that constitute the structure of knowledge in the discipline, about the many functions that the content to be taught might have in the classroom and outside, and about the many different forms or levels of understanding that students exhibit as they develop disciplinary knowledge (Anderson, 1978 in Brown e Borko, p. 220).

Este mesmo autor afirma que, em geral, o nível de literacia dos futuros professores é relativamente baixo ou, nos casos em que este é mais elevado, é mais latente do que manifesto. Nesse sentido, considera imperiosa a realização de mudanças nos programas de formação inicial de professores que apoiem o desenvolvimento da literacia nas suas áreas de docência. Como salienta Carvalho e Silva (2002, p. 17): ”o problema da literacia matemática é em grande parte um problema da matemática que se ensina e de como ela é

[67] Referimo-nos aos Estados Unidos da América. Em Portugal isso também está a acontecer, embora com pouca participação da comunidade matemática (ainda que alguns matemáticos se manifestem, existe muita pouca colaboração entre essa comunidade e a de Educação Matemática). Neste âmbito, e a título de exemplo de iniciativas recentes, refira-se o encontro promovido pela Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação/Secção de Educação e Matemática, do qual resultou a publicação, em 2004, da obra *A Matemática na Formação do Professor* (A. Borralho et al. (Org.), 2004). Ou ainda, a recente publicação – *A Matemática na Formação Inicial de Professores* (Albuquerque et al., 2006) – da responsabilidade de um grupo de trabalho, integrando elementos indigitados pela secção da SPCE, acima referida, e pela Associação de Professores de Matemática.

ensinada (…) Pelo que toda a formação de professores de matemática é também um eixo importante de ataque ao problema da literacia".

De entre as muitas sugestões e propostas avançadas sobre o que se deve ser a formação dos professores que terão a seu cargo, desde os primeiros anos, o ensino da matemática (mesmo que esta se integre num programa de formação de professores para a docência de várias áreas disciplinares) sobressaem algumas divergências. Alguns defendem que é necessário reforçar a componente de formação em matemática (maior peso dessa componente nos currículos). Outros defendem a realização de um exame de acesso à profissão demonstrativo da competência profissional do candidato a professor. Outros, porém, sugerem que, mais do que isso, importa que existam disciplinas de matemática especificamente concebidas para professores, isto é, em que os conceitos da matemática escolar devem ser revisitados de um ponto de vista superior (CBMS, 2001, Veloso, 2004, Loureiro, 2004, Albuquerque et al., 2006). Há também quem preconize a necessidade de o processo de creditação dos programas de formação incidir também sobre cada uma das áreas de docência do professor (NCTM-NCATE, 2003a, 2003b, 2003c).

Contudo, como referem Fennema e Franke (1992), a investigação realizada tem fornecido pouco suporte para o estabelecimento de uma relação directa entre o conhecimento que os professores têm do conteúdo matemático (medido através do número de disciplinas ou de testes) e a aprendizagem dos alunos.

> Although many studies demonstrate that teachers' mathematical knowledge helps support increased student achievement, the actual nature and extent of that knowledge –whether it is simply basic skills at the grades they teach, or complex and professional specific mathematical knowledge – is largely unknown (Ball, Hall, Bass, 2005a, p. 16).

Fennema e Franke (1992) referem alguns estudos que tentam estabelecer relações entre o conhecimento matemático que os professores possuem e a aprendizagem dos alunos, através do ensino em sala de aula. Todos os estudos apontam que o que os professores fazem em sala de aula surge como mediador entre o seu conhecimento de conteúdo dos professores e a aprendizagem dos alunos e três desses estudos sugerem que o conhecimento de conteúdo influencia o que o professor faz em sala de aula. Porém, qual a natureza desse impacto e qual o reflexo na aprendizagem dos alunos, são questões ainda em aberto. No entanto, a investigação realizada permitiu pôr em causa três pressupostos correntes relativos à formação de professores: (i) o conteúdo da matemática escolar é simples, isto é, para se ensinar basta saber definir conceitos e executar correctamente procedimentos. (ii) o conhecimento matemático adquirido no ensino básico ou secundário é suficiente para a preparação matemática dos futuros professores, sobretudo, dos primeiros anos de escolaridade; (iii) estudos de matemática superior (universitários) asseguram o conhecimento matemático para o ensino (e.g. Veloso 2001, Loureiro 2001).

Um relatório publicado em 2001 pelo *Conference Board of Mathematical Sciences*[68] (CBMS, 2001), fruto de profunda reflexão sobre formação inicial de professores e fundamentado em resultados e recomendações de investigação em educação matemática, sobretudo a partir da década de 90, apresenta um conjunto de recomendações, bem como propostas para a sua operacionalização que põem a tónica em dois aspectos profundamente interrelacionados, a base intelectual da matemática escolar e a natureza específica do conhecimento matemático necessário para o ensino[69]. Também o *National Council of Accreditation of Teachers Education* (NCATE), em parceria com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), estabeleceu um conjunto de normas, *NCATE/NCTM Program Standards*, relativas aos aspectos sobre os quais deve recair a creditação dos programas de formação inicial de professores (NCTM-NCATE, 2003a, 2003b, 2003c[70]). Embora não se trate de documentos prescritivos do que deve ser a formação de professores de matemática, torna-se relevante salientar a ênfase colocada em três componentes consideradas indispensáveis na preparação para ensinar matemática: formação matemática, formação didáctica e formação prática[71].

Em qualquer dos documentos referidos, uma das primeiras recomendações é a de que a componente de formação matemática deve ser ajustada ao nível de ensino para o qual o programa de formação inicial prepara os seus diplomados:

> The mathematics needed by prospective middle grades teachers encompasses the mathematics needed by prospective teachers in a lower grades, but extended in several

[68] Engloba dezasseis associações profissionais ligadas quer à Matemática, quer à Educação Matemática norte americanas (inclui associações muito prestigiadas pelos seus pares, como a American Mathematical Society, a Mathematical Association of America ou o National Council of Teachers of Mathematics).
[69] Esse relatório, se bem que diga respeito à realidade norte americana, constitui na opinião de Veloso (2004) um documento incontornável em qualquer estudo que envolva a formação inicial de professores de Matemática.
[70] Essas normas são organizadas por níveis de ensino – elementary, middle level e secondary level.
[71] Um aspecto que merece destaque nestas orientações para a formação matemática dos futuros professores é a sintonia entre estas e as orientações curriculares para a matemática escolar preconizadas nos Standards (NCTM, 2000), assumindo-se esse documento como um guia para o é expectável dos futuros professores em termos de competência matemática (Ponte, 2004).

> important ways to reflect the more sophisticates mathematics curriculum of the middle grades (CBMS, 2001, p. 99).

Ainda que existam algumas diferenças em termos da extensão e profundidade dos conteúdos matemáticos a abordar, Ponte (2004) salienta a proximidade entre o perfil de desempenho definido para professores da escola elementar e da escola média. Independentemente do nível de ensino do futuro professor, destaca-se como recomendação uma abordagem da matemática como um corpo unificado, que permita salientar que os seus conceitos, procedimentos e processos intelectuais estão estreitamente relacionados.

Partindo do pressuposto de que os sentimentos em relação à matemática, a confiança nas capacidades pessoais e o conhecimento matemático do futuro professor influi quer no que ensina, quer na forma como o faz, salienta-se também a importância a dar ao desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática (NCATE e NCTM, 2003a, 2003b, 2003c).

Outra recomendação, prende-se com a necessidade de a formação proporcionar ao futuro professor a oportunidade de revisitar e aprofundar os conteúdos da matemática escolar. Embora estes já tenham sido abordados ao longo do percurso escolar dos candidates a professores, preconiza-se uma abordagem que enfatize a compreensão do que se aprende, pois só dessa forma os futuros professores poderão vir a ajudar os seus alunos a ultrapassar obstáculos e a compreender o que é ensinado:

> Now the mathematics should be approached in a manner that will strengthen their understanding to the extent that they will not only be able to teach it to others, but they will also know when their students have understood and what to do if students have not understand (CBMS, 2001, p.101).

Trata-se de um ponto de vista já preconizado, como vimos, por Félix Klein (1849-1925) que põe a tónica na explicitação de relações entre a matemática superior e aquela que o futuro professor irá ensinar. Esta ideia de revisitar a matemática dita elementar nas disciplinas de matemática organizadas para futuros professores de matemática é defendida por outros matemáticos e educadores. Ball (2003) advoga a ideia de que nestas disciplinas, a matemática, dita elementar, deve ser revisitada no sentido de explicitar as justificações, a correcção dos resultados, as ligações entre ideias matemáticas de diferentes áreas e o desenvolvimento do conhecimento sobre a natureza da matemática. Os temas de matemática devem ser enquadrados no seu contexto histórico e situados em contextos matemáticos mais amplos, tendo sempre presente a importância de estabelecer conexões explícitas entre os temas de matemática superior e os tópicos de matemática elementar e de explicitar e enfatizar o raciocínio e os hábitos de pensamento empregues no trabalho matemático (Cuoco, 2001; Wu, 1997). Os futuros professores devem ser introduzidos numa cultura matemática com história, mostrando-lhes o que é realmente a matemática, organizando as aulas em torno do estilo de trabalho usado pelos matemáticos, tornando os problemas como precedentes às abstracções, a experiência como precedente da formalização (Cuoco, 2001).

Assim, o tipo de experiências de aprendizagem da matemática vividas na formação são também consideradas determinantes: "Because they are being urged to teach in different ways, prospective teachers also need to experience learning mathematics in those ways themselves" (CBMS, 2001, p.122*).* Esta recomendação aponta no sentido da formação em matemática dos futuros professores deve ser organizada de molde a facultar experiências de aprendizagem da mesma natureza que é desejável virem a proporcionar aos seus alunos.

A resolução de problemas é encarada como uma componente muito relevante e transversal da componente de formação matemática dos programas de formação inicial. Esta, por sua vez, pela sua natureza, deseja-se integrada e articulada com outros processos característicos da actividade matemática como sejam a comunicação e o raciocínio em matemática e as conexões matemáticas (quer internas à disciplina quer referentes aos usos da matemática no mundo real) (NCATE e NCTM, 2003a,2003b,2000c). Porém, vários estudos desenvolvidos no âmbito da formação inicial de professores têm evidenciado a dificuldade que os jovens licenciados têm na implementação de um ensino da matemática centrado na resolução de problemas. Se, por um lado, é um dado adquirido que tal perspectiva de ensino requer muita experiência em resolução de problemas, autoconfiança e consciência das capacidades pessoais (Vale, 2000, p. 59), os resultados da investigação apontam que é necessário que os programas de formação enfatizem e relevem a componente de resolução de problemas desde muito cedo e de forma transversal a toda a formação em matemática, em articulação com outros aspectos da actividade matemática como as conexões, as aplicações e modelação, o raciocínio e a comunicação (Vale, 1997). Guzmán (1993) defende que, para que o professor possa promover um ensino da matemática centrado na resolução de problemas, deve ele próprio estar imbuído do espírito da resolução de problemas que lhe permita a aquisição de novas atitudes relativamente à resolução de problemas, o que requer uma imersão séria e profunda nessa actividade durante a sua formação. Nesse sentido, Fonseca (2004) sugere que a organização e estrutura da formação em matemática deve ter em atenção todas as contribuições que podem ser fornecidas pela didáctica, pois o "ambiente de formação de disciplinas da especialidade da formação inicial de professores de matemática pode contribuir para que, de modo mais sistemático, os jovens professores integrem na sua prática profissional a resolução de problemas, quer quando iniciam um assunto, quer para levar os alunos a descobrir relações matemáticas quer ainda para aplicar conhecimento matemático" (op. cit., p.474). Outros trabalhos (Borralho, 1997, Cabrita, 1997, Fonseca, 1997, Palhares, 1997, Vale, 1997) reforçam a convicção de que a formação matemática do futuro professor deve proporcionar uma "imersão séria e profunda na actividade de resolução de problemas" que dê atenção a todas as etapas do processo de resolução), bem como ao estabelecimento de ligações entre conteúdos (Cabrita, 1997, p. 96). Por exemplo, Vale (1997) conclui que as principais dificuldades surgem ao nível da compreensão e da execução, mas que os futuros professores evidenciam estar pouco habituados a verificar a solução encontrada e que, além disso, são pouco reflexivos, isto é, que as suas capacidades metacognitivas se encontram pouco desenvolvidas. Também Guzmán (1991, p.19) salienta que "a reflexão sobre o processo de resolução pode ser a mais proveitosa de todas [as etapas], mas que é aquela que mais vezes nos esquecemos de realizar". Por isso, propõe que o envolvimento dos professores em actividades de resolução de problemas deve ser apoiada por uma metodologia de trabalho de grupo[72] cujas vantagens se podem fazer sentir a vários níveis. Por exemplo, no enriquecimento pessoal propiciado pela compreensão das diferentes formas de enfrentar uma mesma situação, no apoio e estímulo que a pertença a um grupo exerce para a realização de uma actividade complexa e que requer, muitas vezes, persistência; ao nível da sua preparação para ensinar matemática, nomeadamente no apoio os seus alunos na resolução de problemas.

[72]Guzmán preconiza uma metodologia muito original: a constituição de pequenos grupos de trabalho constituídos por cinco a seis pessoas, que rotativamente vão desempenhando nas diferentes sessões papéis diferenciados. Um dos elementos tem como funções específicas seleccionar, para cada sessão, os problemas que o grupo vai resolver (o que implica que resolva previamente os mesmos e reflicta sobre os possíveis processos de resolução), e ainda observar e fazer registo dos aspectos mais importantes do processo de resolução seguido pelos colegas e, eventualmente, questionar algum colega sobre a razão de ser de alguma ideia. Outro membro do grupo actua como moderador da discussão em torno da resolução dos problemas.

Outro aspecto muito importante a que a formação inicial deve dar atenção é à construção do conhecimento didáctico do futuro professor. Para tal, uma das funções dos programas de formação inicial, a par do desenvolvimento do conhecimentos de matemática, deve ser a de acompanhar os professores nas suas experiências práticas e formativas de modo a que, a partir delas, possam aplicar, integrar, relacionar ou questionar os conhecimentos teóricos e dar-lhes, assim, real significado (Fernandes, 1997, p. xv). Nesse sentido, a componente de formação prática deve incluir não só observação, mas também o envolvimento dos futuros professores na criação de ambientes que fomentem a aprendizagem dos alunos, isto é, criar condições para que os futuros professores planifiquem, implementem e avaliem estratégias de ensino, modelos de organização da sala de aula, formas de representar conceitos e procedimentos matemáticos que façam uso de materiais e recursos diversificados de ensino. Nessa linha, Vale (2000) sugere, referindo-se à formação inicial de professores para o 1º e 2º ciclos do ensino básico, a realização de seminários em paralelo com as práticas pedagógicas, de modo a viabilizar-se um confronto sistemático e directo entre a teoria e a prática e que funcione como suporte de discussão e reflexão. Na sua opinião, “este processo interactivo permitiria que os futuros professores reflectissem mais profundamente sobre questões directamente ligadas com as práticas o que não acontece no modelo actual da prática pedagógica onde apenas se reflecte após as aulas” (p. 449).

Finalmente, há que fazer uma referência ao potencial contributo da história para o desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico do futuro professor. Anteriormente, neste capítulo, discutiram-se os principais argumentos que sustentam a integração da história da matemática no ensino da matemática, e, em particular, na formação de professores. Relativamente a este último, destaca-se que essa integração deve procurar conciliar aspectos de carácter epistemológico e didáctico, de modo a permitir aprofundar a compreensão sobre a natureza da matemática e da actividade matemática e munir os professores com métodos e técnicas de incorporação de material histórico no processo de ensino (Schubring, 2000, p. 110).

Em termos do contributo da história da matemática para o desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor, destaca-se, por exemplo: o desenvolvimento de uma maior sensibilidade e compreensão relativamente às dificuldades de aprendizagem dos alunos; a percepção de que a generalização é, em geral, a última etapa da construção do conhecimento matemático e, como tal, a abordagem aos assuntos deve começar por privilegiar exemplos específicos e heurísticas e, nesse sentido, a história fornece ao professor um grande conjunto de exemplos relevantes; a consciencialização de que a resolução e formulação de problemas são o cerne da actividade matemática e, como tal, são actividades fundamentais da aprendizagem da matemática; o reconhecimento da dimensão social e humana da actividade matemática e a importância da sua introdução em sala de aula como factor motivacional dos alunos e também sensibilizador para o papel da matemática na vida da humanidade (Avital, 1995; Tzanakis, 1996; Carvalho e Silva, 1997; Tzanakis e Arcavi, 2000; Barbin, 1994, 1996, 2000a; Bruckheimer e Arcavi, 2000; Katz, 2000).

Como já foi referido, vários autores defendem que essa integração se deve correlacionar com os níveis de ensino em que os futuros professores irão exercer a sua actividade docente (e.g. Bruckheimer e Arcavi, 2000; Michalowcz, 2000). Essa recomendação, em articulação com as mais recentes orientações para a formação inicial de professores pode funcionar como uma estratégia formativa que permite revisitar, a partir de uma nova e mais abrangente perspectiva, os conteúdos da matemática escolar. É também de ressaltar que organizações como o NCATE (em parceria com o NCTM) consideram o conhecimento da história dos temas da matemática escolar, incluindo as contribuições das várias culturas, como um dos indicadores do conhecimento de conteúdo matemático de que as instituições de formação de professores devem fazer prova para a creditação dos seus programas de formação de professores de matemática (NCATE e NCTM, 2003a, 2003b, 2003c).

Independentemente da história da matemática estar mais ou menos explicitamente contemplada nos currículos escolares, há muito que é reconhecido o potencial a vários níveis, no ensino da matemática (aspecto já discutido nesse capítulo), parecendo, pois, inquestionável que os professores têm de ser preparados para essa integração, até porque o nível de ensino e o desenvolvimento cognitivo dos seus futuros alunos condicionam a forma como essa integração pode ocorrer (Fauvel, 1991). Como é lembrado por Menghini (2000) há que evitar o risco de o professor, ao sublinhar aspectos históricos, subalternize a abordagem matemática, subvertendo-se assim a intenção inicial de essa integração perseguir como meta a promoção de uma aprendizagem mais significativa da matemática.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DE PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo encontra-se organizado em três partes. Na primeira, apresenta-se a fundamentação para a escolha das decisões metodológicas adoptadas neste estudo e discutem-se alguns aspectos relacionados com essa escolha. Na segunda parte, apresentam-se e justificam-se as opções e procedimentos metodológicos aplicados para a recolha e análise de dados. Finalmente apresenta-se o percurso de formação desenvolvido.

3.1. Opções Metodológicas

O campo da investigação em educação visa a obtenção de conhecimentos que possam contribuir para a resolução de problemas relativos ao currículo, ao ensino, à aprendizagem em contextos educativos formais ou não formais, à formação de professores ou a outras dimensões que tenham conexão directa ou indirecta com os contextos de ensino e aprendizagem (Cohen e Manion, 2000, p. 73-74). Em particular, a investigação em ensino centra-se em episódios, acontecimentos e situações relativos a fenómenos relacionados com a acção do professor, a aprendizagem, o currículo, a avaliação, etc. (o que inclui a combinação de dois ou mais fenómenos). O elevado grau de complexidade dos fenómenos educativos, reconhecido por um grande número de autores, está intimamente associado ao seu carácter multifacetado e ao facto de estes não poderem, de modo algum, ser estudados desenquadrados do contexto em que ocorrem (Moreira, 2000). Essa realidade coloca o investigador educacional perante inúmeros desafios e dificuldades que obrigam a uma cuidadosa formulação do problema de investigação e das questões dele decorrentes, bem como a uma escolha fundamentada da metodologia de investigação.

Toda a investigação deve ser realizada, conscientemente, sob uma determinada orientação teórica, isto é, deve ter subjacente um paradigma ou sistema de crenças que orientem o investigador, não só na escolha do método[73], mas em aspectos fundamentais de natureza ontológica[74] e epistemológica[75] (Shulman, 1986; Fortin, 1999; Guba e Lincoln, 1994; Taylor e Bogdan, 1992; Erickson, 1986). Independentemente do paradigma adoptado, a investigação educativa pode enquadrar-se em duas grandes tendências ou abordagens, a quantitativa e a qualitativa. As metodologias quantitativas, como é sugerido pela própria designação, põem a ênfase na medição e na análise quantitativa de relações causais entre variáveis, enquanto que as qualitativas põem a tónica nas qualidades das entidades, nos processos e nos significados (Denzin e Lincoln, 2000, p. 8; Moreira, 2000, p. 20).

A investigação quantitativa assume uma ontologia realista (o mundo existe e é cognoscível como realmente é) e encara os fenómenos educativos como susceptíveis de serem tratados como abstracções da realidade, passíveis de serem expressos através de modelos matemáticos (Cohen e Manion, 2002). Ou seja, a investigação quantitativa está baseada numa filosofia positivista que pressupõe a existência de factos sociais com uma realidade objectiva independente das crenças dos indivíduos. Deste modo, o investigador adopta um papel assumidamente não participante que se traduz na mera observação de uma realidade com existência própria. Assim, deve procurar eliminar ideias pré-concebidas, não se implicar emocionalmente na investigação, situar-se acima de crenças e valores contextuais e limitar-se ao “que é” e não ao que “deveria ser” (Moreira, 2000, p. 34). Nas investigações quantitativas apenas serão objecto de estudo os fenómenos objectivos e observáveis, passíveis de medição, análise e controlo experimental com a finalidade de encontrar as suas causas, descobrir regularidades e formular generalizações traduzíveis por leis. Para que tal seja possível, esses fenómenos são categorizados e tratados como variáveis (dependentes e independentes), tornando-se, assim, viável a análise de relações matemáticas entre eles. Nas palavras de Ruiz e Ipizúa (1989 in Pérez Serrano, 2004a,

[73] O termo aplica-se ao modo como se realiza a investigação, que tem a ver com os pressupostos e propósitos da investigação e perspectivas teóricas (Taylor e Bogdan, 1992).
[74] Respeitantes à natureza ou essência dos fenómenos sociais. A realidade social é externa ao indivíduo ou é produto da consciência individual? É objectiva ou é o resultado do conhecimento individual? (Cohen e Manion, 2002, p. 29)
[75] Os pressupostos epistemológicos afirmam as verdades base do conhecimento, a sua natureza e formas, como se pode adquirir e comunicar a outros seres humanos (Cohen e Manion, 2002, p. 29)

p.24), o mundo social é encarado como um sistema de regularidades empíricas e objectivas, observáveis, mensuráveis, reprodutíveis e preditiveis. Os fenómenos isolados, irrepetíveis eivados de subjectividade, não seriam, pois, objecto de investigação.

Embora não exista um entendimento consensual sobre o que é realmente a investigação qualitativa, pois esta pode ser informada e guiada por uma multiplicidade de paradigmas teóricos, aceita-se que a realidade também é socialmente construída e que não pode ser apreendida exclusivamente através de fenómenos observáveis e mensuráveis. Por isso, o investigador não pode ignorar o campo das intenções e o significado das acções do indivíduo, a existência de uma relação entre o investigador e o que é estudado e que a própria investigação está imbuída de um sistema de valores (Denzin e Lincoln, 2000). Na investigação de índole qualitativa não se procura apenas testar hipóteses nem encontrar as explicações ou causas para os fenómenos, mas sim compreender o significado da acção humana (Pérez Serrano, 2004). Tal, implica estudar os fenómenos no seu ambiente natural, adoptar uma abordagem interpretativa e de pendor naturalista que, como sugerem Denzin e Lincoln (2000, p.3), proporcione:

> A set of interpretative, material practices that make the world visible. These practices transform the world. They turn the world into a series of representations, including field notes, interviews, conversations, photographs, recordings, and memos to the self (…) attempting to make sense of, or to interpret, phenomena in terms of the meaning people bring to them.

A investigação qualitativa persegue, pois, a compreensão dos fenómenos complexos, inseridos no seu ambiente natural, a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação (Bogdan e Biklen, 1994). Esse processo envolve um conjunto de procedimentos analíticos e produz interpretações que são, necessariamente, avaliadas em termos de um conjunto de critérios, de acordo com o paradigma teórico em que a investigação se insere, para então serem integradas numa teoria ou incluídas num conjunto de recomendações (Denzin e Lincoln, 2000, p.22). Na investigação qualitativa o investigador pode ser considerado como o "instrumento", por excelência, de recolha de dados. Daí que as capacidades e aptidões do investigador assumam um papel determinante nas investigações desta natureza (Richardson, 2000, p. 925).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) é possível e desejável promover a adopção de perspectivas qualitativas em situações de investigação em educação que, estando centradas na necessidade de mudança, prosseguem objectivos vários, tais como os que se relacionam com a tomada de decisões práticas, com a melhoria de programas e sua implementação ou a introdução de alguma inovação nas práticas. De facto, a aplicação de abordagens qualitativas, em situações dessa natureza, permite ao investigador compreender a forma como os intervenientes entendem a situação, antecipar as dificuldades inerentes à mudança e, consequentemente lidar com os intervenientes na mudança. Trata-se de uma perspectiva de investigação que obriga a observar os comportamentos no seu contexto, isto é, que está centrada no terreno (op. cit., p. 265).

As metodologias de cunho interpretativo ganharam relevo na investigação em educação a partir dos anos 60/70 quando os investigadores começaram a interessar-se pelo estudo dos significados das acções e interacções humanas dentro do seu contexto social e na elucidação e exposição desses significados (Bogdan e Biklen, 1994; Erikson, 1986), dando origem ao desenvolvimento de perspectivas teóricas que enquadram investigações cujo objecto são as acções e as interpretações de significados atribuídos por quem actua e por aqueles com quem o indivíduo interactua (Erikson, 1986, pp.126,127). De um ponto de vista epistemológico considera-se que o conhecimento é produto da actividade humana e que, portanto, não se descobre, produz-se (Pérez Serrano, 2004). O conceito de acção surge, assim, como um conceito chave das abordagens interpretativas. Quando se procura interpretar o que sucede numa situação concreta é necessário observar a interacção entre todos os elementos da situação escolhida, tal como actuam no seu contexto natural. Nas abordagens qualitativas, sustentadas por paradigmas interpretativos, a teoria afirma-se e o corpo de conhecimentos aumenta a partir de situações particulares como resultado da reflexão sobre e a partir da *praxis* (Pérez Serrano, 2004, Cohen e Manion, 2000). Os dados gerados pela acção (as palavras, faladas ou escritas, os comportamentos observáveis e as interpretações pelos sujeitos desses comportamentos) são de natureza descritiva e melhoram-se com os significados e os propósitos das pessoas que constituíram a fonte desses dados.

A investigação qualitativa de índole descritiva-interpretativa enquadra um conjunto de estratégias de investigação que encerram um conjunto de competências, pressupostos e práticas que o investigador adopta quando se move do paradigma respectivo, para o mundo empírico, nas quais se incluem, entre outras, o estudo de caso, as técnicas fenomenológicas e etnográficas, a observação participante e não-participante e a investigação-acção (Cohen e Manion, 2000, Denzin e Lincoln, 2000). Cada uma destas estratégias privilegia um conjunto de métodos específicos de recolha de dados (entrevista, observação, documentos, notas de campo, etc), que, para uma melhor compreensão do problema, devem ser acompanhadas do desenvolvimento de um amplo conjunto de práticas interpretativas interrelacionadas que permitam descrever as rotinas e os momentos problemáticos e os significados das vidas dos indivíduos (Denzin e Linclon, 2000, p. 3).

Pelo exposto e dada a natureza do problema de investigação[76], centrado na formação inicial de professores de Matemática para a escolaridade básica, entendeu-se não ser adequada uma metodologia de natureza quantitativa por, entre outras razões, não se afigurar possível identificar e quantificar as variáveis em jogo por forma a identificar relações de causa e efeito, ou seja, por não se poder ter controle e não ser possível ou praticável manipular os comportamentos dos participantes sobre os acontecimentos (Merriam, 1988; Yin, 2003). Outros autores (Barbin et. al., 2000, Barbin, 2000, Lakoma, 2000) defendem as vantagens dos paradigmas qualitativos na apreciação da eficácia da integração da História da Matemática na educação matemática e, em particular, o recurso a metodologias de cariz etnográfico/interpretativo nos estudos que envolvam a análise das práticas de ensino. Argumenta-se que as abordagens quantitativas são inapropriadas para a análise de mudanças tais como as que se relacionam com o interesse ou a compreensão de um conceito matemático ou para medir o impacto na educação matemática do uso global da História da Matemática.

Este estudo envolve a implementação de um percurso de formação que contempla intervenções em várias disciplinas curriculares do curso, com diferentes características e natureza (três disciplinas da componente científica de Matemática e três da componente de prática profissional) e percorre vários ambientes (o da própria instituição formadora e o de duas escolas básicas cooperantes, nas quais as futuras professoras desenvolvem a sua prática pedagógica), com todas as variáveis aí envolvidas. Assim, optou-se por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa que permite um estudo mais aprofundado dos fenómenos que decorrem em contextos de grande complexidade.

Dada a necessidade de a investigadora observar, procurar entender e interpretar as acções e as interacções humanas dentro do seu próprio contexto, optou-se por uma

[76] Que consiste em compreender em que medida o desenvolvimento de um percurso de formação inicial de professores de matemática com foco na exploração didáctica de História da Matemática contribui para a construção do conhecimento didáctico de futuros professores e para a promoção de práticas de ensino inovadoras

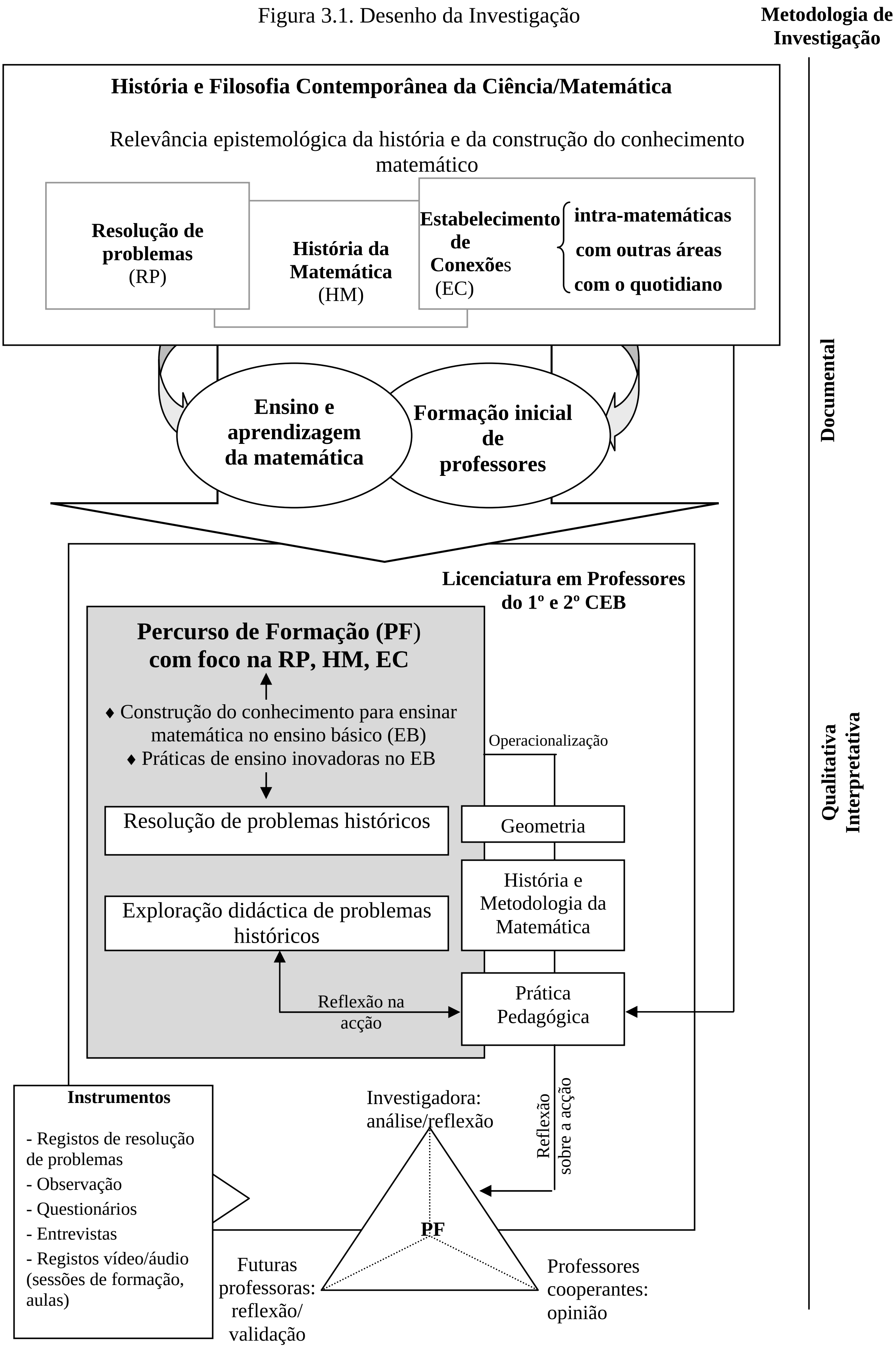
abordagem investigativa qualitativa, de cunho descritivo e predominantemente interpretativo, por esta ser uma perspectiva centrada na questão dos significados atribuídos pelos indivíduos aos acontecimentos e aos objectos, nas suas acções e interacções no âmbito de um contexto social e na elucidação e exposição desses significados pelo investigador (Erickson, 1988). Como afirma Santomé (1988 in Goetz e LeCompte, 1998) as abordagens interpretativas permitem um maior entendimento crítico das situações e dos fenómenos educativos.

3.2. Desenho da Investigação

O trabalho que se procurou desenvolver enquadra-se na necessidade de compreender processos de formação de professores para promover a mudança na formação inicial de profissionais para a escolaridade básica. Ainda que os currículos possam contemplar formação em História da Matemática numa disciplina específica, aquando da abordagem de tópicos específicos em disciplinas da componente de Matemática, nem sempre esta é dirigida para a necessidade de preparar os futuros professores para incorporar, reflectida e adequadamente, material histórico no seu ensino (Schubring, 2000). Trata-se, por isso, de uma investigação realizada com futuros professores que, estando num período formal de formação, na qual se inclui a realização de Prática Pedagógica (PP) puderam ser envolvidos de forma activa e consciente na promoção de práticas de ensino que relevem como experiências de aprendizagem a História da Matemática (HM), a resolução de problemas (RP) e o estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática (EC).

O problema enunciado conduziu-nos, assim, ao desenvolvimento de um conjunto de intervenções com foco na História da Matemática, articuladas e interrelacionadas em disciplinas do plano curricular da licenciatura que passaremos a designar por percurso de formação (PF) e descreveremos mais à frente de forma detalhada. De forma sucinta, pode salientar-se que o PF foi desenvolvido com a finalidade de apoiar o desenvolvimento do conhecimento didáctico dos futuros professores de modo a permitir-lhes pôr em prática experiências de ensino e de aprendizagem com foco na resolução de problemas e na História da Matemática que promovam o estabelecimento de conexões intra-matemáticas e de ligações entre a Matemática e outra áreas curriculares. A formação delineada persegue, na linha do defendido por Schubring et al. (2000), três grandes objectivos complementares: (1) conhecer e apreciar o passado da Matemática (função informativa); (2) aprofundar a própria compreensão da forma como se constrói o conhecimento matemático (função epistemológica); (3) incorporar, reflectida e adequadamente, material histórico no seu ensino (função didáctica). A esquematização apresentada na figura 3.1 procura mostrar uma panorâmica geral do estudo que passaremos a apresentar.

Figura 3.1. Desenho da Investigação



3.3. Participantes

O estudo desenrolou-se nos dois últimos anos de uma licenciatura em Professores do Ensino Básico, variante de Matemática/Ciências da Natureza[77] de uma Escola Superior de Educação (período relativo aos anos lectivos de 2004/2005 e de 2005/2006) e insere-se num tempo de profunda recessão na procura de licenciaturas em ensino por parte dos estudantes finalistas do ensino secundário. Em 2004/2005 na licenciatura referida havia apenas duas turmas, uma de 3º ano e outra de 4º ano. Se bem que existissem alguns alunos com disciplinas em atraso, o facto do número de candidaturas ao curso nos anos lectivos 2003/2004 e 2004/2005 ter sido muito reduzido (bastante inferior aos 20 alunos fixados pelo MCTES), determinou o seu não funcionamento. Dada a natureza e características do estudo, numa primeira abordagem investigativa foram envolvidas todas as alunas, futuras professoras, que frequentava a disciplina de Geometria I (1º semestre do 3º ano). Embora estivessem inscritas 15 alunas, apenas 11 frequentavam a disciplina pela primeira vez e destas apenas 7 frequentavam com regularidade as aulas da disciplina. A frequência regular das aulas, a frequência da disciplina pela primeira vez nesse ano lectivo e a disponibilidade manifestada para participar na investigação foram os critérios adoptados para uma primeira selecção das participantes no estudo. Estas sete alunas integraram no 2º semestre, três grupos de estágio distintos na disciplina de Prática Pedagógica II a desenvolver-se no 1º ciclo do ensino básico. Com a finalidade de identificar, em contexto de prática pedagógica, áreas críticas de formação para o ensino da Matemática nas perspectivas caracterizadas no capítulo II, procedeu-se à videogravação, observação e análise de episódios de ensino protagonizados por essas sete futuras professoras (integradas em grupos de estágio de 4 alunas). O trabalho desenvolvido permitiu identificar várias dificuldades logísticas ao nível do acompanhamento da prática pedagógica das sete futuras professoras. Aliado a esse problema, duas das sete futuras professoras não reuniam, em finais de Julho de 2005, as condições exigidas pela instituição para a realização da prática pedagógica no 2º ciclo[78].

[77] Este curso habilita os licenciados para o ensino no 1º e no 2º ciclos do ensino básico.

[78] Isto é, não terem mais do que duas disciplinas semestrais em atraso. Dado tratar-se do último ano em que o curso funcionava, as futuras professoras nessas condições requereram a possibilidade de realização do estágio. Requerimento que, a título excepcional, foi autorizado em finais de Setembro de 2005.

Considerando que a natureza do problema de investigação implicou a adopção de uma abordagem investigativa de natureza qualitativa de índole descritiva-interpretativa e que esta não é compatível com o acompanhamento de um grande número de sujeitos, decidiu-se, depois, limitar o estudo a três das sete futuras professoras iniciais, que foram acompanhadas pela investigadora de Janeiro de 2005 a Junho de 2006 (já em Prática Pedagógica no 2º CEB). Um dos critérios para a sua selecção foi o da realização do estágio em escolas diferentes e, portanto, com professores cooperantes distintos. Importa referir que os quatro núcleos de estágio a funcionar nesse ano lectivo envolveram dois professores cooperantes para a disciplina de Matemática que disponibilizaram para o estágio duas turmas de 5º ano e duas de 6º ano, sendo que um desses professores apenas tinha atribuída uma turma de 6º ano de escolaridade. Assim, a escolha das futuras professoras a realizar a prática pedagógica no 6º ano de escolaridade afigurou-se como natural. Por outro lado, a maior riqueza conceptual do currículo de Matemática de 6º ano de escolaridade ao nível do temas "Números e Operações" e "Proporcionalidade Directa" viabilizava uma maior flexibilidade na selecção dos problemas históricos. Como os problemas remetem para muitos aspectos da história de Portugal dos séculos XVI e XVII (integrados no currículo de 5º ano de escolaridade), considerou-se também importante a possibilidade de estabelecer ligações com a disciplina de História e Geografia, em aspectos já abordados pelos alunos

Participaram, na última fase do estudo, três futuras professoras integradas em dois núcleos de estágio distintos.

3.4. Técnicas e instrumentos de investigação

Nas investigações guiadas por um paradigma qualitativo-interpretativo o investigador procura elucidar os significados que os participantes dão à sua própria acção (Pérez-Serrano, 2004, Erickson, 1986) e, por isso, o investigador é considerado o "instrumento" primordial de investigação (Ponte, 1994). Eisenhard (1988 in Ponte, 1994) salienta que o investigador tem de se envolver na actividade de investigação como um *insider*, mas simultaneamente, tem de ser capaz de reflectir sobre a actividade como um *outsider*.

De acordo com Cohen e Manion (2000, p. 101) a maioria das aproximações adoptadas pela investigação educativa para reunir os dados que vão empregar-se como base para a inferência, a interpretação e a compreensão, são de natureza descritiva e não de natureza experimental, na medida em que procuram descobrir e interpretar, numa dada situação, o que pode incluir, as condições ou relações existentes, as práticas prevalecentes, as crenças, os pontos de vista ou atitudes que se mantêm, os efeitos que se sentem ou as tendências que se desenvolvem. Estes autores, clarificam que, na investigação descritiva, o investigador não relata o que aconteceu, antes organiza o que ocorreu de modo a poder comparar, contrastar, classificar, analisar e interpretar as entidades e os acontecimentos. A valorização da compreensão e da explicação do sentido dos acontecimentos e interacções dos sujeitos, característica dos paradigmas interpretativos, determina a necessidade do investigador recolher dados ricos em pormenores e que incidam, preferencialmente, sobre os comportamentos e acções dos sujeitos no seu contexto natural. A inferência, que a análise de conteúdo, explícito ou implícito, exige sobre a acção ou o texto escrito, é um exercício indispensável ao investigador qualitativo. Deste modo, a recolha e análise dos dados devem basear-se em técnicas de índole qualitativa, não se excluindo do processo de recolha de dados o recurso a questionários fechados ou a entrevistas, sendo que estas não deverão ser muito estruturadas. Salienta-se que, independentemente da escolha particular de uma determinada estratégia de investigação, a observação surge sempre como um método importante de recolha de dados, sobretudo nas investigações de carácter longitudinal, usualmente complementada por outras técnicas de recolha de dados, como, por exemplo, a tomada de notas de campo, as entrevistas, os questionários ou o registo vídeo e áudio.

Observação

Quando são objecto de investigação comportamentos e acções do sujeito (por vezes, não verbais) são várias as razões que concorrem para a relevância da observação. Destas, destaca-se a possibilidade do investigador, pela relação próxima que pode criar com os restantes participantes na investigação, poder identificar comportamentos habituais e tomar notas sobre os seus aspectos mais característicos (Cohen e Manion, 2000, p. 168).

Quando o investigador/observador está envolvido, em maior ou menor grau, nas actividades que observa, a observação diz-se participante. Caso contrário, isto é, quando o observador permanece completamente separado das actividades do grupo que investiga, a observação diz-se não participante. Cohen e Manion (2000, p. 166) salientam que a escolha de uma dada estratégia de observação (participante ou não participante) está associada a um certo números de factores, nos quais se inclui o tipo de situação em que tem lugar a investigação, mas acrescentam, citando Bailey (1966), que numa investigação que decorra no seu contexto natural é muito difícil o investigador não assumir o papel de observador participante. É este o caso das investigações em educação cujo contexto, pela sua complexidade, está cheio de significados compartilhados pelos participantes (Cohen e Manion, 2000). Porém, uma das grandes críticas apontadas à observação é do seu carácter subjectivo, que se avoluma quando o investigador assume um papel de observador participante, isto é, tão activo e interveniente que chega a confundir-se com o próprio grupo.

Entrevistas

Na investigação qualitativa, a entrevista, enquanto estratégia de recolha de dados, pode ser entendida como uma conversa intencional entre duas ou mais pessoas conduzida pelo investigador e focalizada no conteúdo especificado pelos objectivos da investigação, com o propósito de obter informação relevante para a investigação. Enquanto diálogo, proporciona acesso, na linguagem do próprio sujeito, aos conhecimentos, aos valores e preferências e às atitudes e crenças do entrevistado (Cohen e Manion, 2000).

A entrevista pode assumir diferentes graus de flexibilidade, assumindo desde um carácter completamente estruturado - o entrevistador faz as perguntas seguindo um guião previamente estruturado - até um carácter não estruturado - embora guiado por um guião, o entrevistador é livre para alterar a sequência de questões planeada, a sua formulação e alcance (Cohen e Manion, 2000, Bogdan e Biklen, 1994). No primeiro caso, embora não retire ao investigador uma certa liberdade de acção, exige uma esquematização prévia muito detalhada que inclui mesmo o planeamento pormenorizado de uma eventual alteração da sequência ou formulação das perguntas. As entrevistas não estruturadas, exigindo também planeamento muito cuidadoso, conferem ao entrevistador maior liberdade na condução da mesma, sobretudo ao nível das perguntas de natureza aberta[79],

[79] Cohen e Manion (2000, p. 383-384) referem a possibilidade da entrevista incluir itens de resposta fechada de tipo alternativo, de tipo escala e itens abertos. Estes últimos não limitam o conteúdo e o modo da resposta,

por lhe ser permitido aclarar respostas, indagar o entrevistado sobre as razões de uma determinada resposta de modo a obter uma compreensão mais profunda e sugerir relações ou hipóteses não contempladas previamente (Cohen e Manion, 2000).

Uma das grandes objecções que, por vezes, é colocada à entrevista enquanto técnica de investigação é a de falta de validade dos dados obtidos, resultante de várias causas como a inabilidade do entrevistador, das características do respondente e do conteúdo substantivo das questões (que podem reflectir as atitudes e opiniões do entrevistador). Corre-se, em particular, o risco do investigador procurar respostas que apoiem as suas concepções, percepcionar erradamente as respostas dadas ou que o próprio respondente não compreenda o que lhe está a ser perguntado (Cohen e Manion, 2000). Deste modo, um dos aspectos cruciais da entrevista incide sobre a formulação das perguntas de modo a garantir a sua clareza e a não indução da resposta.

A conjugação da entrevista com outros métodos (como, por exemplo, a observação ou um questionário, previamente passado aos participantes) pode permitir, na opinião de Kerlinger (1970) colmatar algumas das limitações de cada um desses métodos e, simultaneamente aprofundar as motivações e as razões das acções dos participantes na investigação (em Cohen e Manion, 2000, p. 378).

<u>Questionários</u>

O questionário é um método de recolha de dados de fiabilidade elevada em que se requer ao respondente que registe por escrito as suas respostas a um conjunto de itens que podem ser natureza fechada ou aberta. No primeiro caso, incluem-se os itens de tipo alternativo em que o respondente tem de assinalar uma de duas ou mais alternativas, que, desejavelmente, devem esgotar todas as possibilidades de resposta e os itens de tipo escala[80]. Os itens alternativos, que têm como grandes vantagens permitir orientar o respondente de modo apropriado para certo tipo de respostas e a facilidade de codificação, têm como grande inconveniente a superficialidade que decorre de uma pergunta já com as respostas pré-elaboradas e o facto de nem sempre ser fácil ao respondente situar-se de

---

excepto no que concerne à matéria da pergunta em si que foi determinada pela natureza do problema de investigação.

[80] Os itens de tipo escala são itens cuja resposta consiste apenas em assinalar o grau de acordo com uma determinada afirmação, relativamente a uma escala previamente definida (existem diferentes tipos de escala: de atitudes, de hierarquização, de classificações, etc.).

forma clara numa das opções de respostas (Cohen e Manion, 2000). Para além disso, esse tipo de itens não são muito adequados a um investigação qualitativa – interpretativa (Bogdan e Biklen,1994).

Para obviar essa situação recomenda-se, por exemplo, a alternância dos itens fechados com outros de natureza aberta e, ainda, que alguns dos itens fechados sejam acompanhados de uma pergunta que indague a razão da opção escolhida. Nesse caso, os itens de natureza aberta devem ser formulados de modo a proporcionar um marco de referência para as respostas, sem pôr imposições sobre o conteúdo e a expressão da resposta. Em qualquer das opções tomadas relativamente à natureza e tipo de questões, o questionário apresenta limitações a vários níveis, como sejam, por exemplo: a impossibilidade de pedir ao respondente que clarifique o sentido de uma resposta ou de o investigador fazer uma nova pergunta; a capacidade de expressão escrita do respondente; a redução de dados fica limitada, em geral, a uma lista prévia de categorias (Cohen e Manion, 2000).

Notas de Campo

As notas de campo, enquanto estratégia de recolha de dados, não são mais do que registos feitos pelo investigador após uma observação, uma entrevista ou qualquer outra sessão de investigação que permitam ao investigador desenvolver mais a visão da realidade (Richardson, 2000). Embora as notas de campo incluam apontamentos de natureza descritiva tão concretos e detalhados quanto possível (pessoas, lugares, actividades, conversas), estas devem também incluir ideias, estratégias, reflexões e palpites do investigador sobre aquilo que lhe foi dado ouvir, ver e sentir durante a recolha de dados, incluindo os sentimentos, as ansiedades, as dúvidas do investigador acerca da investigação e dos vários intervenientes (Bogdan e Biklen, 1994; Richardson, 2000). Ou seja, as notas de campo devem incluir uma componente descritiva e outra reflexiva que se dirige, desde logo, para a análise dos dados e devem ser tomadas, no caso de resultarem de observações, tão rapidamente quanto possível logo após a observação (Bogdan e Biklen, 1994). Na sua redacção o investigador deve ter o cuidado de fazer retrato claro e vivido dos factos descritos (Cohen e Manion, 2000).

Neste estudo, na tentativa de captar uma imagem o mais completa possível para compreender melhor o Percurso de Formação no desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática, foram usadas como técnicas de recolha de dados a observação, complementada com notas de campo (das aulas observadas, das sessões de trabalho com as futuras professoras, …) a entrevista, o questionário, a recolha de documentação escrita (cópias das folhas de resolução de problemas históricos).

No quadro 3.1. sintetizam-se as técnicas usadas na recolha de dados, especificando-se as fontes, os instrumentos desenvolvidos e os momentos em que foram utilizadas.

Quadro 3.1. Momentos, fontes e instrumentos de recolha de dados

<table>
<tr><th>Técnicas</th><th>Momentos</th><th>Instrumentos</th><th>Fontes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Questionário</td><td>Final do ano lectivo 2004/05</td><td>• Questionário - QT1 (Anexo 1)</td><td rowspan="2">Futuras professoras</td></tr>
<tr><td>Final do ano lectivo 2005/06</td><td>• Questionário - QT2 (Anexo 1)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Entrevista</td><td>Final do ano lectivo 2004/05</td><td>• Guião de entrevista - ENT1 (Anexo 2)</td><td rowspan="2">Futuras professoras</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Final do ano lectivo 2005/06</td><td>• Guião de entrevista - ENT2 (Anexo 2)</td></tr>
<tr><td>• Guião de entrevista - ENTPC (Anexo 2)</td><td>Professores Cooperantes</td></tr>
<tr><td>Observação</td><td>Sessões de trabalho
Prática de ensino</td><td>Vídeo/áudio gravação (transcrições) (Anexos 15 a 18)</td><td rowspan="2">Futuras professoras</td></tr>
<tr><td>Análise documental</td><td>Ano lectivo 2004/05</td><td>Folhas de resolução de problemas</td></tr>
<tr><td>Notas de campo</td><td>Anos lectivos 2004/05 e 2005/06</td><td></td><td>Investigadora</td></tr>
</table>

As observações realizadas pela investigadora centraram-se essencialmente sobre as experiências de ensino desenvolvidas pelas futuras professoras quer em contexto formal (sala de aula), quer em contexto não formal (exposição interactiva). Durante as sessões de trabalho desenvolvidas ao longo das disciplinas de Prática Pedagógica, a investigadora assumiu também um papel de observadora. No que respeita ao grau de participação da investigadora, a observação assumiu, essencialmente, características de observação não participante. Apesar de se poder considerar que a investigadora esteve em contacto imediato com a realidade da PP através da realização regular de sessões de apoio à PP[81] (nas quais a investigadora colaborou na preparação da prática de ensino e promoveu a reflexão sobre as práticas) e da videogravação de aulas, a investigadora nunca se considerou ou foi considerada um membro de qualquer dos grupos de PP. De facto, a investigadora permaneceu separada das actividades dos diferentes grupos de PP, nomeadamente as que envolviam interacções entre as futuras professoras, entre si ou com as suas professoras Cooperantes e a Professora Supervisora da ESE (este entendimento inscreve-se nas propostas de Cohen e Manion, 2000 e Pérez Serrano, 2000). As aulas das futuras professoras foram gravadas em vídeo sempre que a investigadora não esteve presente na aula e em áudio no caso contrário[82]. Nesta última situação, a investigadora nunca teve qualquer intervenção nas acções de sala de aula sentando-se, para isso, num dos últimos lugares da sala, normalmente junto do professor cooperante. Os episódios de aula em que as futuras professoras exploraram as tarefas preparadas no âmbito do Percurso de Formação foram integralmente transcritos (Anexos 15, 16 e 17). Também as sessões de trabalho realizadas em paralelo com a Prática Pedagógica no 2º CEB foram audiogravadas e transcritas (Anexo 18). Saliente-se que sendo elevado o número de sessões de trabalho realizadas, apenas foram transcritos excertos dessas sessões relacionados com aspectos concretos do PF, nomeadamente aqueles que se relacionam especificamente com a discussão das tarefas desenvolvidas nesse âmbito.

Como é salientado por Pérez Serrano (2000), na observação não participante em que o investigador entra em contacto directo com a realidade que quer observar, mas em que não se assume como um membro do grupo, a entrevista e o questionário surgem como estratégias principais de observação que podem ser complementadas com notas de campo e registos áudio e/ou vídeo. Por outro lado, a combinação de várias técnicas de recolha de dados (ou, triangulação metodológica de que falaremos mais à frente) é considerada uma prática muito útil, pois além de contribuir para a validação das conclusões permite combinar os pontos fortes e corrigir as lacunas de cada uma das técnicas usadas (Cohen e Mannion, 1994; Goetz e LeCompte, 1988).

[81] Foram também produzidos alguns documentos didácticos que serviram de ponto de partida para essas reuniões. Discutiremos este aspecto mais à frente.

[82] Refira-se que a presença da câmara de filmar na aula assumiu-se, em algumas circunstâncias, como um factor perturbador quer para os alunos do ensino básico, quer para as futuras professoras. O recurso a um gravador digital de pequenas dimensões foi muito bem aceite por todas as participantes como a forma privilegiada de registo das aulas.

Cada uma das futuras professoras foi entrevistada individual e formalmente duas vezes, a primeira em Junho de 2005 e a segunda em Junho de 2006. Na mesma altura, foram também realizadas entrevistas semi-estruturadas aos professores cooperantes em cujas turmas as participantes do estudo desenvolveram prática de ensino, por se considerar que, tendo estes um papel muito interveniente na organização das práticas pedagógicas e sendo observadores permanentes da *praxis* das futuras professoras, a sua opinião pode contribuir para um melhor entendimento dos fenómenos em estudo.

Qualquer uma das entrevistas às futuras professoras foi precedida da aplicação de um questionário contendo itens de natureza fechada acompanhados de questões de clarificação da resposta dada.

O primeiro questionário (QT1), aplicado em Junho de 2005, visou recolher dados relativos ao percurso escolar em matemática, à dimensão afectiva em relação à Matemática e ao seu ensino e aprendizagem e aspectos relacionados com a escolha do Curso e de preparação para a Profissão. De acordo com estes objectivos e com as categorias e dimensões de análise definidas e apresentadas mais à frente (Quadro 3.5), construiu-se o questionário apresentado no anexo 1[83] e sistematizado no Quadro 3.2.

Quadro 3.2. Esquema organizativo do primeiro questionário

Objectivos	**Categorias/Dimensões de análise**	**Questões**
♦ Conhecer o percurso escolar no ensino não superior, particularmente no que respeita à disciplina de Matemática ♦ Perceber o relacionamento e a atitude em relação à Matemática ♦ Identificar perspectivas sobre o ensino/aprendizagem da Matemática	▫ Matemática/ percurso escolar, dimensão afectiva, crenças sobre a Matemática e o seu ensino/aprendizagem	Parte I 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 3 e 4
♦ Conhecer as razões da escolha de um curso de formação de professores ♦ Conhecer a opinião das futuras professoras sobre a formação proporcionada na ESE para a prática pedagógica	▫ Formação e profissão/ Relacionamento com o curso e com a profissão de professora de Matemática	Parte II 4.1, 4.2, 5.1, 5.2

[83] Apenas foram impressos e incluídos neste documento os anexo de 1 a 6, por se considerar que tal pode facilitar a sua consulta e a leitura do texto. O corpo completo de anexos é apresentado em formato electrónico em CD-ROM.

O segundo questionário (QT2) focado no percurso de formação, visou também conhecer o percurso escolar no ensino superior, particularmente no que respeita à componente de formação em matemática. Apresentam-se no quadro 3.3, os objectivos definidos, bem como uma proposta de articulação dos mesmos com o esquema de análise delineado para este estudo. Este questionário também se apresenta no Anexo 1.

Quadro 3.3. Esquema organizativo do segundo questionário

Objectivos	**Categorias/Dimensões de análise**	**Questões**
♦ Conhecer o percurso escolar no ensino superior, particularmente no que respeita à componente de formação em matemática/didáctica ; ♦ Conhecer as expectativas profissionais das futuras professoras.	▫ Formação e profissão/ Relacionamento com o curso e com a profissão	Parte I 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11
♦ Conhecer a opinião das futuras professoras sobre o percurso e propostas de formação realizadas (Percurso de Formação).	▫ Problemas históricos/ Integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática; Interesse formativo da resolução de problemas históricos; Dimensão afectiva ▫ História da Matemática/Interesse formativo da História da Matemática/ Dimensão afectiva ▫ Problemas Históricos ▫ Conexões	Parte II 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2
♦ Compreender como é que as futuras professoras percepcionam o contributo da formação proporcionada para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar Matemática.	▫ Formação e profissão/ ▫ Percepção sobre o contributo do percurso de formação para a formação profissional	Parte II 3 e 4
♦ Compreender como é que as futuras professoras percepcionam o contributo da formação para a sua *praxis*, em particular a promoção de experiências de ensino e aprendizagem com foco na resolução de problemas e no estabelecimento de conexões	▫ Formação e profissão/ Percepção sobre o contributo do percurso de formação para a formação profissional ▫ História da Matemática/Perspectivas sobre o papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática ▫ Problemas históricos/ Integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. ▫ Conexões/Entre ideias matemáticas; com outras disciplinas; com o quotidiano passado.	Parte II 5,6 e 7

As entrevistas realizadas assumiram, como já foi referido, um carácter semi-estruturado, o que permitiu aprofundar as respostas e as opiniões manifestadas pelos entrevistados. A primeira entrevista às futuras professoras decorreu no final do ano lectivo 2004/2005 imediatamente após a realização da Prática Pedagógica no 1º CEB e da aplicação do primeiro questionário, com os seguintes objectivos: (i) recolher opinião sobre o interesse e a pertinência da resolução de problemas históricos em Geometria; (ii) compreender como é que as futuras professoras perspectivam a integração da História da Matemática na formação de professores; (iii) compreender como é que as futuras professoras perspectivam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º CEB; (iv) recolher opinião sobre o contributo da formação para a abordagem na disciplina de Prática Pedagógica de tópicos no âmbito da Medida; (v) perceber a repercussão do trabalho desenvolvido (formação) na *praxis* das futuras professoras participantes no estudo (Quadro 3.4).

Quadro 3.4. Esquema organizativo da primeira entrevista

Objectivos	Categorias / Dimensões de análise
♦ Recolher opinião sobre o interesse e pertinência da formação proporcionada na disciplina de Geometria e nas sessões de apoio à PP. ♦ Compreender como é que as futuras professoras percepcionam o contributo da formação a nível didáctico. ♦ Perceber se o trabalho desenvolvido no percurso de formação teve alguma repercussão na *praxis* das futuras professoras	▫ Problemas históricos/ Interesse formativo da resolução de problemas históricos; atitude perante os problemas históricos. ▫ História da Matemática/ Interesse formativo da História da Matemática; dimensão afectiva. ▫ Formação e profissão/ Percepção sobre o contributo do percurso de formação para a formação profissional ▫ Prática Pedagógica / Perspectivas sobre o processo de ensino e aprendizagem; reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem

A segunda e última entrevista, realizada imediatamente após a aplicação do segundo questionário, visou a clarificação de algumas das respostas dadas a esse questionário e que foram consideradas pela investigadora pouco claras ou ambíguas. Para esta entrevista, que assumiu claramente características não estruturadas, foi elaborado um guião para cada uma das quatro participantes (Anexo 2). Todas as entrevistas foram registadas em áudio com a concordância das futuras professoras e, posteriormente, transcritas (Anexos 11, 12 e 13).

No final do estudo também foram entrevistados os professores cooperantes sob cuja orientação as futuras professoras realizaram, durante o ano lectivo 2005/2006, o seu estágio no 2º CEB. Esta entrevista, também de carácter semi-estruturado (Anexo 2), teve como finalidades recolher a opinião dos professores cooperantes sobre o contributo da formação proporcionada para as *praxis* das futuras professoras. Procurou-se também, nessa entrevista, perceber como é que os professores cooperantes valorizam a integração da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem e, em particular, através da resolução de problemas históricos e como é que percepcionam o contributo dos problemas para o estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática (Quadro 3.5).

Quadro 3.5. Esquema organizativo da entrevista aos professores cooperantes do 2º CEB

Objectivos	Categorias de análise
♦ Compreender como é que os professores cooperantes percepcionam o contributo da formação proporcionada na *praxis* das futuras professoras e para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar Matemática	▫ Prática Pedagógica/ Prática de Ensino ▫ Formação e profissão/ Percepção sobre o contributo do percurso de formação para a formação profissional
♦ Perceber como é que os professores cooperantes valorizam a integração da História da Matemática em sala de aula e, em particular, através da resolução de problemas históricos.	▫ História da Matemática /Perspectivas sobre o papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática ▫ Problemas históricos /Potencialidade e dificuldades de integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática

3.5. Desenvolvimento de um Percurso de Formação

Qualquer processo de formação de professores tem como objectivo último a introdução de alguma melhoria ou realização de alguma inovação nas práticas de ensino (Jiménez et al., 2000). Como já referido, o problema de investigação, centrado na formação inicial de professores de Matemática para a escolaridade básica, consiste em compreender em que medida o desenvolvimento de um percurso de formação inicial de professores de Matemática com foco na exploração didáctica de História da Matemática e que toma como dimensões relevantes da actividade matemática a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões intra-matemáticas e de relações com outras áreas e com o quotidiano contribui para a construção do conhecimento didáctico e para a promoção de práticas de ensino inovadoras. Deste modo, com o propósito de proporcionar aos futuros professores a oportunidade de planear, implementar e reflectir sobre práticas de ensino que relevem como experiências de ensino e aprendizagem as dimensões referidas, delineou-se um conjunto de intervenções articuladas e interrelacionadas em disciplinas dos dois últimos anos da licenciatura e que, como já dissemos, designamos por Percurso de Formação (PF).

Tal como defendem vários investigadores (Praia, 1995, Paixão, 1998, Vieira, 2003) o processo de desenvolvimento de um programa ou percurso de formação para professores pressupõe quatro fases: planeamento, produção, implementação e avaliação. As duas primeiras, compreendem uma definição clara dos propósitos ou pressupostos do PF, o estabelecimento de vertentes e fases de formação, a definição de estratégias de formação e a criação e utilização de recursos didácticos. No que se segue, procura-se explicitar e desenvolver estes aspectos.

3.5.1. Pressupostos do Percurso de Formação

Um primeiro pressuposto para o desenvolvimento de um Percurso de Formação (PF) assenta na ideia de que a introdução da componente histórica na formação inicial de professores e, em particular, a compreensão dos contextos culturais e sociais dos quais emergiram conceitos e resultados científicos, pode desempenhar um papel crucial na construção da literacia científica/matemática do futuro professor e na alteração das suas práticas (Kafai e Gilliland-Swetland, 2001; Monk e Osborne, 1997). Como salientam Torre, Regueiro e Guerrero (2006) um professor de Matemática não tem somente que ensinar certos conteúdos matemáticos ou certos procedimentos de cálculo. Requer-se também um conhecimento reflexivo sobre a disciplina no qual se incluem o conhecimento da evolução de um determinado conceito, das motivações por detrás do estudo de um determinado conceito, por forma a poder discernir a importância dos erros cometidos pelos alunos e qual a melhor resposta a dar-lhes. Por isso, esses autores defendem que a formação dos professores deve permitir a reflexão sobre a necessidade, consequências e sentido de cada um dos conteúdos da matemática escolar. Nesse sentido e tal como preconizado por Schubring (1997), a integração, na formação de professores, de aspectos da história e filosofia da ciência/matemática pode contribuir para desenvolver o meta-saber dos futuros professores, permitindo-lhes uma melhor organização dos conteúdos para as suas futuras aulas e a integração e a interpretação das contribuições dos alunos. Outros investigadores, como Tzanakis (2000) e Barbin et. al. (2000) acrescentam que o manancial de recursos didácticos proporcionado pelo conhecimento histórico pode conduzir a uma mudança efectiva das práticas de ensino ou, pelo menos, a uma modificação da forma como os professores concebem o ensino da Matemática. Barbin (1994) e Grugnetti (2000) apontam que a aproximação cultural à Matemática favorece o contexto para a interdisciplinaridade.

Assume-se também como pressuposto uma visão construtivista da aprendizagem, isto é, que o indivíduo não absorve passivamente a informação. A aprendizagem é fruto do envolvimento activo do sujeito na construção do seu próprio conhecimento e envolve ligar ideias e experiências novas com aquilo que já conhece (Liang e Gabel, 2005). De entre as varias correntes construtivista destaca-se o “construtivismo social”, desenvolvido a partir das ideias de Vygotsky que enfatiza a ideia de que são as interacções sociais do aluno com o(s) outro(s) (o professor, o adulto, os seus pares) que estão na origem do desenvolvimento cognitivo. Ou seja, o conhecimento é construído socialmente e a aprendizagem ocorre em contextos sociais e culturais, *“como um processo de construção interpretativo e recursivo”* (Fosnot, 1999, p.53). É através da linguagem que os sujeitos partilham ideias e procuram clarificações de modo a alcançar a compreensão. Assim, o construtivismo social requer do sujeito esforço na reconstrução de significados e atribui aos professores um papel central na orientação e apoio dos alunos (Palmer, 2005).

Os professores em formação também constroem aprendizagens e significados e, por isso, é necessário que as experiências de formação desafiem, debatam, esclareçam as convicções dos professores/futuros professores, através do envolvimento em experiências de aprendizagem e em trabalhos de campo. Ora, a investigação revela que os professores, em geral, não adoptam nas suas aulas perspectivas construtivistas, o que poderá ser um reflexo do processo formativo em que são envolvidos (Duit e Treagust, 2003; Rodriguez, 1998 in Palmer, 2005). É por isso necessário que os programas de formação de professores adoptem perspectivas construtivistas transversais a toda a formação, através da promoção de espaços e momentos que fomentem a interrogação, a reflexão e a construção de significados (Fosnot 1999, p. 308).

Ainda que o construtivismo seja uma teoria psicológica sobre o conhecimento e a aprendizagem e não uma teoria sobre o ensino (Fosnot, 1999), o construtivismo esteve por detrás de reformas curriculares levadas a cabo a partir dos anos 80 e teve profundas implicações no desenvolvimento de propostas de modelos de ensino (Palmer, 2005). Embora existam muitas diferenças, um aspecto comum aos vários modelos de ensino, informados e guiados pela visão construtivista da aprendizagem, é a defesa de abordagens que proporcionem ao aluno experiências concretas e contextualmente significativas que os levem a procurar padrões, a formular questões e a construir os seus próprios modelos, conceitos e estratégias (Fosnot, 1999, pp.9,10). Por exemplo, no caso do ensino da Matemática são defendidas estratégias de ensino centradas na compreensão de conceitos, na resolução de problemas, nas conexões dentro e fora da Matemática e na comunicação de ideias matemáticas, através da promoção da discussão e da explicitação do modo de pensar (Vale, 2000).

Deste modo, considerou-se pertinente estruturar o percurso de formação em torno de duas vertentes: (1) formação dos futuros professores em História da Matemática centrada na resolução de problemas históricos e (2) formação para o ensino da Matemática que inclui o desenvolvimento e exploração de recursos didácticos, com foco nas componentes referidas.

A primeira vertente prende-se com a necessidade de a formação inicial proporcionar aos futuros professores o conhecimento do desenvolvimento histórico de tópicos da matemática escolar que enfatize os problemas (de natureza Matemática, social, cultural ou outra) que estiveram na origem de conceitos, ideias e princípios matemáticos que vão ensinar.

A segunda vertente procura preparar os futuros professores para a integração da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente através da discussão, planificação, implementação e reflexão de tarefas desenvolvidas numa perspectiva histórica e epistemológica com a finalidade de apoiar e melhorar a aprendizagem de e sobre Matemática (Fauvel, 1991 e Fauvel e van Maanen, 2000).

3.5.2. A escolha do tema: Pertinência e Fundamentação

Henri Lebesgue escreve, em 1954, na sua obra intitulada *Sur la Mesure des Grandeurs*:

> Il n'y a pas de sujet plus fondamental: la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'ést-à-dire l'object même de l'Analyse. (Lebesgue, 1954, p. 2)

A Medida surge, do ponto de vista histórico, nas palavras de Lebesgue, como o ponto de partida da matemática aplicada e como tendo originado a Geometria e levado à extensão do conceito de número natural ao de número real, ou seja, ao objecto de estudo da Análise Matemática.

Este estatuto privilegiado do tema Grandezas e Medidas é reconhecido em vários documentos curriculares. Na publicação *A Matemática na Educação Básica* (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) realçam-se aspectos como os desenvolvimentos tecnológicos que lhe estão associados, as conexões que permite estabelecer, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas e ao dia-a-dia, bem como as potencialidades deste tema no desenvolvimento de ideias matemáticas e na capacidade de formulação e resolução de problemas:

> A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na Medida estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas) e ao conceito de número (números fraccionários, decimais e racionais são usados para representar medidas. As medições constituem, ainda, uma boa oportunidade para trabalhar as fracções e os decimais (op. cit., p. 75).

De igual modo, os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) destacam a importância do estudo da Medida, pela sua transversalidade a muitas situações do dia-a-dia, pelas suas aplicações a outras disciplinas do currículo e porque oferece múltiplas oportunidades para aprender e aplicar conhecimentos matemáticos relativos a números, a operações, a geometria ou a análise e tratamento de dados, todos eles temas da matemática escolar. Assim, em particular nos primeiros anos, as experiências de aprendizagem relacionadas com a Medida (medições e resolução de problemas) têm uma importância central como contexto para a extensão do conceito de número, para consolidar a compreensão de ideias como, por exemplo, a de valor posicional, ou relacionadas com as várias estruturas para as quatro operação da aritmética ou, ainda, com cálculos com números decimais e fraccionários (Haylock, 2001). Ora, de acordo com Usiskin (2001) o ensino tradicional do Número ignora frequentemente as conexões internas que se podem estabelecer com temas como a Medida[84] ou a Geometria, as Probabilidades ou a Estatística e que esse facto tem implicações particularmente negativas para um ensino focado no desenvolvimento da literacia matemática.

Apesar da tradicional organização dos programas por grandes temas, a abordagem didáctica de cada tema deve ser encarada numa perspectiva que entre em linha de conta com a necessidade de concretizar as conexões possíveis em cada ano de escolaridade: "A ideia é partir de um dado tema mas procurando evidenciar as conexões com outros" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 14). Nesse contexto, a abordagem à Medida deve atender à existência de inúmeras situações que envolvem o tema dentro da própria Matemática, na vida quotidiana e noutras áreas do conhecimento, preconizando-se assim a importância de o estudo da Medida "realçar as conexões existentes no interior da própria matemática e entre esta e outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, os estudos sociais, a ciência, a arte e a educação física (NCTM, 2000, p. 44). Como tal, "conceitos capacidades da medida podem ser desenvolvidos e utilizados ao longo de todo o ano lectivo, em vez de serem abordados exclusivamente enquanto tópico isolado" (op. cit., p. 241). Assim, pode afirmar-se que a Medida não só têm um "peso" considerável no curricular escolar dos primeiros seis anos de escolaridade, como a sua aprendizagem é vital para os alunos.

Dada a riqueza histórica da Medida é de destacar o papel importante que o recurso à História da Matemática pode desempenhar para o estabelecimento de conexões entre tópicos matemáticos, com outras áreas do currículo ou com o quotidiano passado. Embora as orientações curriculares constantes dos programas oficiais para o ensino básico (tanto nos antigos programas para o ensino básico, datados do início da década de 90, como no

[84] O ensino tradicional da matemática ignora, em geral, a estreita relação que existe no mundo real entre Números e Medida (perímetro – adição, área – multiplicação, conversão de unidades - multiplicação e divisão)

novo Programa de Matemática, homologado em 2007) sejam relativamente escassas a esse nível, encontram-se algumas recomendações que apontam nesse sentido.

Por exemplo, no Programa de Matemática para o 2º ciclo do ensino básico (ME, 1991), sugere-se a realização de algumas actividades com uma perspectiva histórica como um meio para "ajudar os alunos a compreender a relação entre alguns factos da História da Matemática e problemas que o Homem tem procurado resolver" (p. 14). No mesmo Programa sugere-se a introdução dos números inteiros relativos a partir de "situações problemáticas que façam os alunos compreender a necessidade da criação de novos números e ligarem uma vez mais factos da História da Matemática com problemas que o Homem tem procurado resolver" (p. 30). Neste caso, como assinala Caraça (1978, p. 95) é o problema da Medida que está na origem de um novo tipo de números: "certas grandezas, e daquelas que com maior frequência aparecem na vida corrente, são susceptíveis de ser tomadas em dois sentidos opostos".

Já no novo Programa (ME, 2007), como já referimos, assume-se que, através da História da Matemática, é possível dar a conhecer aos alunos a relação entre a Matemática e os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos e, nesse sentido, proporcionar uma perspectiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade (p.10). Um exemplo ilustrativo desta perspectiva prende-se com questões relacionadas com a história das unidades de medida estandardizadas. Propiciar aos alunos a compreensão de algumas das situações que estiveram na origem do sistema de unidades que aprendem na escola (SI), poderá permitir a aquisição de uma visão mais dinâmica Matemática e, simultaneamente, tornar compreensíveis as unidades do SI e os princípios subjacentes a esse sistema, bem como as razões da persistência noutras culturas do uso de diferentes sistemas de medida. Associado a estes aspectos, não é de todo despiciente o argumento de que o conhecimento do contexto histórico em que determinadas questões matemáticas surgiram, pode despertar a curiosidade e o gosto de aprender, isto é, estimular a aprendizagem.

A investigação e a literatura têm identificado inúmeros problemas ao nível do conhecimento matemático dos professores relacionados sobretudo com a incompreensão de noções e procedimentos fundamentais relacionados com o tema da Medida, nomeadamente ao nível do conceito de unidade de medida e do uso apropriado de unidades de medida (Wu 1999; CBMS, 2001). Essa ausência de compreensão conceptual tem que ser tida em conta no processo de formação inicial de professores através da criação de condições para o estabelecimento de ligações apropriadas entre os conteúdos das várias unidades curriculares e os conteúdos da matemática escolar (CBMS, 2001). Para tal, como já salientámos no capítulo anterior, há que abandonar a crença de que os temas da matemática escolar são tão básicos que deve ser fácil ensiná-los e criar condições para que sejam revisitados, de um ponto de vista superior.

Em função do exposto e considerando as potencias vantagens resultantes de uma abordagem da Medida perspectivada de um ponto da História da Matemática num programa de formação inicial de professores para a escolaridade básica, ao nível da construção de conhecimentos mais consistentes sobre a Matemática e da criação de condições para a concretização de conexões no processo de ensino e aprendizagem, o presente estudo foca-se na temática da Medida, central e relevante, transversal a todos os ciclos de escolaridade e de reconhecido valor social, histórico, cultural e epistemológico.

3.5.3. Integração do Percurso de Formação no plano curricular da licenciatura e estratégias formativas

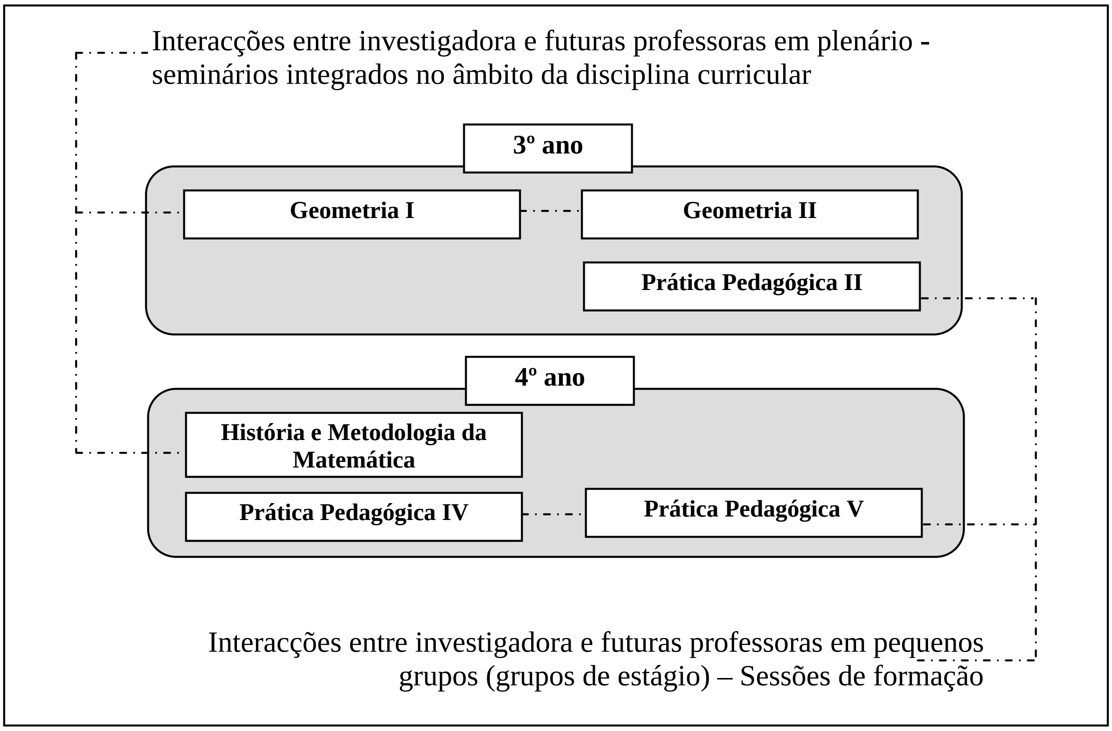
O PF desenrolou-se ao longo dos dois últimos anos de uma licenciatura em Ensino Básico, variante de Matemática/Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação e envolveu intervenções em várias disciplinas curriculares (apresenta-se no anexo 3 o plano de estudos do curso): Geometria I e II (3º ano/1º e 2º semestre), de História e Metodologia da Matemática (4º ano/1º semestre) e em três disciplinas de Prática Pedagógica (PP II[85] - 3º ano/2º semestre; PP IV[86] - 4º ano /1º semestre e PP V[87] - 4º ano/2º semestre).

Privilegiaram-se como estratégias formativas a resolução de problemas, a discussão, o trabalho de grupo e a reflexão crítica com problematização dos saberes (Vieira, 2003). Nesse sentido, a realização de seminários integrados no horário das disciplinas curriculares e a realização de sessões de trabalho em paralelo com as disciplinas

[85] Desenvolvida em turmas do 1º ciclo do ensino básico.
[86] No 2º ciclo do ensino básico.
[87] No 2º ciclo do ensino básico.

de Prática Pedagógica afigurou-se como uma metodologia de trabalho com potencialidades e adequada aos propósitos do estudo (figura 3.2).

Figura 3.2. Integração do PF no currículo e metodologia de trabalho



3.5.3.1. Geometria

O programa das disciplinas de Geometria I e II prevê o estudo, entre outros assuntos, de tópicos relacionados com a Medida, mais concretamente com os conceitos de comprimento, área e volume e com a medição indirecta de áreas e volumes. A abordagem metodológica recomendada, centrada na resolução de problemas e no raciocínio dedutivo, procura, entre outros aspectos, dar sentido aos conceitos e às fórmulas usadas para a medição de perímetros, áreas e volumes de certas figuras (por exemplo, do perímetro da circunferência, da área do círculo ou do volume da pirâmide) por forma a assegurar uma adequada conceptualização e abordagem futura.

No âmbito do Percurso de Formação planeou-se introduzir como inovação nesta disciplina curricular a resolução de problemas históricos envolvendo antigas unidades e sistemas de unidades. Esta componente do PF, estreitamente vinculada à História da Matemática e que não surge como uma mera curiosidade histórica, resultou da preocupação de integrar geometria, medida e números de modo a desenvolver a compreensão das futuras professores sobre as conexões entre conceitos destes três temas e de salientar as ligações da Matemática com o quotidiano e com outras áreas (Caraça, 1978). Assim, a intervenção em Geometria teve como objectivos: (i) suscitar a reflexão sobre a noção de grandeza e, em particular, sobre os conceitos de comprimento, área, volume, capacidade e massa; (ii) conhecer os problemas sociais e económicos decorrentes do uso de antigos sistemas de unidades, consciencializando para a presença da medida nas mais variadas actividades sociais e económicas; (iii) perceber as razões que estiveram na base da criação de um novo sistema de unidades (o sistema métrico decimal, mais tarde substituído pelo Sistema Internacional - SI); (iv) desenvolver capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e comunicação.

Para dar a conhecer às alunas, futuras professoras, um pouco da história da Medida em Portugal foi preparada e realizada uma visita de estudo ao Museu de Metrologia do Instituto Português da Qualidade, em Almada. Essa visita que se efectuou em 18 de Novembro de 2004 foi seguida da elaboração de um relatório crítico, por cada uma das participantes.

Relativamente aos problemas históricos, que constituíram a parte central do trabalho desenvolvido em Geometria (e no PF), procurou-se seleccionar situações relacionadas com a Medida que permitissem discutir conceitos e procedimentos abordados no currículo de Matemática da escolaridade básica, em particular dos níveis de ensino em que as futuras professoras exercerão, futuramente, a profissão (no Anexo 6 apresentam-se alguns dos problemas propostos, bem como algumas notas sobre os mesmos). Assim, foram seleccionados problemas de aplicação da Matemática ao quotidiano social do passado histórico português e também de carácter recreativo. Em todos os problemas estão presentes aspectos relacionados com a história da Medida e, em particular, com os antigos sistemas de unidades. Destes ressalta, por exemplo, que as antigas unidades não tinham a mesma grandeza em todos os países (mesmo quando designadas da mesma maneira), nem nas diversas províncias da mesma nação; a coexistência de relações muito variadas entre as diferentes unidades dos antigos sistemas de unidades (uso de uma grande diversidade de divisores fraccionários não decimais); e questões sociais e éticas colocadas por essa realidade.

Na figura 3.3. apresenta-se um desses problemas, construído a partir de uma situação exposta num capítulo intitulado por *Taboada dos pezos e medidas destes Reynos acima declarados*, da obra *Flor da Arismética Necessária* de Guiral e Pacheco (1624).

Figura 3.3. O problema *Transacção de panos entre Portugal e Castela*

O côvado tem três palmos. Seda e panos vendem-se por côvado. Excepto alguns panos baixos que chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.

(Guiral e Pacheco, fls 17v./18r. transcrito em Marques de Almeida, 1994a, p. 230)

Interprete, do ponto de vista comercial, a afirmação: “De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%”.

Trata-se de uma situação relativa à transacção de panos entre Portugal e Castela, que inclui como aspecto curioso o facto de o mercador português, em qualquer das situações, ter sempre lucro, e o ganho parecer não depender do preço de compra e venda dos tecidos. Uma leitura atenta do texto permite concluir que os panos da Índia de linho e de tear são vendidos pelo mercador português a Castela. Ora, só é possível o lucro de 25% se o mercador, que compra em Portugal panos de linho e de tear medidos em varas portuguesas, quando os transacciona, com Castela, o fizer numa unidade menor que a portuguesa. Testada a hipótese de o fazer em varas de Castela, conclui-se que por cada vara portuguesa de pano o mercador ‘faz’ uma vara castelhana e sobra-lhe ¼ do tecido inicial, isto é, tem efectivamente um lucro de 25% em pano. De modo similar, se conclui o lucro na transacção das sedas.

As possibilidades de ligação do contexto dos problemas com outras áreas curriculares de docência das futuras professores (por exemplo, com a área curricular de Estudo do Meio – História, Geografia e Ciências Físicas e Naturais - no 1º CEB) considerou-se também como particularmente relevante. Refira-se ainda que alguns dos problemas serviram também como ponto de partida para a dedução de algumas fórmulas matemáticas para a medida indirecta das grandezas área, como é o caso da fórmula de Herão para o cálculo da área de um triângulo, conhecidos os comprimentos dos seus lados e que era desconhecida das futuras professoras.

3.5.3.2. História e Metodologia da Matemática

A disciplina curricular de História e Metodologia da Matemática (4º ano /1º semestre), cuja finalidade é "enquadrar o ensino da Matemática a partir do conhecimento da história e da metodologias específica da Matemática e das aplicações desta às outras ciências e a situações da vida real", tem como um dos seus objectivos "utilizar a história da Matemática como motivação na construção de situações de ensino/aprendizagem". Deste modo, e em articulação com as intervenções anteriores, foram dinamizados cinco seminários incidindo sobre as potencialidades didácticas da História da Matemática. Para dois desses seminários, foi convidado um Matemático que, desde há muito, acumula com a investigação em Matemática a reflexão sobre questões ligadas ao ensino da Matemática no ensino não superior e, em particular, sobre o papel didáctico da História da Matemática. Nos três restantes, apresentaram-se e discutiram-se questões relacionadas com a evolução do conceito de número e exploraram-se alguns recortes históricos inseridos em manuais escolares para o 6º ano de escolaridade. Para além disso, em articulação com a docente responsável pela disciplina, considerou-se relevante desafiar as futuras professoras a explorar, do ponto de vista didáctico, para um ambiente de aprendizagem não formal e interactivo, um conjunto de problemas históricos envolvendo antigas unidades, nos quais se incluíram alguns dos problemas propostos e resolvidos em Geometria I.

No âmbito das mais recentes orientações curriculares para os primeiros anos de escolaridade, considera-se que os espaços de educação não formal são espaços por excelência para o desenvolvimento de actividades de aprendizagem interactivas muito significativas, na medida em que é possível envolver os alunos na realização de actividades complementares e enriquecedoras das realizadas na sala de aula (Guisasola et al, 2005; Anderson, Lucas e Ginns, 2003). Por outro lado, estando este estudo centrado na formação de professores e considerando que a investigação aponta que a participação activa de professores em espaços de educação não formal pode também propiciar um estímulo para práticas de ensino inovadoras em contextos formais como a sala de aula (e.g. Anderson, Lucas e Ginns, 2003; Guisasola et al, 2005, Rodrigues e Martins, 2005), é importante e fundamental que a formação proporcione aos futuros professores não só a oportunidade de planear, implementar tarefas de ensino em sala de aula e reflectir sobre as práticas, como também a oportunidade de se envolver em experiências de ensino/aprendizagem em espaços de educação não formal. Defende-se, assim, que a actual formação de professores não pode descuidar tal aspecto do ensino em contextos não formais, pela importância que lhe é actualmente reconhecida (Oliva et. al., 2006; Guisasola et al, 2005; Anderson, Lucas e Ginns, 2003) e pelo seu valor enquanto contributo para o desenvolvimento de competências nos três domínios apontados (resolução de problemas, conexões e História da Matemática).

Foi neste contexto que, com a finalidade de proporcionar às alunas, futuras professoras, situações e actividades de reflexão sobre ensino e aprendizagem em contextos não formais e suas relações com o ensino formal, se propôs como tarefa a organização de uma exposição interactiva constituída por cinco módulos, alusivos à Medida, e destinada a alunos de 3º, 4º, 5º e 6º anos de escolaridade. Deste modo, dez futuras professoras[88] foram desafiadas, em grupo de duas, a explorar, do ponto de vista didáctico, para um ambiente de aprendizagem não formal e interactivo, um conjunto de tarefas inspiradas na história da Medida. As tarefas a incluir em cada módulo deveriam prever a utilização de materiais concretos que permitissem a realização de comparações, de medições com instrumentos de medida e, ainda, a resolução de problemas históricos (alguns desses problemas já tinham sido propostos às futuras professoras em Geometria, já tendo sido, por isso, resolvidos por estas, enquanto alunas de Geometria). A proposta da sua exploração didáctica incluía a concepção e produção de materiais que pudessem apoiar a resolução dos problemas por crianças do 3º ao 6º ano de escolaridade.

Tomou-se como pressuposto do planeamento da Exposição que a natureza e riqueza dos problemas, ao oferecer a oportunidade para a realização de actividades de medição e de resolução manipulativa dos problemas, constituía uma oportunidade para as futuras professoras desenvolverem o seu conhecimento didáctico, numa situação com características muito diferentes da sala de aula mas igualmente de grande complexidade.

> Medir é uma actividade que se presta particularmente bem à utilização de materiais concretos. De facto, não é de esperar que os alunos consigam alcançar uma compreensão

---

[88] Todas as que estavam inscritas na disciplina de História e Metodologia da Matemática no ano lectivo 2005/2006.

> profunda do processo de medir sem manusearem materiais, fazerem comparações físicas e medirem com os instrumentos apropriados (NCTM, 2000, p. 44).

Na selecção das tarefas para a Exposição, tarefa a cargo da investigadora, teve-se em conta os níveis de ensino à qual esta se destinava e, portanto, o currículo actual de Matemática da escolaridade básica. Assim, as tarefas foram intencionalmente seleccionadas de modo a permitirem a interligação entre as actividades realizadas na Exposição e conteúdos dos programas de Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico. Centrada na problemática da Medida, a selecção das grandezas a integrar na Exposição foi orientada pela importância social, económica e política que a medição de cada uma delas assumiu ao longo da história da humanidade e também nas potencialidades de exploração didáctica. A título ilustrativo apresenta-se nas figura 3.4. e 3.5. duas das tarefas integradas, respectivamente, nos módulos "Dinheiro" e "Massa".

Figura 3.4. O problema *As bolsas com dinheiro*

Quatro homens têm, cada um, uma bolsa com dinheiro; o que cada um tem não se sabe, mas os três sem o primeiro têm 13 réis; e os outros, sem o segundo, 12 réis; e os outros, sem o terceiro, têm 11, e os outros, sem o quarto, têm 9. Pergunta-se: quanto tinham todos e quanto tinha cada um.
(Adaptado de Guiral e Pacheco, in Almeida, 1994b, p. 285)

Figura 3.5. À descoberta das antigas unidades de massa

Nos pesos de Portugal, é necessário somar dois arráteis, um meio-arrátel, três quarta e cinco onças de coisas de valor com três arráteis, um meio-arrátel, duas quartas e quatro onças. Pergunto: qual é a soma?
(Adaptado de Guiral e Pacheco, in Almeida, 1994b, p. 209)

Releve-se que a planificação da Exposição e a concepção dos módulos como um todo que se desejava coerente e harmonioso, foi integrada no currículo escolar da disciplina de História e Metodologia da Matemática. Todas as restantes actividades desenvolvidas pelas futuras professoras relativas à exploração didáctica dos problemas, à concepção e construção de recursos didácticos que pudessem ser manipulados e usados pelas crianças na resolução das outras tarefas propostas decorreram em horário extracurricular, com o apoio, sempre que solicitado, da investigadora e da professora da disciplina de História e Metodologia da Matemática. Refira-se que a investigadora foi procurada por todas as futuras professoras envolvidas na Exposição e não apenas pelas três alunas participantes no estudo. Tal circunstância não é de estranhar, pois as intervenções na modalidade de seminário abrangeram toda a turma e, por isso, durante todo o trabalho de campo a investigadora desenvolveu uma relação próxima com todos os elementos da turma. No Anexo 5 apresentam-se as tarefas propostas em cada módulo.

3.5.3.3. Prática pedagógica

Qualquer processo de formação de professores tem como objectivo último a introdução de alguma melhoria ou realização de alguma inovação nas práticas de ensino (Jiménez et al., 2000). Deste modo, com o propósito de proporcionar às futuras professoras a oportunidade de planear, implementar e reflectir sobre práticas de ensino que relevem como experiências de ensino e aprendizagem a História da Matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática, promoveu-se, durante todo o período em que as futuras professoras desenvolveram a sua Prática Pedagógica (PP), a realização de sessões de trabalho em que a investigadora procurou colaborar e apoiar as futuras professoras no processo de ensino da Matemática. Essas sessões decorreram em horário extra-lectivo, acordado com as participantes no estudo. Numa fase inicial, realizaram-se algumas sessões em grande grupo em que se procurou promover a análise e a reflexão sobre documentos curriculares para o ensino básico e reflectir sobre o papel do manual escolar no processo de ensino e aprendizagem. Dadas as condicionantes decorrentes do facto das três futuras professoras participantes do estudo fazerem parte de grupos de estágio diferentes, com cooperantes diferentes e a realizarem a sua PP em escolas também diferentes[89], essas sessões envolveram interacções entre a investigadora e as futuras professoras em pequenos grupos (2 grupos de estágio de 2 elementos cada[90]). Além disso, salienta-se que a estrutura curricular da licenciatura (Anexo 3) inclui, tanto no 3º como no 4º ano, outras disciplinas em paralelo com as disciplinas de Prática Pedagógica, o que dificultou ainda mais a conciliação dos horários e das disponibilidades das várias participantes no estudo.

[89] Refira-se que no ano lectivo de 2005/2006, um dos grupos realizou estágio numa escola situada a cerca de 15km da Instituição de Ensino Superior.
[90] Na realidade, na PP no 1º CEB os grupos eram constituídos, em média, por quatro elementos. Deste modo, todos os elementos participaram nas reuniões, sempre que o desejaram, embora nem todos estivessem a ser seguidos pela investigadora

Apoio à Prática de Ensino no 1º Ciclo do Ensino Básico (1ºCEB)

De acordo com a organização interna da PP II na ESE em que decorreu o estudo, realiza-se uma sessão semanal de 3h dedicada à reflexão sobre as aulas implementadas na semana anterior e também à planificação das aulas da semana seguinte. Nessa sessão participam todos os elementos dos grupos de estágio e respectivas professoras cooperantes, bem como a professora supervisora da ESE. A planificação toma como ponto de partida um guião distribuído a cada grupo de estágio pela professora cooperante e concertado previamente com a professora supervisora. Na figura 3.6. apresenta-se, a título ilustrativo, um desses guiões, onde se pode observar apenas uma listagem de tópicos a abordar em três dias da semana. Refira-se que no ano lectivo 2004/2005, a PP no 1º ciclo do ensino básico (1º CEB) decorreu no período da tarde das 14h às 18h, às 2ª, 3ª e 4ª feiras, de acordo com o protocolo celebrado entre as escolas do ensino básico e a ESE. Decorrente da forma como esta disciplina foi organizada e estruturada e, ainda, pelo facto dos grupos de estágio serem constituídos, em geral, por quatro futuras professoras, a cada um dos elementos do grupo de estágio são atribuídas entre 24 a 30 horas de prática de ensino individual[91] em sala de aula correspondente a cerca de duas "semanas e meia" (referimo-nos a uma semana de três dias). Em termos práticos, constata-se que sendo a experiência de prática de ensino no 1º CEB repartida pelas áreas de Matemática, Estudo do Meio e Português, a prática de ensino da Matemática não é continuada no tempo (note-se que dado o número de elementos que integram cada grupo de estágio e o facto da PP só se realizar nos três primeiros dias da semana, cada aluna tem um interregno de, pelo menos, 3 semanas entre cada duas intervenções. Por exemplo, Joana, uma das participantes no estudo, desenvolveu a sua prática de ensino nos dias 4, 5 e 6 de Abril, 9, 10 e 11 de Maio e 6 e 7 de Junho.

Pelo exposto, no 1º ano do estudo, entre Março e Junho de 2005, na disciplina de Prática Pedagógica II, as sessões de formação constituíram-se como um espaço de apoio à planificação, onde também se discutiam ideias e sugestões avançadas pelas futuras professoras (muitas delas sugeridas pelas respectivas professoras cooperantes) e se fomentava a reflexão sobre as aulas implementadas[92]. Paralelamente, com o objectivo de identificar, em contexto de prática pedagógica, áreas críticas de formação para o ensino da

[91] A estas acrescentam-se cerca de 15 horas de PP em grupo. Teoricamente representam um período em que todos os elementos do grupo articulam entre si as intervenções em sala de aula.
[92] A brochura apresentada no Apêndice 1 foi construída pela investigadora como apoio ao ensino de tópicos no âmbito da Medida.

Matemática nas perspectivas enunciadas e ainda potenciais dificuldades na operacionalização do estudo (ao nível de reacções dos professores cooperantes da ESE, das reacções das futuras professoras e dos alunos do ensino básico derivadas, por exemplo, da presença da câmara vídeo na sala de aula), procedeu-se à videogravação de um conjunto de aulas implementadas por sete das futuras professores no 1º ciclo do ensino básico (destas, como já referimos, só três foram acompanhadas de forma regular na PP no 2º CEB). Nesta fase do estudo, a observação não participante assumiu-se como a técnica privilegiada de recolha de dados.

Figura 3.6. Guião semanal de PP II

Prática Pedagógica

3º Ano Semana: 14 15 e 16 de Març

Estudo do Meio:

Aspectos Físicos do Meio Local

- Recolher amostras de rochas existentes no ambiente próximo;
- Identificar algumas das suas características (cor, textura, dureza…)
- Reconhecer a utilidade de algumas rochas.

Língua Portuguesa:

Comunicação oral/ Comunicação escrita;

- Exprimir-se por iniciativa própria;
- Responder a questionários;
- Participar em grupo na participação de histórias, relatos etc…
- Aprender o sentido de um texto no qual foram apagados ou semiapagada palavras ou letras;
- Praticar a leitura dialogada, distinguindo as intervenções das personagens;

Funcionamento da Língua

- Decompor palavras em sílabas (para efeito de translineação).

Matemática:

Grandezas e Medidas;

- Graduar o decímetro em centímetro;
- Fazer medições usando o metro, a fita métrica, a régua, regista-las.
- Medir e calcular os perímetros de polígonos.
- Problemas.

Exploração didáctica de Problemas Históricos no 2º Ciclo do Ensino Básico

No 2º ano do estudo, no período de Novembro de 2005 a Junho de 2006 e no âmbito das disciplinas de Prática Pedagógica IV e V, a investigadora promoveu a realização de sessões de trabalho que se constituíram como um espaço de preparação do ensino da Matemática via tarefas que foram sendo desenvolvidas no Percurso de Formação e também de reflexão sobre as aulas implementadas pelas futuras professoras. Nestas sessões, a investigadora assumiu o papel de colaboradora na preparação do ensino através da criação de oportunidades de discussão de aspectos didácticos, directamente relacionados com os conteúdos programáticos que as futuras professoras se propunham abordar. Como estratégia de formação, partiu-se de um conjunto de problemas históricos, acompanhados de algumas propostas de exploração didáctica, nas quais se incluíam algumas notas relativamente à contextualização da situação do problema na época histórica a que o mesmo reporta. De acordo com a planificação delineada em cada núcleo de estágio, os problemas foram sendo propostos às futuras professoras como tarefas possíveis a propor aos seus alunos para a aprendizagem da Matemática. Deste modo, as sessões de trabalho organizaram-se em torno da análise e resolução de problemas históricos propostos pela investigadora, com especial ênfase na discussão de questões didácticas relacionadas com a sua integração em sala de aula. Tal como recomenda Ball (2000, p. 242), procurou-se que as futuras professoras, perante cada tarefa proposta, se interrogassem e discutissem a adequação desta aos seus alunos a vários níveis:

(a) Qual o potencial matemático da tarefa, isto é, quais as ideias e processos matemáticos envolvidos na tarefa;

(b) Que estratégias utilizar para que a actividade desenvolvida pelos alunos se constitua como uma oportunidade de aprendizagem Matemática[93];

(c) Como motivar os alunos para a resolução do problema.

Para tal, as futuras professoras, uma vez confrontadas com os problemas históricos, eram incentivadas a resolvê-los, a discutir o(s) processo (s) de resolução, as suas soluções e a pensarem sobre como desenvolvê-los com os alunos, na sala de aula.

[93] A este nível importa reflectir sobre o que é que pode tornar o problema difícil para os alunos, antecipando dessa forma o que é que o professor pode fazer para ajudar a ultrapassar obstáculos.

Assim, a fase de preparação do ensino via tarefas desenvolvidas no PF desenvolveu-se em torno de três eixos concorrentes:

- Resolução dos problemas;
- Conteúdos matemáticos: identificação e discussão dos conceitos e processos matemáticos requeridos na resolução dos problemas;
- Discussão de possíveis estratégias para a integração dos problemas na aula, eventuais dificuldades dos alunos, orientação da resolução do problema, …

Releva-se que apesar de as tarefas serem inicialmente desenvolvidas e propostas pela investigadora, a decisão de as usar ou não na prática de ensino foi sempre das futuras professoras. Aliás, sempre que alguma tarefa era considerada pela futura professora como pouco interessante ou difícil para os seus alunos ou para si própria (enquanto professora que tem de se sentir capaz de o resolver e apoiar os seus alunos nesse processo) as tarefas eram ajustadas ou mesmo rejeitadas. Deste modo, as futuras professoras foram confrontadas com recursos didácticos num ambiente no qual tiveram a oportunidade de fazer as suas escolhas e de se envolverem de forma activa em todas as fases de integração da História da Matemática em sala de aula (Furinghetti e Paola, 2003).

As sessões de trabalho propiciaram assim a oportunidade de as futuras professoras analisarem e prepararem tarefas inovadoras a propor em sala de aula. Como refere Ball (2000) este trabalho de análise e preparação de um problema desenvolve, a par de outras competências, competências de raciocínio matemático indispensáveis para um ensino compreensivo da Matemática. Porém, representa apenas uma fracção do trabalho que o professor deve executar para tornar proveitoso o uso de uma tarefa com os seus alunos. De facto, uma vez proposta a tarefa aos alunos, o professor tem ainda muito trabalho pela frente que exige uma profunda compreensão das matérias que ensina e no qual se inclui, por exemplo, a orientação da actividade dos alunos, a gestão das interacções em sala de aula, a tomada de decisões sobre que ideias dos alunos interessa desenvolver e quais devem ser deixadas cair, que sugestões e explicações deve dar, etc.

> None of these tasks of teaching is possible to do generically. No matter how committed one is to caring for students, to taking students' ideas seriously, to helping students develop robust understandings, none of these tasks of teaching is possible without making use in context of mathematical understanding and insight (…) Although some teachers have

> import understandings of the content, they often do not know it in ways that help them hear students, select good tasks, or help all their students learn (Ball, 2000, p.243).

As aulas, em que as futuras professoras propuseram aos seus alunos as tarefas discutidas nas sessões de trabalho do PF foram videogravadas e/ou audiogravadas e nalguns casos observadas pela investigadora. Após essas aulas, as sessões de trabalho constituíram-se também como um espaço de discussão e reflexão sobre o acontecido na aula (papel do professor e dos alunos, intervenções do professor, reacções das crianças à tarefa,...).

Neste contexto, no 2º ano do estudo, as sessões de formação incidiram essencialmente na planificação de situações de aprendizagem a partir da discussão didáctica das tarefas desenvolvidas e ainda na reflexão sobre as práticas de ensino conduzidas em sala de aula. No Apêndice 2 apresentam-se as tarefas desenvolvidas, acompanhadas de algumas propostas de exploração didáctica.

3.5.3.4. Papel da investigadora

De acordo com o PF delineado, procurou-se desenvolver uma investigação de cariz colaborativo, na qual a investigadora assumiu um papel activo por forma a promover e manter um ambiente de pesquisa no qual a discussão que proporciona e sustenta a mudança possa ocorrer (Day, 1991 citado em Serrazina, 1998, p. 134). Deste modo, tal como preconizado por Serrazina (1998) e Ball (1988) a investigadora desempenhou um duplo papel durante o trabalho de campo. Por um lado, trabalhou colaborativamente com as futuras professoras, ainda alunas em formação, no desenvolvimento da compreensão de tópicos da matemática escolar e da sua didáctica e, por outro lado, como investigadora, procurou compreender a relação entre o PF e o desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática.

3.5.4. Recursos produzidos

3.5.4.1. Fontes históricas. Selecção e adaptação de problemas históricos

A noção de problema histórico discutida no capítulo II remete-nos para problemas cuja fonte são livros de História da Matemática ou antigos livros de Matemática. Relativamente a estes últimos, Swetz (2000a, p. 11) escreve:

> Old mathematical texts can tell us many things. Certainly they provide information on the development of mathematical knowledge and procedures, the uses of mathematics, and types of problems that were important to our forebearers. They provide insights into the culture and times within which they were written and give us hints as to the forces that shaped and controlled mathematical concerns.

Em Portugal, a transformação da realidade e da vida material associada aos Descobrimentos determina mudanças de mentalidade e uma abertura continuada ao uso da matemática em vários grupos sociais. É nesta "conjuntura de profunda transformação da vida material e de acentuadas mudanças nas estruturas mentais" (Almeida, 1997, p.18) que deve ser olhado o aparecimento de livros de Aritmética Comercial. O primeiro desses textos, da autoria de Gaspar Nicolás, editado, pela primeira vez em 1519 e intitulado *O Tratado da Prática de Arismética,* é encarado como um dos maiores contributos para que o sistema de numeração de posição passasse a seu usado em Portugal e, sobretudo, como a obra que estabelece a ligação entre a tradição aritmética italiana e os aritméticos portugueses (Almeida, 1994a, 1997; Albuquerque, 1973). A obra, cujos primeiros fólios são inteiramente dedicados à aritmética, inclui a apresentação de um grande número de problemas concretos reunidos por grupos de acordo com a técnica de resolução, prossegue com alguns fólios de geometria nos quais se incluem questões relativas ao cálculo de áreas e volumes, e finaliza com problemas sobre a «liga de prata» em Portugal. Alguns dos problemas integrados na parte dedicada à aritmética "remontam aos gregos e aos árabes e vinham servindo há mais de 200 anos de suporte ao raciocínio aritmético" (Almeida, 1997a, p.66), outros estão estreitamente ligados a actividade e prática comerciais e a problemas concretos dos mercadores. O ensino dos problemas de aritmética é, na opinião de Almeida (1994a, p. 152), muito importante na medida em que constitui o meio através do qual se aplicam os conhecimentos sobre a armação das contas. Não se tratando de uma obra original, pois terá sido, pelo menos, assumidamente influenciada pela *Summa Arithemetica, Geometria Proportione et Proportionalita* da autoria de Frei Luca de Borgho (também conhecido por Luca Paccioli) e publicada em Veneza em 1494, o seu conteúdo está, na opinião de Albuquerque (1973) profundamente vinculado à "febril actividade comercial de Lisboa nos primeiros anos do século XVI" [94]. A profunda influência exercida por este livro, que foi alvo de inúmeras reedições por um período de dois séculos (1530,

---

[94] Na opinião de Almeida (1994a, p. 98) as fontes dos aritméticos portugueses são ainda desconhecidas. É possível, com alguma cautela, avançar quatro autores cujas obras terão influenciado, de uma forma ou de outra os aritméticos portugueses quinhentistas: Luca Pacioli, Bradwardine, Juan de Ortega e Mossen Juan Andres.

1541, 1551, 1573, 1594, 1607, 1613, 1679 e 1716), deveu-se, em parte, à inclusão de um número muito considerável de problemas e respectivas soluções e ao prestígio do seu autor, a tal ponto que "várias outras compilações sobre o mesmo tema, não conseguiram tomar-lhe o lugar[95] (Albuquerque, 1963[96]).

Escreve Almeida (1994a, p.25): "A articulação da Aritmética com as práticas sociais é um processo dialéctico que, no tocante a Portugal (…) se afirmou pelo ajustamento das operações ensinadas como o feixe das necessidades objectivas, uma vez que a vida quotidiana de um mercador (…) obrigava a resolver problemas de moeda, de juros, de trocas de mercadorias, de criação e de repartição de riqueza". E acrescenta que os livros portugueses para uso dos mercadores (Tratados da Prática da Aritmética) "prosseguem com persistência objectivos de domínio de situações concretas" (p. 49) e incluem questões da maior utilidade prática para a compreensão da vida económica da época. Apoiam esta afirmação os inúmeros problemas respeitantes ao comércio português da época, aos vários direitos alfandegários que pagavam as mercadorias orientais no porto de Lisboa (cisas, quarto e vintena, com ou sem quebra, etc.), às medidas de comprimento ou de peso adoptadas na Casa da Mina e da Índia, às equivalências das unidades de medida e moedas em uso nas principais praças comerciais da época (Almeida, 1994, 1997; Albuquerque, 1973).

Em termos de conteúdo matemático, os problemas a que nos referimos envolvem essencialmente aplicações da regra de três simples e da regra de três composta a questões relacionadas com direitos aduaneiros, com os acréscimos que sofriam os preços das mercadorias nas compras a prazo ("conta dos baratos"), com a divisão de lucros ou perdas pelos sócios de uma empresa ("regra de companhia"). Nessas questões, o trabalho com números quebrados ou fraccionários revestia-se de particular atenção e colocava dificuldades específicas[97]. Note-se que estes textos reportam a uma época de divulgação generalizada do sistema de numeração decimal (SND), mas apenas para a representação e cálculo com números inteiros[98]. Incluíam também algumas questões de aplicação da regra

[95] Refere-se, em particular, aos tratados *Arte de Arismética* de Bento Fernandes (editada em 1555) e *Flor da Arismética Necessária* de Afonso Guiral e Pacheco (editada em 1624).
[96] No prefácio à edição fac-smile de Nicolas (1963).
[97] Por exemplo, a regra de três simples com quebrados é alvo de abordagem específica (Nicolás, 1519, fol. 27)
[98] Na Europa, só com a criação e divulgação do sistema métrico decimal, se dá a aceitação plena da extensão do SND à representação de números fraccionários (Katz, 2000)

da falsa posição, a somas dos termos de progressões aritméticas e geométricas (Albuquerque, 1973)

Pelo exposto, conclui-se que os tratados de aritmética comercial, publicados em Portugal entre 1519 e 1624, incluem um conjunto de problemas passíveis de serem explorados didacticamente no ensino básico e, em particular, no 2º ciclo básico quer pela adequação do seu conteúdo matemático ao respectivo currículo de Matemática, quer pelas ligações que permitem estabelecer com outras áreas do currículo do ensino básico. De facto, os problemas que reflectem as necessidades imediatas da sociedade e o papel da Matemática na vida quotidiana quinhentista, remetem para situações históricas e espaços sociais e físicos abordados na disciplina de História e Geografia e, portanto, familiares aos alunos deste nível de ensino.

Escolhidas as fontes e julgada a adequabilidade dos problemas ao ensino básico (em termos de conteúdo matemático e dos contextos referidos nos seus enunciados), a adaptação dos problemas foi um aspecto crítico e relevante do estudo, até porque se entendeu desejável manter o sentido dos enunciados originais de modo a preservar a sua essência. Como afirmam Bruckheimer e Arcavi (2000 p. 136), "os símbolos, a linguagem e a abordagem das fontes primárias não só proporcionam um sabor genuíno do passado, como também constituem uma oportunidade para alguns encontros não mediados com a verdadeira substância do passado". O acesso às transcrições feitas por Almeida (1994a, 1994b), no âmbito do seu trabalho de doutoramento publicado em dois volumes com o título *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, da quase totalidade da obra de Gaspar Nicolás (*Tratado da Pratica D'Arismetica*, 1519), de Rui Mendes (*Prática d'Arismética*, 1540), de Bento Fernandes (*Tratado da Arte de Arismética*, 1555) e de Guiral e Pacheco (*Flor da Arismética necessária*, 1624), foi um marco muito importante e determinante dessa tarefa. Dado o rigor do trabalho desenvolvido por Marques de Almeida que, como o próprio afirma, teve em conta "não só a fidelidade aos textos compulsados e a objectividade intrínseca deste *corpus*, mas também a apresentação de um texto de fácil inteligibilidade" (Almeida, 1994b, p. 19) tomaram-se como ponto de partida essas transcrições. No caso das obras de Gaspar Nicolás, Ruy Mendes e Guiral e Pacheco foi ainda possível aceder, nas Bibliotecas da Universidade de Coimbra, no primeiro caso, à edição fac-similada da livraria Civilização (Albuquerque, 1963) e, nos outros dois, aos originais, o que permitiu transcrever outros problemas com interesse para o estudo e não transcritos por Almeida[99]. Em todas as situações, optou-se assim por manter a fidelidade às fontes primárias, não esquecendo, porém, a necessidade de adequar a linguagem aos seus destinatários, procurando garantir que esta não se tornasse um obstáculo à compreensão da situação exposta. No caso dos problemas propostos em Geometria foi facultado, às futuras professoras, o confronto com o enunciado original[100].

A selecção dos problemas históricos recaiu sobre problemas aplicados (de que é exemplo *O Quarto e Vintena* ou *O Comércio de panos com Castela*) e de cariz recreativo (de que é exemplo o problema *O Gato e o rato* ou *Medir volumes com cabaças*). Em termos de conteúdo matemático, todos os problemas se inserem no âmbito de tópicos relacionados com a Medida, o Número e a Proporcionalidade. Um traço comum a todos é a alusão a atributos mensuráveis como o dinheiro, o comprimento, a área, a capacidade, o volume ou a massa, a antigas unidades de medida e, nalguns casos, às relações fraccionários entre elas[101].

3.5.4.2. Materiais didácticos

Ao longo do PF desenvolveu-se um conjunto de materiais didácticos de apoio à prática de ensino no 1º e 2º CEB que se apresentam e justificam de seguida.

Documento de apoio à abordagem didáctica da Medida

A construção de um documento destinado a apoiar a prática de ensino no 1º CEB dos futuros professores de Matemática na abordagem dos tópicos relacionados com o tema da Medida resultou da necessidade sentida de sistematizar conceitos e aspectos históricos da Medida discutidos em Geometria e de os articular com aspectos específicos do seu ensino na escolaridade básica. A este nível, destaca-se a importância que o conhecimento de aspectos da história da medida pode trazer para a compreensão do tema por parte dos professores e para a sua integração na aula de Matemática. Por exemplo, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, pp. 78 e 79) recomendam essa integração pelo estímulo

[99] Procurando-se manter nesse caso os critérios de transcrição adoptados por Almeida (1994b, pp. 19-20)
[100] Tratando-se de problemas envolvendo conhecimentos elementares não se considerou relevante a confrontação entre os processos de resolução seguidos pelas futuras professoras com o processo de resolução proposto nos textos originais.
[101] Pode afirmar-se que muitos desses problemas mostram as dificuldades decorrentes do uso de uma grande diversidade de unidades para medir a mesma grandeza, da existência de um grande número de divisores para certas unidades e da diversidade de divisores de unidade para unidade.

positivo que pode despertar no aluno o conhecimento do contexto histórico em que determinadas ideias matemáticas surgiram, em particular as relacionadas com a história das unidades de medida do sistema internacional ou de sistemas de medida usados noutras culturas.

O ensino/aprendizagem da Medida na escolaridade básica requer a identificação de diferentes atributos dos objectos e o entendimento de que alguns deles são mensuráveis, isto é, passíveis de serem expressos por um número que traduza o resultado da comparação de dois atributos da mesma espécie. Como escrevem Ponte e Serrazina (2000, p. 194): "Trata-se de tornar comparáveis através de números quantidades de grandeza[102] do mesmo tipo, de forma que as relações entre as grandezas e as suas medidas sejam as mesmas". Na aprendizagem da medida, o reconhecimento do carácter mensurável de atributos como, por exemplo, o comprimento, a área, o volume, a massa ou a capacidade, tem subjacente a aquisição gradual de algumas ideias chave como sejam as noções de grandeza (na qual estão envolvidas, entre outras, as ideias de comparação e ordenação de objectos em relação ao atributo em questão), de unidade de medida, de subdivisão da unidade de medida e a expressão da medida por um número.

Considerando-se não ser possível abordar com rigor todos os atributos mensuráveis que fazem parte do currículo de Matemática da escolaridade básica, optou-se por centrar a atenção nos seguintes: comprimento, área, volume, capacidade e massa. A selecção dos três primeiros justifica-se por constituírem as bases da geometria da escola elementar. Quanto à capacidade, considerou-se que a relação intrínseca entre esta e o volume, bem como o facto destes dois atributos serem muitas vezes confundidas (Ponte e Serrazina, 2000, p. 199), justifica a pertinência da sua abordagem num documento de formação de professores. Também a grandeza massa é objecto deste estudo pelas suas ligações históricas com a unidade de volume. De facto, a unidade de massa que é definida actualmente em termos da massa de um protótipo depositado no *Bureau International des Poids et Mesures*, foi construído de acordo com a definição original: o quilograma é a massa de um decímetro cúbico de água à temperatura da sua máxima densidade (Katz, 1998). Acresce ainda que a designação da unidade de massa e a formação dos nomes dos

[102] Os autores referidos definem grandeza "como um conjunto de classes de equivalência, onde se definiu uma relação de ordem e onde é possível definir uma lei de composição interna que tem as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro" (op. cit, p. 188). Neste contexto, cada classe de equivalência é denominada por quantidade da grandeza.

seus múltiplos e submúltiplos constituiu uma excepção às regras do SI. Esse facto é alvo de muitas confusões já testemunhadas pela investigadora (não só envolvendo futuros professores em formação como também os seus professores cooperantes) que o conhecimento histórico ajuda a esclarecer, permitindo também uma integração das áreas de Matemática e de Português. Refira-se ainda a confusão frequente entre as grandezas massa e peso, situação aliás constatável em inúmeros manuais escolares de Matemática para o ensino básico, pelo que importa alertar e consciencializar os futuros professores da importância do uso da terminologia correcta, criando-se assim a base para a abordagem posterior da grandeza peso.

Em função do exposto, construiu-se um documento de apoio ao ensino do tema da Medida no primeiro ciclo do ensino básico, no qual se abordam, do ponto de vista conceptual, histórico e didáctico, as grandezas comprimento, área, volume e massa (Apêndice 1).

Para cada uma destas grandezas apresentam-se algumas considerações relativas a unidades convencionadas pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), nas quais se inclui a definição da unidade, as convenções adoptadas para a formação dos nomes e símbolos dos múltiplos e submúltiplos da unidade de base, bem como as relações básicas entre elas.

Incluem-se também algumas notas relativas à importância histórica da medição de cada uma das grandezas abordadas. A ênfase é colocada na história da metrologia portuguesa, procurando-se salientar e ilustrar, sempre que pertinente, problemas sociais e económicos decorrentes da falta de uniformidade dos antigos sistemas de unidades. Como suporte desta opção destaca-se o reconhecimento em documentos curriculares portugueses das potencialidades didácticas da introdução de uma perspectiva histórica no processo de ensino e aprendizagem do tema.

Finalmente, são apresentadas algumas sugestões didácticas relacionadas com a construção de conceitos e desenvolvimento de capacidades no âmbito da Medida.

Problemas históricos e sugestões de exploração didáctica

Como já referido, uma parte importante do PF tomou como ponto de partida a selecção de um conjunto de problemas históricos que conjugam aspectos da história da medida, resolução de problemas, o estabelecimento de conexões entre Medida e Número e de ligações a outras disciplinas e, ainda, aplicações ao quotidiano passado.

Esses problemas foram propostos às futuras professoras em três momentos, com diferentes finalidades. Num primeiro momento, em Geometria, foram propostos como problemas matemáticos a resolver, pelas futuras professoras, em sala de aula, através dos quais foram revisitados conceitos e procedimentos matemáticos. Num segundo e terceiros momentos, foram propostos como um desafio didáctico às futuras professoras, mais concretamente como problemas a integrar e explorar em dois ambientes de ensino e aprendizagem com características bem distintas: numa Exposição interactiva e em sala de aula.

Fruto do trabalho desenvolvido com as futuras professoras nas sessões de trabalho ao nível da discussão didáctica de problemas históricos propostos pela investigadora, construiu-se uma brochura apresentada no Apêndice 2, através da qual se pretende sintetizar o trabalho desenvolvido com as futuras professoras no âmbito da intervenção nas disciplinas de prática pedagógica IV e V. Todos os problemas apresentados são passíveis de serem integrados na prática de ensino e aprendizagem no 2º ciclo do ensino básico. Para cada problema, começa-se por apresentar a tarefa delineada que inclui o enunciado do problema histórico, precedido, nalguns casos, de um texto introdutório e contextualizador da situação apresentada[103]. Segue-se uma proposta de enquadramento do mesmo no Programa de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico (ME, 1991) e indicam-se os objectivos específicos de aprendizagem da Matemática[104] que a sua resolução permite desenvolver. Segue-se uma breve discussão do contexto do problema e a apresentação de um conjunto de sugestões de exploração didáctica em sala de aula.

Como já antes referimos, os problemas foram seleccionados a partir de situações expostas em antigos livros de Aritmética Comercial publicados em Portugal entre 1519 e 1624. Para a sua selecção foi tomado como ponto de partida o trabalho desenvolvido por Marques de Almeida (1994a, 1994b) que transcreve uma parte substancial desses textos e estuda em profundidade os livros de Aritmética, publicados em Portugal entre 1519 e 1679. O seu contributo não se limita à acessibilidade ao conteúdo das mesmas, na medida

[103] Parte dos problemas traduzem aplicações da matemática ao quotidiano passado e como tal inserem-se num quadro específico da prática social que importa dar a conhecer ao potencial resolvedor. É o caso dos problemas do *Quarto e Vintena* (imposto pago na Casa da Índia), da *Quebra de Mercadorias* (envolve as perdas sofridas pelas especiarias adquiridas no Oriente), da *Companhia de Mercadores* ou do *Baratar Mercadorias*. Assim, sempre que considerado pertinente para a compreensão do problema, é feita uma breve introdução ao mesmo na qual se procura fazer uma breve contextualização da situação exposta.

[104] Enunciados em termos das três dimensões da competência matemática a desenvolver na escolaridade básica: conhecimentos, capacidade e atitudes.

em que, entre outros aspectos, apresenta e discute a modelização aritmética utilizada pelos mercadores do Renascimento, em particular a aplicação específica de utensílios aritméticos a situações concretas e objectivas da realidade económica e social portuguesa da época, "como sejam os cálculos dos impostos na Casa da Índia, as associações de mercadores para feitura de negócios e a confluência de várias formas de cabedal na prossecução de um dado negócio" (Almeida, 1994a, p. 255). Trata-se de situações que, ao nível do 2º ciclo do ensino básico, pela época a que reportam e pelos conceitos matemáticos envolvidos, favorecem oportunidades para a concretização da interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e História.

3.6. Tratamento dos dados

Na investigação qualitativa, a recolha e análise de dados não correspondem a etapas bem diferenciadas. Ao contrário da investigação quantitativa, em que de forma bem definida a análise ocorre após recolha dos dados, na investigação qualitativa a análise dos dados é uma tarefa chave que se realiza cíclica e sistematicamente ao longo da própria investigação, com a finalidade de dar sentido aos dados e operar eventuais modificações no processo de recolha e análise de dados (Pérez Serrano, 2004, p. 101).

3.6.1. Análise de conteúdo

De acordo com vários autores (e.g. Pérez Serrano, 2004, Bogdan e Biklen, 1994), na investigação qualitativa não existe um modelo rígido para a análise dos dados. Não obstante, e independentemente da metodologia de investigação adoptada, para se obter uma visão o mais completa possível da realidade em estudo, a análise de dados qualitativos exige procura de regularidades ou padrões que possibilitem a descoberta de aspectos importantes, isto é, a redução dos dados a unidades manipuláveis[105]. Quando os dados são resultantes, na sua grande maioria, de várias formas de comunicação verbal (escrita ou oral), a sua redução e classificação deve ser apoiada pelo desenvolvimento e caracterização

[105] Entendemos uma unidade como um grupo de palavras (uma frase, um parágrafo, …) que fazem parte dos materiais recolhidos durante o trabalho de campo através de notas de campo, de transcrições de entrevistas, de sessões de trabalho, aulas ou de outras formas de recolha de dados, com significado próprio (implica um tema). Uma unidade pode ser vista como uma proposição acerca de algo (Pérez Serrano, 2004, 146).

de um conjunto de categorias que permita a identificação de unidades de dados que caiam dentro de um tópico particular representado pela respectiva categoria de codificação (Bogdan e Biklen, 1994). Deste modo, o conjunto de categorias representa aspectos de uma organização funcional que convergem para o entendimento do essencial do fenómeno em estudo (Paixão, 1998). Assim sendo, o desenvolvimento de um sistema de categorias é um passo crucial na análise de dados qualitativos e, na sua elaboração, deve-se ter em conta os propósitos e questões do estudo, o quadro teórico de referência e os constructos expressos pelos participantes no estudo (Pérez Serrano, 2004, Bogdan e Biklen, 1994, Lincoln e Guba, 1995). Por exemplo, numa investigação em ensino centrada no conhecimento didáctico do professor, há que identificar os aspectos ou categorias que, de alguma forma, estão relacionados com esta forma de conhecimento, como, por exemplo, a natureza das tarefas de ensino/aprendizagem propostas pelo professor, a representação e formulação do conteúdo, a orientação das actividades do aluno, etc.

Para que a categorização contribua para a precisão e sistematização dos dados, exige-se a definição clara e precisa das categorias, através da identificação das suas diferentes dimensões, pois, como afirma Paixão (1998, p. 234), "as categorias de análise num estudo qualitativo no domínio da educação, abrangem sempre várias dimensões ou direcções de análise, cada uma delas caracterizável através de um conjunto de indicadores que, podendo não ser exaustivos, nem mutuamente exclusivos (…) propõem-se especificar os diferentes aspectos da categoria". Deste modo, o investigador qualitativo não só procura assegurar a classificação/categorização das observações e a inclusão em cada categoria dos aspectos que efectivamente lhe correspondem, como também pode evitar interpretações dúbias e, sobretudo, tornar os resultados susceptíveis de verificação[106] (Pérez Serrano, 2000, p. 79).

Ainda que as categorias possam ser definidas antes do início do trabalho de campo, é natural que, à medida que o investigador recolhe e analisa os dados à procura de regularidades e padrões, se proceda à sua reelaboração e refinamento, ao abandono de algumas ou que surjam novas categorias. De facto, vários autores encaram a construção das categorias como um processo recursivo que resulta da identificação de regularidades e

[106] Um procedimento corrente da categorização que facilita em muito a redução e classificação dos dados, passa pela atribuição de códigos ou abreviaturas às várias dimensões de cada categoria quando estamos perante o *corpus*.

padrões que emergem de certas palavras, frases, comportamentos e acções dos sujeitos à medida que se desenrola a investigação (Pérez Serrano, 2004,p. 110, Bogdan e Biklen, 1994, p. 221).

De entre os vários métodos de análise de comunicações verbais e não verbais, a análise de conteúdo é considerada, por vários autores, como um método muito adequado de análise de dados obtidos através de entrevistas, questionários abertos, registos de observações,… pois facilita a descrição, sistemática e compreensiva, desse conteúdo com a finalidade de o evidenciar e interpretar (Taylor e Bogdan, 1992; Pérez Serrano, 2004b). A análise de conteúdo não pode ser feita divorciada do contexto no qual decorreu a comunicação e impõe a definição rigorosa e clara de categorias de análise aplicáveis quer ao conteúdo manifesto, quer ao conteúdo latente da comunicação. O primeiro, diz respeito àquilo que o investigador observa, lê ou ouve, e em que o juízo de valor, da sua parte, é minimizável, enquanto que o segundo incide sobre o significado da comunicação ou da motivação subjacente ao comportamento ou à declaração[107]. No caso da análise do conteúdo latente da comunicação, o investigador também tem de fazer uso dos indicadores que sejam reflexo ou expressão desse conteúdo de modo a codificar o significado ou motivação das mensagens (Pérez Serrano, 2004b, p.142). Deste modo, a análise de conteúdo pode ser entendida como uma ponte para aceder às intenções ou motivações do sujeito (Krippendorf, 1969), na qual a inferência desempenha um papel fundamental (em Pérez Serrano, 2004). Nas palavras de Vieira (2003, p. 228), a análise de conteúdo permite articular o conteúdo descrito e as inferências que dele se fizeram, isto é, explicar e interpretar os resultados obtidos.

Pelo exposto, na análise de dados do presente estudo, adoptou-se a técnica da análise de conteúdo com base na definição de categorias de análise, definidas recursivamente e modeladas pelo quadro teórico de referência. Nesse sentido, partiu-se de um conjunto provisório de categorias determinado pelas finalidades e questões do estudo, mas à medida que se ia constituindo um *corpus* de dados e se adquiria uma visão mais abrangente e completa do conjunto dos dados recolhidos, novas categorias e /ou novas direcções de análise emergiram. Para testar a adequação do conjunto de categorias elaborado procedeu-se a uma leitura e escrutínio cuidadoso do *corpus* de dados, de modo a

[107] Referimo-nos ao que o sujeito faz ou diz (oralmente ou por escrito).

identificar e assinalar as unidades que recaem dentro de uma determinada categoria (Bogdan e Biklen, 1994). Essa tarefa, de grande complexidade, permitiu não só uma primeira tentativa, já exaustiva, de codificação dos dados, mas também o ajustamento das categorias e respectivas dimensões de análise de acordo com os novos aspectos sugeridos pela leitura.

Como já apresentámos, as questões do estudo remetem para a necessidade de compreender até que ponto o percurso de formação desenvolvido contribui para a construção do conhecimento didáctico e para a promoção de práticas de ensino inovadoras que relevem como experiências de aprendizagem a História da Matemática, a resolução de problemas e as conexões intra e extra matemáticas. Nesse sentido, o conjunto de categorias a considerar tem necessariamente que incluir elementos relacionados com o percurso de formação, com a própria matemática e com formas do conhecimento didáctico mais estreitamente relacionadas com a perspectiva de ensino da matemática centrada na resolução de problemas, tal como foi discutido no capítulo II. Construiu-se então um esquema geral de análise que, na sua forma final (juntando as reformulações suscitadas pela análise dos dados recolhidos), contempla cinco categorias: matemática, problemas históricos, história da matemática, prática pedagógica e formação e profissão. Para cada uma das categorias atrás descritas, identificaram-se as dimensões respeitantes a cada uma das direcções possíveis de análise da categoria (Vieira, 2000; Paixão, 1998). No quadro 3.6 esquematizamos o conjunto de categorias e as respectivas dimensões de análise que adoptámos neste estudo e a partir das quais se procedeu à organização, redução e análise dos dados recolhidos no percurso de formação. Releva-se que seguimos, nalguns casos, algumas das dimensões de análise encontradas em investigações desenvolvidas na formação de professores (e.g. Fonseca, 2004, Vale, 2000, Serrazina, 1998).

- A categoria «Matemática» tem a ver com a relação estabelecida com a matemática ao longo do percurso escolar, com as perspectivas desenvolvidas relativamente à matemática enquanto ciência e enquanto disciplina escolar. Inclui como dimensões de análise: percurso escolar em matemática; crenças sobre a matemática e dimensão afectiva em relação à matemática.

- A categoria «Problemas Históricos» refere-se ao desempenho dos futuros professores na sua resolução (conceptual e manipulativa), à forma como percepcionam o contributo formativo dessa resolução e perspectivam a integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Inclui-se também a dimensão afectiva em relação aos problemas históricos.

- A terceira categoria «História da Matemática» tem a ver com o modo como os futuros professores encaram (valorizam e porquê) o papel da história da matemática na sua formação e enquanto recurso didáctico.
- A categoria "Prática pedagógica" refere-se ao modo como os futuros professores concretizam do processo de ensino aprendizagem e organiza-se em torno de três dimensões: perspectivas sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, concretização do processo de ensino e aprendizagem e a reflexão sobre este. A primeira dimensão de análise - perspectivas sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática - inclui aspectos relacionados com crenças em relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, com a selecção de tarefas para a aula de matemática, recursos utilizados na planificação, papel do professor e do aluno no processo de ensino/aprendizagem. Relativamente à segunda dimensão de análise – prática de ensino - há que referir que as sub dimensões de análise identificadas têm subjacente a análise da concretização de conexões.
- Finalmente, a categoria «Formação e profissão» tem a ver com o modo como futuros professores encaram o curso e a profissão e, sobretudo, o percurso de formação vivido. Incluem-se nesta segunda dimensão de análise aspectos relacionados com os vários momentos do percurso de formação e as tarefas neles propostos (história da matemática, resolução de problemas históricos, exploração didáctica de problemas históricos, …).

Pelo facto do estudo requerer a análise e a caracterização da prática de ensino das futuros professores nas suas várias componentes - planificação, concretização da prática de ensino e a reflexão sobre essa prática (Vale, 2000) - considerámos pertinente construir um instrumento (quadro 3.7.) que apoiasse e sustentasse a análise de conteúdo da *praxis* (concretização do processo de ensino/aprendizagem) desenvolvida pelas futuras professoras, assunto que passaremos a desenvolver.

Quadro 3.6. Instrumento de análise do percurso de formação e respectivas dimensões de análise

Categorias	Dimensões de análise	
Matemática	Percurso escolar em matemática	
	Crenças sobre a matemática	
	Dimensão afectiva	
Problemas históricos	Desempenho global	Resolução conceptual
		Resolução manipulativa[108]
	Integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da matemática	Potencialidades
		Dificuldades
	Estabelecimento de conexões	Entre ideias matemáticas
		Entre a matemática e outras disciplinas
		Entre a matemática e o quotidiano passado
	Interesse formativo da resolução de problemas históricos	
	Dimensão afectiva – atitude perante os problemas históricos	
História da Matemática	Perspectivas sobre o papel da história da matemática no ensino e aprendizagem da matemática	
	Interesse formativo da história da matemática	
	Dimensão afectiva – atitude perante a história da matemática	
Prática Pedagógica	Perspectivas sobre o processo de ensino e aprendizagem[109]	
	Prática de Ensino	Exploração do contexto dos problemas
		Orientação da resolução de problemas
		Conteúdo matemático
		Ambiente na sala de aula
	Reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem	
Formação e profissão	Relacionamento com o curso e com a profissão	Escolha do curso
		Visão global do curso
		Expectativas relativamente à profissão
	Percepção sobre o contributo do percurso de formação para a formação profissional[110]	

[108] Refere-se à concepção e construção de materiais para apoiar a resolução manipulativa de problemas históricos em ambientes formais e não formais (por exemplo, naExposição) e à ajuda dada aos alunos do ensino básico para a sua resolução.
[109] Inclui aspectos relacionados com crenças em relação processo de ensino e aprendizagem da matemática, como a selecção de tarefas para a aula de matemática, recursos utilizados na planificação, papel do professor e do aluno no processo de ensino/aprendizagem.

3.6.2. Construção de um instrumento de análise das práticas de ensino

Vieira (2003) destaca que muitos estudos relacionados com as práticas pedagógicas consideram duas grandes categorias de análise passíveis de caracterizar essas práticas. A primeira dessas categorias, de cariz mais conceptual, tem a ver com as perspectivas assumidas pelo professor relativamente ao processo de ensino e aprendizagem, enquanto que a segunda está estreitamente relacionada com a *praxis* do professor, isto é, com a concretização efectiva desse processo. Vale (2000, p. 161) acrescenta uma terceira categoria relacionada com a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem. Dentro de cada uma destas três áreas, a investigação tem identificado várias dimensões de análise que concorrem para a caracterização das práticas pedagógicas e que desenvolveremos de seguida (e.g. Vieira, 2003; Cachapuz et. al.; 2002; Vale, 2000; Serrazina, 1998).

Assim, a primeira dimensão – perspectivas sobre o processo de ensino e aprendizagem – intimamente vinculada com a fase de planificação[111] e de organização do ensino, envolve aspectos relacionados com a forma como o professor encara o ensino e a aprendizagem e inclui as suas perspectivas relativas à aprendizagem, ao seu papel e ao do aluno, ao tipo de tarefas que elege para propor aos alunos (exercícios, problemas, investigações, trabalho de cariz experimental/manipulativo, …). Compreende também a reconstrução, por parte do professor, dos conteúdos que vai ensinar em função da "leitura" que faz dos Programas, da visão que tem das capacidades cognitivas dos seus alunos e das suas crenças e concepções (Vale, 2000). Como refere Ball (2000), nessa reconstrução, o professor pode efectuar modificações que distorçam as ideias chave ou mesmo omitir tópicos centrais para o futuro dos alunos: "knowing subject matter and being able to use it is at the heart of teaching all students" (p. 243).

A segunda dimensão – prática de ensino (ou concretização do processo de ensino e aprendizagem) – refere-se ao modo como o professor gere em sala de aula o processo de ensino e aprendizagem. Inclui a implementação e ajustamento de vários aspectos previstos

[110] Incluem-se nesta dimensão de análise aspectos relacionados com os vários momentos do percurso de formação e as tarefas neles propostos (História da Matemática, resolução de problemas históricos, exploração didáctica de problemas históricos, …).

[111] A planificação compreende a reconstrução por parte do professor dos conteúdos que vai ensinar em função dos programas, dos alunos e das suas crenças (Vale, 2000).

nos planos de ensino, como por exemplo, as estratégias de ensino, a organização e monitorização das actividades desenvolvidas pelos alunos, a gestão do tempo e dos materiais[112] (se o seu uso estiver previsto) e a avaliação das aprendizagens. Esta categoria ainda inclui elementos relativos ao ambiente e às interacções em sala de aula.

A terceira dimensão – reflexão sobre o processo de ensino aprendizagem - relaciona-se com a reflexão sobre todos os elementos referentes à pratica pedagógica.

Neste estudo assume-se, como já foi discutido no capítulo II, uma perspectiva de ensino da matemática em que a resolução de problemas é encarada simultaneamente como ambiente e como veículo para o desenvolvimento da competência matemática, isto é, para a construção de conceitos e processos matemáticos e desenvolvimento de atitudes positivas em relação à matemática. Deste modo, tendo em conta os propósitos e as especificidades do estudo, considerou-se pertinente e indispensável construir um instrumento que apoiasse e sustentasse a análise da concretização das práticas de ensino. O desenvolvimento do instrumento de análise sustenta-se na revisão da literatura efectuada e apresentada no capítulo II e, em particular, na identificação e caracterização dos atributos dominantes da perspectiva de ensino da matemática assumida (sintetizada no quadro 2.1). Assim, neste instrumento, consideram-se como dimensões de análise da categoria "prática de ensino" a exploração do contexto do problema histórico, a orientação da actividade de resolução de problemas, os conhecimentos matemáticos e o ambiente de sala de aula. (Quadro 3.6).

Como podemos observar no quadro 3.7, numa tentativa de caracterização das dimensões de análise consideradas, é explicitado para cada uma delas um conjunto de indicadores que pretendem especificar aspectos da prática de ensino consonantes com as posições defendidas no enquadramento teórico. Como afirma Vieira (2003, p.200), "os indicadores revelam ou determinam uma ideia ou acção real". Refira-se, de novo, que os indicadores para cada uma das dimensões de análise não podem ser encarados como exaustivos e mutuamente exclusivos (Paixão, 1998). De facto, a inserção de um determinado indicador numa determinada dimensão de análise é determinada pela sua maior proximidade com essa dimensão, reconhecendo-se, porém, a existência de pontos de contacto com outras dimensões que, sempre que ocorram, são realçados na análise. Saliente-se que, para facilitar a leitura do quadro e, simultaneamente, clarificar o sentido

[112] Manual escolar, materiais manipulativos, calculadoras, etc.

dos indicadores, estes são acompanhados de comentários apresentados na forma de notas de rodapé. Está-se consciente de que, como o quadro foi construído em congruência com o quadro teórico de referência, ou seja, numa lógica da prática de ensino "desejável", a análise deve realçar também a ausência de indicadores ou a não conformidade com os indicadores.

Tal como já referimos a propósito da construção do esquema geral de análise do percurso de formação, também a construção das categorias e respectivos indicadores do instrumento de análise das práticas de ensino foram alvo de alteração e reformulação à medida que se constituía o *corpus* de dados e se analisaram os dados. Como salienta Paixão (1998, p. 234), um instrumento de análise de práticas de ensino, pela sua natureza e percurso de construção, é "inacabado, flexível, dinâmico".

Salientamos que, de acordo com as questões do estudo, a análise da prática pedagógica das futuras professoras centra-se em episódios de aula em que estas propõem como tarefa aos seus alunos a resolução de problemas históricos. Ressaltamos ainda que a caracterização e análise das restantes vertentes da prática pedagógica (planificação e reflexão) será feita com base no esquema geral de análise apresentado no quadro 3.6.

Quadro 3.7. (1) - Instrumento de análise da prática de ensino

Dimensões de Análise	Indicadores de Prática de Ensino
A - Exploração dos contextos do problemas	A1- Introduz o problema e aproveita o contexto do mesmo como factor de motivação para a realização da tarefa[113];
	A2 - Explora os contextos históricos de modo a estabelecer conexões com outras disciplinas[114];
	A3- Realça o papel da matemática, num determinado contexto sócio-cultural, para a resolução de problemas do quotidiano[115];
	A4 - Chama a atenção para as interacções mútuas entre problemas sociais e económicos e o desenvolvimento da matemática[116].
B – Orientação da resolução de problemas	*B1*- Interpela os alunos no sentido de assegurar a familiarização com a situação e a sua compreensão[117];
	B2- Orienta o aluno, através do diálogo e do questionamento, para o estabelecimento de um plano, que inclui a identificação de estratégias possíveis de resolução[118];
	B3 – Incentiva os alunos a manipularem de forma autónoma os elementos principais do problema de acordo com o plano delineado, isto é, a resolverem por si o problema[119];

[113] Referimo-nos à forma como a futura professora apresenta o problema que pode motivar ou não os alunos para a sua resolução.

[114] Referimo-nos a uma exploração numa perspectiva interdisciplinar. Por exemplo, quando se fala do pagamento de direitos alfandegários ao rei, na época dos descobrimentos, estamos perante contextos que focam aspectos e cenários da vida real, abordados na disciplina curricular de história que propiciam uma transferência das aprendizagens e um novo olhar sobre os factos a que dizem respeito e que é introduzida pela perspectiva matemática.

[115] É o que acontece, por exemplo, quando recorremos à proporcionalidade directa para dividir os lucros ou partilhar os prejuízos num negócio em que os sócios entram com capitais distintos. Ou quando se recorre ao uso da razão e da percentagem para comparar as quebras sofridas por diferentes mercadorias, como resultado de deficientes acondicionamentos ou outros percalços da viagem. Trata-se de um indicador que sugere a valorização do uso da matemática para a resolução de problemas do Homem (sociais, económicos, ...).

[116] Por exemplo, certos problemas envolvendo o uso de unidades de medida não uniformes permitem destacar os problemas sociais, económicos, políticos e mesmo éticos que estiveram na origem do desenvolvimento do sistema métrico decimal (hoje SI).

[117] Significa que o professor incentiva o aluno a ler o problema, a pensar um pouco na pergunta feita e a enunciar o problema por palavras suas, ou seja, cria a oportunidade do aluno se familiarizar com o problema. Após essa etapa, através do questionamento, leva o aluno a identificar os elementos principais do problema, isto é, os dados, o que é pedido e as condições dadas. Esta etapa inclui também a representação escrita, usando a notação adequada, desses elementos.

[118] Nesta fase, se os alunos não tomarem qualquer iniciativa, como recomenda Polya (2003), o professor pode repetir o diálogo mantido com os alunos, colocando-lhes novamente, com algumas modificações, as questões a que estes tiveram dificuldade em responder, de modo a que identifiquem que cálculos ou construções é necessário executar. Se necessário, o professor sugere pistas, apela a outros problemas já resolvidos, mas nunca esquecendo que deve cultivar a intuição e a manipulação mental dos objectos matemáticos (Polya, 2003; Guzmán, 1993b).

[119] Queremos dizer que o professor deve permitir que os alunos trabalhem autonomamente, embora sob a sua supervisão. Sempre que questionado pelo aluno sobre o processo de resolução, o professor deve incentivar a verificação de cada um dos passos, evitando fazer juízos de valor (Pólya, 2003).

Quadro 3.7. (2) - Instrumento de análise da prática de ensino (cont)

Dimensões de Análise	**Indicadores de Prática de Ensino**
B – Orientação da resolução de problemas	*B4-* Guia os alunos para a avaliação da adequação da solução ao problema e para a revisão do processo de resolução; se necessário, auxilia o aluno a rever o processo de resolução e a reformulá-lo[120];
	B5 – Incentiva o aluno a apresentar e justificar aos seus pares o seu processo de resolução, tanto em linguagem comum como em linguagem matemática[121].
	B6 – Promove nos alunos a apreciação crítica dos processos de resolução apresentados pelos seus pares e a formulação de juízos de valor fundamentados sobre estes;
C- Conteúdo matemático	*C1-* Orienta os alunos, através da gestão do discurso na sala de aula, para a percepção das ideias, dos conceitos e das relações matemáticas implícitas no problema;
	C2- Explora, sempre que adequado/pertinente, diferentes representações de ideias matemáticas, incluindo, em particular, representações através de materiais concretos/manipuláveis;
	C3- Expressa os conceitos e ideias matemáticas em linguagem corrente de diferentes modos de forma correcta e acessível aos alunos[122];
	C4 – Ajuda o aluno a estabelecer conexões entre conceitos e procedimentos[123];
	C5- Relaciona os conteúdos matemáticos que ensina com outros tópicos da matemática[124];
	C6 **-** Orienta os alunos para o estabelecimento de ligações entre a actividade desenvolvida com materiais manipulativos e os conceitos e procedimentos matemáticos implícitos no problema[125].

[120] Para que os alunos se tornem bons resolvedores de problemas e desenvolvam o espírito crítico é fundamental que o professor os habitue a certificarem-se de que chegaram efectivamente à solução, avaliando a sua adequação ao problema e revendo o processo de resolução. Em caso de necessidade, o professor deve auxiliar o aluno a reformular o processo seguido, começando por formular questões ou sugestões genéricas e aplicáveis, passando progressivamente a outras mais específicas e concretas (Polya, 2003).

[121] Em particular, o professor deve promover o uso de representações matemáticas adequadas em termos de terminologia, de símbolos e de ideias matemáticas.

[122] Apesar do professor compreender um conceito ou uma ideia matemática, frequentemente revela-se incapaz de encontrar outros modos de expressar ou discutir ideias chave com os seus alunos que não a que lhe é facultada pela linguagem computacional (em Ball, 2000).

[123] Referimo-nos, por exemplo, à compreensão da ligação existente entre o conceito de divisão e o algoritmo da multiplicação pelo inverso. A investigação tem salientado que os alunos devem primeiramente ser ajudados a construir representações internas de procedimentos (por exemplo o algoritmo da divisão de números racionais) para que se tornem parte de uma rede conceptual alargada e só depois deve surgir a prática desses procedimentos (Hierbert e Carpenter, 1992).

[124] Por exemplo, integrando conceitos e procedimentos no âmbito dos Números e Operações com conceitos no âmbito da Geometria e da Medida. O comprimento, a área e o volume são atributos de certas figuras geométricas e os números inteiros, decimais e fraccionários são usados para representar medidas (ver Askew in Ernest, 1998, p.xi; Serrazina et al, 1999, p.75).

Quadro 3.7. (3) - Instrumento de análise da prática de ensino (cont.)

E- Ambiente na aula	E1- Cria um ambiente de aprendizagem que encoraja o aluno a explorar, a desenvolver, a testar, a discutir ideias matemáticas
	E2- O ambiente de aprendizagem estimula a comunicação e o raciocínio.

3.6.3. Triangulação e validação

Em qualquer investigação, a fase correspondente à análise e interpretação dos dados recolhidos é particularmente delicada, exigindo do investigador cautela e obediência a determinados procedimentos analíticos que assegurem que as percepções, as observações, os relatos e leituras das situações se enquadram dentro de alguns limites de correspondência (Denzin e Linclon, 2000, p. 871; Stake, 2000, p. 443). Nos estudos quantitativos, a utilização de instrumentos de medida[126] exige o recurso a critérios de fiabilidade e validade. De acordo com Moreira (2000), a fiabilidade refere-se à consistência dos valores medidos com vários instrumentos e ao grau de reprodutibilidade das medidas obtidas, enquanto que a validade tem a ver com a necessidade de garantir que os instrumentos medem de facto o que se pretende e com o grau de representatividade das conclusões em termos de realidade empírica. A ausência de fiabilidade e de validez é, aliás, uma das maiores críticas apontada às investigações qualitativas de índole interpretativo e por isso, muito autores têm apresentado propostas concretas para aumentar a "fiabilidade" e "validade" dos estudos qualitativos (Moreira, 2000 Lecompte e Goetz, 1988). Outros, porém, sugerem alternativas às técnicas de validação e fiabilidade impostas pelos estudos quantitativos, como é o caso da triangulação (Flick, 1998 in Denzin e Lincoln, 2000).

Um dos primeiros aspectos a que o investigador qualitativo-interpretativo tem de dar atenção é à necessidade de fazer uma descrição precisa e detalhada de tudo o que se fez, o que inclui aspectos relacionados com o papel do investigador, a sua relação com o grupo estudado, o seu grau de participação, quais foram as fontes de informação, qual o

[125] Para que a utilização de materiais seja eficaz, isto é, para que o aluno faça as conexões desejadas e planeadas, o professor deve não só orientar as interacções dos alunos com os materiais, mas também, através da gestão do discurso na sala de aula, orientar a atenção dos alunos para as relações que pretende representar e explorar com o material. A linguagem usada pelo professor e as interacções estabelecidas com os alunos são fundamentais para que isso aconteça (Hierbert e Carpenter, 1992; Ma 1999, p. 6).

[126] Testes de conhecimento, escalas de atitude, fichas de observação, questionários, etc.

contexto físico e social em que foram recolhidos os dados, quais os métodos de recolha e análise de dados e quais os pressupostos teóricos, o que pode funcionar como um critério de validade externa. A validade interna pode ser entendida, nas investigações qualitativas, como a necessidade de assegurar níveis de congruência entre os significados atribuídos por diversos observadores (Moreira, 2000).

Outro aspecto fundamental, para garantir a validade dos estudos qualitativos-interpretativos, é submeter as interpretações feitas à revisão dos participantes. Esse procedimento faz parte da chamada triangulação, entendida como um processo que recorre a percepções múltiplas para clarificar significados, verificar a repetibilidade de uma observação ou interpretação (Stake, 2000, p. 443), “realizar comparações múltiplas de um fenómeno único para, através das diversas intersubjectividades, tentar encontrar a objectividade” (Pérez Serrano, 2004b, p. 189). Assim, a triangulação pode ser entendida como um controle cruzado entre diferentes fontes de dados (pessoas, instrumentos, documentos ou a combinação destes) que permite a obtenção de novos dados (Kemmis eMcTaggart, 1988 in Paixão, 1998). Outros autores defendem que dado que nenhuma observação ou interpretação é inteiramente repetível, a triangulação também permite clarificar significados através da identificação de diferentes modos de ver um fenómeno (Stake, 2000, p. 443-434).

Nesse sentido, a triangulação, encarada como uma combinação de várias práticas metodológicas, materiais empíricos, perspectivas e observadores, reflecte uma tentativa de assegurar uma melhor compreensão do fenómeno em questão e deve ser entendida como uma estratégia que visa adicionar rigor, amplitude, complexidade, riqueza e profundidade a qualquer investigação (Flick, 1998, p. 231 in Denzin e Lincoln, 2000, p. 5). De entre os vários tipos de triangulação identificados na literatura, a triangulação metodológica surge como uma das mais utilizadas na investigação educativa. Tal como a sua designação sugere, realiza-se entre diferentes métodos de recolha de dados sobre o mesmo objecto de estudo (Pérez Serrano, 2000). Os diferentes métodos (de recolha e análise de dados) actuam como filtros através dos quais se capta a realidade de modo selectivo (Moreira, 2000). Podemos falar de convergência, se os resultados obtidos através de métodos diferentes são próximos. Mas, se tal não acontecer, abre-se a possibilidade de, através de uma análise rigorosa, averiguar se estes apresentam ou não uma perspectiva integradora (Cohen, 1980 in Pérez Serrano, 2004b).

Como técnicas de validação dos constructos recorreu-se, neste estudo, à análise, pelos participantes, das suas respostas e reflexões e também à triangulação metodológica (Cohen e Mannion, 1994; Goetz e LeCompte, 1988), exigindo-se níveis de convergência entre investigadora, futuras professoras e professores cooperantes no que respeita às inferências feitas pela investigadora sobre os dados analisados e à análise das diferentes opiniões sobre o Percurso de Formação. Como já salientámos, estes últimos foram observadores permanentes da prática pedagógica das futuras professoras e são os professores responsáveis pelas turmas em que aquelas realizam a sua PP. Deste modo, a opinião destes intervenientes reflecte também o impacto das propostas de ensino sobre os alunos do 1º e 2º ciclos.

3.7. Síntese

Dada a necessidade de a investigadora observar, procurar entender e interpretar as acções e as interacções humanas dentro do seu próprio contexto, optou-se por uma abordagem investigativa de natureza qualitativa, de cunho descritivo e predominantemente interpretativo, por esta ser uma perspectiva centrada na questão dos significados atribuídos pelos indivíduos aos acontecimentos e aos objectos, nas suas acções e interacções no âmbito de um contexto social, e na elucidação e exposição desses significados pelo investigador (Erickson,1986). Como afirma Santomé (1988 in Goetz e LeCompte, 1998) as abordagens interpretativas permitem um maior entendimento crítico das situações e fenómenos educativos.

A construção de instrumentos de análise e a escolha de procedimentos metodológicos e dos critérios de fiabilidade e validade foram sempre guiados pelos quadros teóricos que fundamentaram a problemática em estudo.

No Quadro 3.8. apresenta-se uma síntese do desenvolvimento da investigação, no qual se apresentam as fases da mesma, a respectiva calendarização, as opções metodológicas e os procedimentos adoptados.

Quadro 3.8. Síntese do desenvolvimento do estudo empírico

	1ª fase	***2ª fase***			***3ª fase***
	Julho a Dezembro de 2004	Janeiro a Junho de 2005		Setembro 2005 a Junho de 2006	Junho de 2006 a Julho 2007
Objectivos	Delinear um percurso de formação com foco na exploração didáctica da história da matemática	Implementar o percurso de formação			Avaliar o percurso de formação
		Dar a conhecer problemas sociais e económicos que conduziram ao Sistema Internacional de Unidades Desenvolver competências matemáticas	Identificar em contexto de PP áreas críticas de formação	Sensibilizar para o valor didáctico da HM Desenvolver estratégias de ensino que privilegiem a HM, a RP e o EC como experiências de aprendizagem	
Contexto		Geometria I e II	Prática Pedagógica II (1º CEB)	História e Metodologia da Matemática Prática Pedagógica IV e V	
Intervenientes	Investigadora	Turma de 3º ano da Licenciatura PEB/M-C	Sete futuras professoras em PP no 1º CEB	Turma de 4º ano da Licenciatura em Professores do ensino básico, variante Matemática/Ciências da Natureza Três futuras professoras do 4º ano da licenciatura em Prática P no 2º CEB Dois professores cooperantes	Investigadora
Desenvolvimento Metodológico	Investigação documental	Investigação qualitativa de cunho descritivo e interpretativo			
Procedimentos	Desenvolvimento de tarefas de ensino com foco na resolução de problemas históricos. Construção do instrumento de análise das práticas de ensino	*Observação participante:* Visita ao Museu de metrologia Seminários -Resolução de Problemas históricos	*Observação participante* Sessões de apoio à planificação da PE *Observação nãoparticipante* *Videogravação de PE* *Questionário e Entrevista: futuros professores*	*Observação participante* Sessões de apoio à planificação da prática de ensino (ST) Exploração didáctica de problemas históricos Seminários – *Observação não participante* *Gravação vídeo e/ou áudio da PE e áudio das ST* *Questionário* *Entrevistas: futuros professores e professores cooperantes*	*Análise* *Interpretação dos dados* *Triangulação* *Validação pelos participantes*

CAPÍTULO IV

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A essência deste capítulo é a tentativa de compreender até que ponto um percurso de formação focado na exploração didáctica da história da matemática contribui para o desenvolvimento do conhecimento para ensinar matemática e para a promoção de práticas de ensino consonantes com as actuais orientações para o ensino da matemática na educação básica.

4.1. Introdução

Apresentam-se as três futuras professoras participantes no estudo, enquanto alunas da licenciatura em Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática/Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação. Por forma a manter o anonimato, estas são designadas pelos nomes fictícios de Inês, Joana e Beatriz. Do mesmo modo, os professores cooperantes da ESE, no âmbito das disciplinas de Prática Pedagógica IV e V, são designados por Fernanda e Manuel.

A descrição e análise de conteúdo dos dados relativos a cada uma das futuras professoras, resultante da codificação dos dados reunidos através de questionários (QT), de entrevistas (ENT), das gravações áudio e/ou vídeo das aulas implementadas no âmbito da disciplinas de Prática Pedagógica (aulas), das gravações áudio das sessões de trabalho (ST), bem como de notas de campo da investigadora (NC), é orientada pelas dimensões/categorias de análise apresentadas e discutidas no capítulo III.

Após uma breve apresentação de cada uma das futuras professoras, na qual se incluem aspectos relacionados com o percurso escolar no ensino não superior, procede-se à descrição e análise do desempenho global das futuras professoras na resolução conceptual e manipulativa de problemas históricos. Em seguida, analisa-se a prática pedagógica de cada uma das participantes no estudo, tomando como ponto de partida para a análise da prática de ensino no 2º CEB a grelha desenvolvida para o efeito e discutida no capítulo III. São também objecto de análise aspectos relacionados com o curso e a profissão e, em particular, as percepções de cada uma das participantes relativamente aos contributos do Percurso de Formação (PF) para a sua formação profissional.

Das tarefas propostas no PF, a resolução de problemas históricos foi assumida como o eixo organizador do próprio percurso formativo. Assim, como já referido, no âmbito dos seminários dinamizados na disciplina de Geometria foi proposta às futuras professoras a resolução de um conjunto de problemas históricos (Anexo 6) que permitiram revisitar e abordar aspectos conceptuais relativos a grandezas e medidas do currículo da escolaridade básica. Mais tarde, na disciplina de História e Metodologia da Matemática, as futuras professoras foram desafiadas a planear e construir materiais didácticos para a resolução manipulativa de problemas históricos a integrar numa Exposição interactiva centrada no problema da Medida (Anexo 5). Procura-se, neste ponto, analisar o desempenho global de cada uma das participantes na execução dessas tarefas. Na análise ter-se-á presente que, tanto nos seminários como no trabalho desenvolvido para a Exposição, as alunas futuras professoras trabalharam em pequenos grupos e, portanto, influenciaram-se mutuamente[127]. Para além desse aspecto, refira-se que a análise da resolução conceptual dos problemas históricos recai sobre as resoluções que cada uma das futuras professoras fez para si, o que significa que nenhuma das resoluções foi feita com o intuito de ser avaliada ou analisada posteriormente.

Como referem Porter et al. (1998 *in* Serrazina, 1998, p.136), o modo como os professores dos primeiros anos ensinam matemática é influenciado pelas perspectivas assumidas acerca do ensino da matemática. Essas perspectivas (explícitas ou implícitas no

[127] Esses grupos mantiveram-se nas disciplinas de Prática Pedagógica (PP) e na exposição interactiva, com a excepção da PP do 2ºCEB em que um dos elementos do grupo de três elementos integrou um grupo de estágio diferente do das colegas. Acrescente-se que durante a realização das tarefas propostas, as futuras professoras tinham por hábito dialogar com a(s) colega(s) de grupo, solicitando a presença da investigadora apenas quando sentiam dificuldades.

discurso do professor) dependem do conhecimento matemático do professor, mas nelas têm também um papel determinante as crenças e valores em relação à matemática, nas quais se incluem a visão sobre a importância da disciplina e sobre os tópicos mais importantes e, ainda, as expectativas acerca do que os alunos conseguem executar. Nesse sentido, a análise da prática pedagógica deve procurar inserir-se num quadro que permita perceber que pontos de vista, crenças e concepções orientam quer a planificação, quer a prática de ensino em sala de aula.

Relembra-se que, no curso de licenciatura frequentado por Joana, Inês e Beatriz, as disciplinas de Prática Pedagógica II, IV e V assumem características de estágio nos dois ciclos de ensino para os quais o Curso as habilita profissionalmente. De acordo com o regulamento interno da instituição, os alunos, organizados em grupos compostos por 2 a 3 futuros professores[128], devem, entre outros aspectos, ter oportunidade de planificar, desenvolver actividade lectiva e reflectir sobre as práticas de ensino desenvolvidas. Do ponto de vista institucional, encontram-se envolvidos na sua orientação e acompanhamento pelo menos dois professores, o professor supervisor e o professor cooperante (este último, também responsável pela turma na qual se realiza a prática pedagógica /estágio. Nesse sentido, a análise da prática pedagógica insere-se num quadro de alguma complexidade em que é difícil destrinçar que pontos de vista, crenças e concepções orientam as planificação construídas pelas futuras professores mas aceites pelos seus professores cooperantes. Deste modo, será sobretudo com base na análise da prática de ensino em sala de aula[129], nos questionários, entrevistas e registos das sessões de trabalho que procuraremos caracterizar as perspectivas de cada uma das futuras professoras relativamente ao ensino aprendizagem da matemática, tendo sempre presente que estas se encontram inseridas num processo de formação.

[128] No 1º CEB, excepcionalmente os grupos são constituídos por mais de 3 alunos. Foi o que aconteceu com Inês que integrou um grupo de 4 elementos.

[129] A análise da prática pedagógica desenvolvida pelas futuras professoras incide, essencialmente, sobre as observações no âmbito das disciplinas de Prática Pedagógica (PP) IV e V (2º CEB), conquanto sejam também feitas algumas referências à PP II (1º CEB).

4.2. Joana

Olhos de um azul intenso, baixa estatura, cabelo médio e escuro, riso fácil e franco, sempre arranjada de forma cuidada, mas natural, com uma postura evidenciando uma grande dinamismo e alegria de viver, Joana tinha completado 22 anos, há pouco mais de um mês, quando iniciou a PP no 1º ciclo do ensino básico. Durante a frequência do ensino superior residiu fora da sua residência habitual situada a cerca 80 km da Instituição que frequenta, deslocando-se regularmente a casa aos fins-de-semana.

O curso que frequenta foi a sua 2ª opção, pois, tal como outras colegas da turma o seu desejo era cursar enfermagem. Não conseguindo concretizar esse anseio, vingou o grande interesse pela matemática e pelas ciências. Sobre o seu percurso no ensino básico, recorda-se como uma aluna muito participativa, motivada e que percebia sempre os conceitos, características que aponta como responsáveis pelo bom nível aí alcançado. No que respeita à matemática, "entendia e realizava com facilidade todas as actividades propostas" (QT1, 11/06/05). O tema "funções" foi aquele de que menos gostou e em que sentiu mais dificuldades.

Com uma reprovação no12º ano de escolaridade, Joana considera "bom" o seu nível geral no ensino secundário, pois conseguiu sempre colmatar "com algum sucesso as dificuldades" (QT1, 11/06/05). No caso específico da disciplina de matemática, assinala, pela primeira vez, algumas dificuldades e desorganização no estudo da disciplina, que associa à mudança de escola e de colegas e, sobretudo, ao facto de no 10º ano ter estado sem professor de matemática por um período de 2 meses. Não obstante, estuda matemática sozinha, sem qualquer apoio específico, recorrendo apenas aos colegas para esclarecer algumas dúvidas.

4.2.1. Resolução de problemas históricos - Desempenho Global

Neste ponto pretende-se fazer a análise do desempenho global de Joana enquanto resolvedora de problemas históricos, na disciplina de Geometria, bem como a análise do trabalho desenvolvido na orientação dos alunos, tanto na resolução das tarefas que lhe foram propostas para exploração didáctica na Exposição interactiva, como na concepção e construção de materiais de apoio à resolução manipulativa dessas tarefas[130].

Resolução conceptual

A análise do desempenho de Joana na resolução dos problemas históricos, propostos na disciplina de Geometria, é feita com base nas resoluções escritas, mas tendo em linha de conta as notas de campo tomadas pela investigadora e o facto de os problemas terem sido resolvidos em grupo (sendo frequentes as trocas de impressões entre as sete alunas, futuras professoras, presentes, em geral, nas aulas). Por esse motivo, a análise incide apenas sobre a apresentação por escrito da resolução e da resposta aos problemas e, em particular, sobre o que esta sugere em termos de compreensão do problema, da estratégia adoptada e/ou cálculos realizados e da justificação dos procedimentos adoptados.

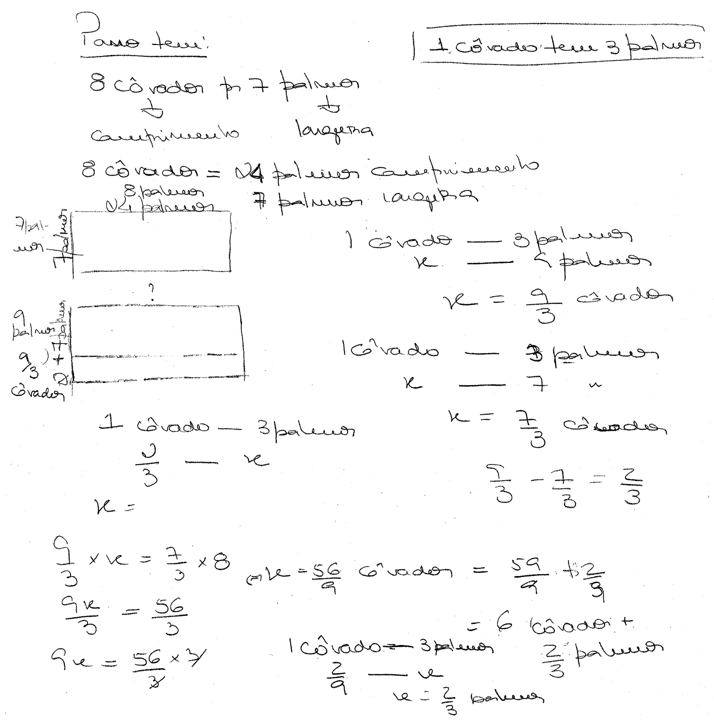
Em algumas das tarefas propostas (Anexo 6), Joana, a exemplo de outras colegas da turma, revelou alguma dificuldade em usar a informação e delinear uma estratégia de resolução. Foi, por exemplo, o que aconteceu na tarefa intitulada *Pesos de Portugal e Castela*, em que é dada a soma de duas massas (expressas em quintais, arrobas, arráteis e onças) e se pretende determinar quantas unidades de cada de tipo são necessárias para perfazer uma unidade de ordem superior. O mesmo aconteceu na tarefa *Medir volumes com cabaças*. Em ambas, o processo de resolução seguido resulta da discussão que se gerou na turma, sendo, por isso, similar ao dos restantes elementos da turma (NC).

Ainda que resolva todos os problemas propostos, nem sempre a apresentação por escrito da solução é acompanhada de uma justificação completa, clara e organizada do processo de resolução. Por exemplo, na tarefa O *vestido*[131], a resolução apresentada consiste num conjunto de cálculos, apresentados um tanto desorganizadamente, não sendo apresentada de forma explícita a solução ao problema. Como podemos observar na figura 4.1, o recurso à regra de três simples surge como a estratégia principal para reduzir unidades, o que denota uma certa dificuldade em lidar com partes fraccionarias da unidade, se não mesmo, alguma incompreensão das relações expressas nos problemas (o mesmo

[130] A atribuição dos módulos a cada grupo de futuras professoras foi feita, por sorteio, no âmbito da disciplina de História e Metodologia da Matemática.
[131] Um alfaiate fez-me um vestido de um pano com 8 côvados de comprimento por sete palmos de largura. Ora, eu tenho outro pano com 9 palmos de largura. Pergunto: quantos côvados deverá ter este pano para poder fazer-se outro vestido? (Adaptado de Bento Fernandes, in Almeida, 1994b, p. 80)

acontece noutros problemas). Por outro lado, embora a resolução mostre que Joana faz uso da igualdade das áreas dos dois panos, não apresenta qualquer justificação dessa identidade. Também a solução final do problema não é explicitada por escrito, nem verificada. Esta ausência de verificação da solução poderá ser explicada pelo facto de Joana ter confrontado a sua solução encontrada com a obtida pelas colegas (NC). Apesar da resolução analisada ser uma resolução pessoal, feita sem preocupações de apresentação a terceiros, registe-se que esta se cinge à apresentação dos dados do problema (acompanhados de representação figurativa) e à execução de cálculos, sem ser sentida a necessidade de justificar os procedimentos adoptados.

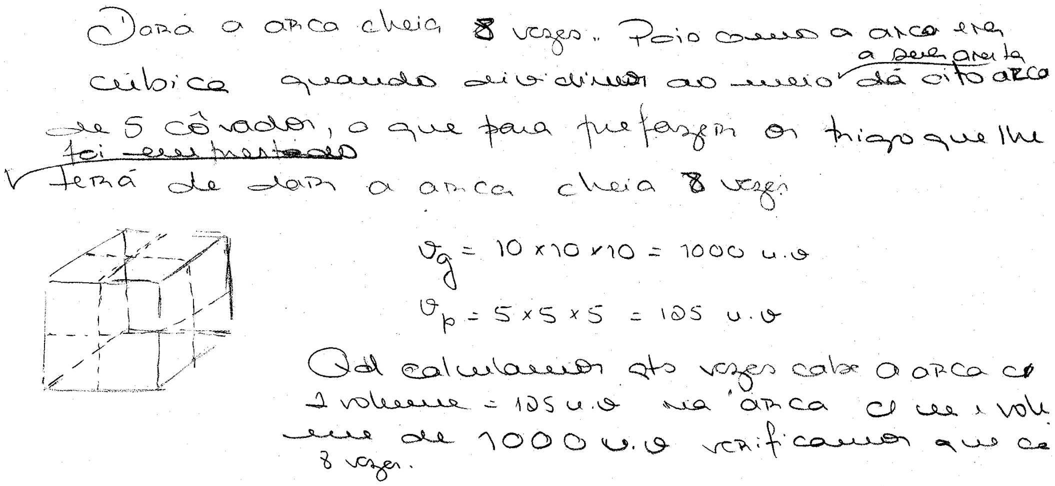
Figura 4.1. Resolução do problema *O vestido,* apresentada por Joana (14/01/05)



As únicas excepções a esta forma de proceder são as resoluções das tarefas da *Arca Quebrada*[132] e da *Transacção de panos entre Portugal e Castela*. Na primeira, Joana justifica a resposta por dois processos diferentes: por decomposição da arca maior em oito arcas menores (acompanhada de uma representação figurativa) e por cálculo dos dois volumes e estabelecimento da relação entre estes (figura 4.2).

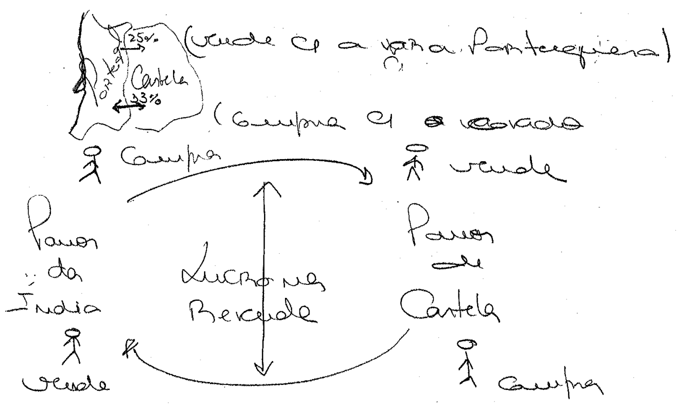
[132] Um homem emprestou a outro uma arca cúbica cheia de trigo, cujas arestas mediam 10 palmos. Ora este homem deixou cair a arca por uma escada abaixo e quebrou-a. Quer pagar o trigo, mas não tem senão uma arca de 5 palmos, também cúbica. Ora eu pergunto: quantas vezes lha dará cheia? (Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 88v).

Figura 4.2. Resolução do problema *A arca quebrada*, apresentada por Joana (15/04/05)



A resolução do problema *Transacção de panos entre Portugal e Castela*, o primeiro a ser proposta às futuras professoras, é aquele que fornece mais indicadores sobre o processo de resolução seguido por Joana. Em primeiro lugar, porque a representação figurativa do problema (figura 4.3) sugere o entendimento do propósito da tarefa e a compreensão de que o lucro obtido é resultante do uso de diferentes unidades de comprimento.

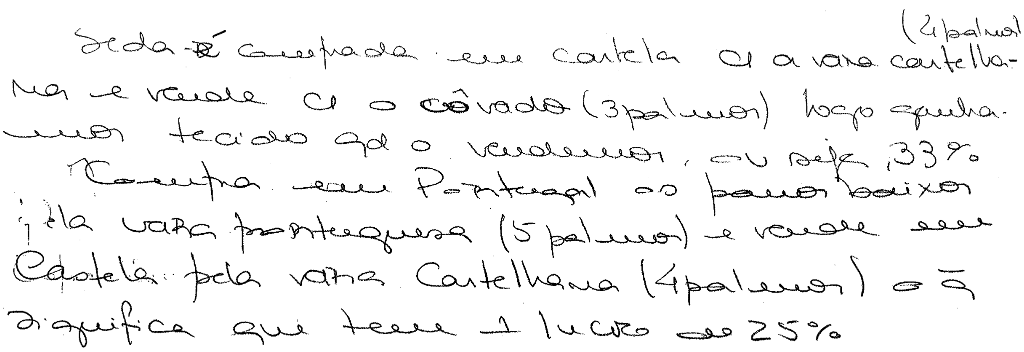
Figura 4.3. Representação figurativa dos elementos do problema *Transacção de Panos entre Portugal e Castela*[133], apresentada por Joana (07/01/05)



[133] O côvado tem três palmos. Seda e panos vendem-se por côvado. Excepto alguns panos baixos que chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%. Interprete, do ponto de vista comercial, a afirmação: De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25% (Adaptado de Guiral e Pacheco, in Almeida, 1994a, p. 230)

A representação figurativa indica também que Joana começa por conjecturar que o mercador português usa sempre, nas transacções com Castela, as unidades de Portugal. Como pode ser observado na figura 4.3, o texto entre parêntesis comprova que Joana começa por supor que o mercador vende a Castela com a vara portuguesa e que compra as sedas em Castela com o côvado. De acordo com a resposta dada, essa conjectura é abandonada. Embora a resposta dada a este problema seja a mais completa de todas as apresentadas por Joana, a justificação apresentada é claramente insuficiente (Figura 4.4). De facto, são correctamente identificadas as unidades usadas pelo mercador em cada uma das transacções, mas a resposta não é sustentada com base nas relações matemáticas que justificam os lucros percentuais de 25% e 33%. Isto é, embora da resposta se possa inferir que Joana compreendeu que as duas percentagens respeitam a uma fracção de uma unidade de comprimento que sobra ao mercador quando compra o pano, usando uma unidade de medida cujo comprimento é maior do que o da unidade que vai usar, posteriormente, na revenda dos panos, esta não justifica de forma completa os lucros: "A seda é comprada em Castela com a vara castelhana (4 palmos) e vendida com o côvado (3 palmos). Logo ganhamos tecido quando o vendemos, ou seja, 33%. Compra em Portugal os panos baixos pela vara portuguesa (5 palmos) e vende em Castela pela vara castelhana (4 palmos), o que significa que tem um lucro de 25%" (Joana, 07/01/05).

Figura 4.4. Resposta da Joana à questão do problema *Transacção de Panos entre Portugal e Castela* (07/01/05)



Seda ~~é~~ comprada em castela c/ a vara castelha- (4 palmos)
na e vende c/ o côvado (3palmos) logo ganha-
mos tecido qd o vendemos, ou seja, 33%
Compra em Portugal os panos baixos
pela vara portuguesa (5 palmos) e vende em
Castela pela vara Castelhana (4palmos) o q
significa que tem 1 lucro de 25%

Embora Joana mostre possuir os conhecimentos matemáticos necessários à resolução das tarefas, as resoluções que apresenta sugerem uma excessiva centralização na apresentação dos cálculos, em detrimento da apresentação de justificação do porquê desses cálculos. Registe-se que, por exemplo, no problema *O vestido*, em nenhum momento justifica a razão que a levou a escrever a igualdade entre as áreas dos dois panos. Por outro lado, da análise da resolução do problema *Transacção de Panos entre Portugal e Castela* percebe-se que a estratégia de resolução implementada passa pela identificação do uso que o mercador português faz da diferença entre unidades de comprimento, mas não há qualquer justificação ou verificação da adequação da resposta dada. Note-se, porém, que a não verificação da adequação das soluções encontradas é uma característica comum a todas as alunas da turma, situação que talvez possa ser explicado pelo hábito criado ao longo do percurso escolar vivido pelas futuras professoras. Destaca-se ainda que Joana mostra não se sentir muito à vontade na manipulação das relações entre as antigas unidades, o que se traduz no recurso frequente à Regra de Três Simples. Talvez a falta de familiarização com os antigos sistemas de unidades possa ser avançada como a principal causa da dificuldade na manipulação conceptual das relações entre as unidades, ajudando a explicar as resoluções muito centralizadas no cálculo.

Resolução manipulativa

O trabalho desenvolvido por Joana na Exposição Interactiva centrou-se no módulo "Comprimento", e incluiu a concepção do módulo como um todo (figura 4.5.), a construção de recursos didácticos que pudessem ser manipulados e usados pelas crianças na resolução das tarefas propostas e ainda a orientação das crianças visitantes da Exposição. Com a primeira tarefa do módulo pretende-se familiarizar as crianças com o côvado e as partes fraccionárias dessa unidade, denominadas por termos como *meia*, *terça*, *quarta*, *sesma* e *oitava* e explorar o significado dessa terminologia, enquanto que a segunda visa o cálculo da soma de dois comprimentos (Anexo 5).

Figura 4.5. Aspecto geral do módulo "Comprimento" da Exposição Interactiva

Para a realização de ambas as tarefas, Joana e Beatriz construíram padrões em madeira das antigas unidades de comprimento, de acordo com as equivalências estabelecidas oficialmente aquando da adopção do sistema métrico em Portugal. Assim, planearam que, numa primeira abordagem ao módulo, as crianças deveriam comparar os diferentes padrões e explorar e explicar, a partir daí, a razão por detrás dos nomes das unidades. Para que as crianças pudessem realizar medições, recorreram a peças de tear de diferentes dimensões, pois verificaram que estas possuem dimensões próximas do côvado e dos seus submúltiplos[134]. Na figura 4.6. podemos observar uma dessas medições. Trata-se de um pano com uma *meia* de comprimento e uma *terça* de largura, sendo a unidade fundamental o côvado[135].

Figura 4.6. Medição com antigas unidades de comprimento

Em termos da resolução manipulativa das tarefas propostas, salienta-se o planeamento cuidado do módulo que se revelou no aspecto agradável e apelativo da mesa de trabalho, na construção de padrões das unidades, na procura de panos cujas dimensões se ajustassem ao uso do côvado e das suas partes fraccionárias, no uso de um rolo de corda para que as crianças pudessem construir o seu próprio côvado (concretizando-se, deste modo, o significado e o carácter antropométrico desta unidade), na repetição da medição dos panos com o recurso ao côvado pessoal (salientando-se defeitos e problemas das antigas unidades).

[134] O que parece indiciar a preservação, até aos nossos dias, das antigas unidades de comprimento na manufactura de panos artesanais.
[135] Destaca-se como curiosidade o facto de apesar de os panos serem recentes, as suas dimensões parecem estar mais relacionadas com as antigas unidades do que com o metro e seus submúltiplos.

Referindo-se à orientação da actividade dos alunos na realização das tarefas, Joana salienta alguma dificuldade de alguns na segunda tarefa (figura 4.7), pois estes pretendiam modelar o problema com materiais, isto é, calcular a soma por justaposição de padrões das medidas indicadas. Não existindo cópias do padrão do côvado em número suficiente para isso (notar que, para tal, seriam necessários oito padrões de côvado), Joana assume um papel fundamental para a compreensão e resolução do problema:

I (Inv) - Que dificuldade é que achou que eles sentiam?
J (Joana) - Não sabiam por onde haviam de começar, mas depois eu disse: - «Calma lá, então um comprou três côvados, o outro comprou quatro. Quantos côvados já temos?». Depois já ia: - «Ah, temos sete». E depois daí, já eles iam juntar e agarravam logo nos padrões mais pequenos. Havia muitos, como nós tínhamos o padrão do côvado, nós tínhamos dois exemplares e aquilo acho que eram 3 côvados.
I - E queriam um terceiro?
J - E depois diziam: - «Mas não chega, faltam cá côvados» (risos). E eu dizia-lhes: «Mas não é preciso, já sabes».
Eles depois iam logo juntar aos outros. (ST, 03/03/06)

Figura 4.7. Tarefa do módulo "Comprimento" da Exposição Interactiva

Imagina que um comerciante de um mercado medieval vendeu a dois clientes uma peça de seda. O primeiro comprou três côvados e meio e uma sesma e o segundo comprou quatro côvados e uma terça. Qual o comprimento da peça de seda?

(Adaptado de Guiral e Pacheco, in Almeida, 1994b, p. 210)

Observe-se que Joana não se limitou a colocar questões que os conduzissem às manipulações/medições necessárias à resolução das tarefas propostas. Como a própria reconhece, preocupou-se com a compreensão da situação exposta na tarefa, incentivando todos os alunos a identificar e a registar, por escrito, os dados. Só após essa etapa, é que os alunos passavam à resolução manipulativa. Em particular, salienta a indicação dada aos alunos de 6º ano de escolaridade para que fizessem a representação simbólica dos dados e executassem o cálculo da soma com papel e lápis. Note-se que Joana realiza a sua prática pedagógica numa turma de 6º ano de escolaridade, daí a sua maior sensibilidade à articulação entre a actividade manipulativa e os conceitos matemáticos implícitos na actividade.

J (Joana) - Oh, professora, fazia-os somar. Um meio mais um meio, mais um sexto.
I (Inv) -Fez somar aos de 6º ano, não aos de 5º ou 4º anos.

> J - Sim, só aos de 6º ano. Disse-lhes para identificarem, para escreverem, para representarem. Tirar os dados. Tiraram todos, professora. Os miúdos de 1º ciclo também, dizia-lhes: - «tirem lá os dados». Tiraram logo tudo. Até porque os do 1º ciclo nem era preciso dizer-lhes para tirarem os dados, eles já vêm com aquele hábito. Tiravam logo os dados, enquanto os de 5º e 6º ano já estavam assim: - como é que é?» e então eu dizia-lhes: - «vamos lá tirar os dados, para ver se entendes». (ST, 03/03/06)

Este facto é um indicador de que Joana tem plena consciência que a resolução de um problemas com o apoio de materiais não se esgota na manipulação e de que é necessário ajudar os alunos a estabelecer conexões com os conceitos matemáticos modelados.

4.2.2. Prática pedagógica

4.2.2.1. Perspectivas sobre o ensino e aprendizagem da matemática

As imagens que Joana guarda na memória relativamente aos professores de matemática de quem gostou constituem um indicador das crenças que Joana possui sobre o ensino da matemática. Nestas, incluem-se a organização das aulas segundo uma sequência lógica, a realização de actividades envolvendo pensamento, exploração e descoberta e a forma como se apresentam as matérias e as tarefas aos alunos. Este último aspecto é considerado determinante para a motivação dos alunos (QT1,11/06/05). Como vários autores salientam, as crenças sobre a matemática alicerçam-se nas experiências de aprendizagem vividas pelo sujeito, o que faz com que a matemática seja, frequentemente, vista como cingindo-se à matemática escolar. Embora isso aconteça com Joana, que afirma sempre ter gostado de matemática por ser uma área cativante e em que dá gosto trabalhar "no sentido de que nos permite explorar e pensar" (QT1, 11/06/05), as suas palavras denotam uma visão da matemática como uma ciência em evolução, conectada com outras ciências e que permite dar resposta a muitas situações do quotidiano do homem e em que o raciocínio desempenha um papel fundamental:

> Motiva-me ter de relacionar determinados aspectos com áreas completamente diferentes, mas que se associam com a matemática perfeitamente. Fascina-me saber que a matemática, tal como todas as ciências também evolui. (…) A matemática evolui e sempre esteve presente nas necessidades mais ínfimas do homem (QT2, 20/06/07).

Joana demonstra, por várias vezes, ao longo do PF, a importância que atribui ao conhecimento matemático para a sua prática profissional e para a planificação. Em particular. Referindo-se à brochura desenvolvida no PF[136] e à qual recorreu para a planificação dos conteúdos relacionados com a Medida afirma:

> Aquele livrinho que a professora nos deu sobre as grandezas e medidas. Ajudou-nos muito (…) tem lá definições que é bom nós sabermos, embora não sejam ditas na aula. Porque dizer aos alunos certas coisas que estavam lá, só os ia baralhar, não é? Porque são situações assim … já bastante abstractas para eles e nós não vamos tanto além (…) Quando eles estão no 3º ano dão as coisas muito mais superficiais, mas é bom para nós sabermos porque estamos um pouco mais seguras daquilo que estamos a dizer (ENT1, 21/06/05).

Noutras ocasiões, quando discute com a investigadora a forma como pretende abordar as tarefas de resolução de problemas históricos, percebe-se que Joana está atenta e valoriza os aspectos conceptuais subjacentes à tarefa. De facto, a consciência de eventuais dificuldades dos alunos na compreensão das tarefas e dos conceitos matemáticos envolvidos nestas é um aspecto que marca o discurso de Joana aquando da discussão das tarefas a propor aos alunos. Por exemplo, quando planifica a multiplicação de números racionais, Joana mostra estar bem ciente dos obstáculos que os alunos poderão sentir, nomeadamente quando constatarem que "multiplicar leva a aumentar e nalguns casos a diminuir" (ST, 13/12/05). Daí que a escolha da estratégia de ensino seja por ela considerada como uma etapa fundamental da planificação. Neste âmbito, Joana releva a importância de proporcionar às crianças oportunidades de manipulação de conceitos e ideias matemáticas, preferencialmente fazendo uso de materiais concretos.

Salienta-se, no excerto seguinte, que as últimas palavras de Joana têm subjacente a percepção de que a abordagem de ensino de um tópico matemático através de materiais exige que o professor oriente o trabalho dos alunos por forma a encaminhar a sua atenção para os conceitos e ideias matemáticas visados:

> I (Inv) - Na planificação das experiências de aprendizagem, a que é que dá mais importância?
> J (Joana) - Na planificação das aulas? Eu acho que o método utilizado a partir do qual iria tentar introduzir o conceito.
> I - E qual seria?
> J - Depende do conteúdo que fosse dar.
> I - Acha que o método depende do conteúdo?
> J - Eu acho que sim, que há muitas formas de se introduzirem os conteúdos. Depende dos conteúdos.
> I - Portanto, o que está a querer dizer é que valoriza a introdução do conteúdo.
> J - Sim, mas eu acho que sempre que nós pudermos levar situações reais, coisas concretas para lhes mostrar, isso é muito bom. Para além de lhes cativar a atenção e de os manter

[136] Grandezas e unidades de medida no ensino básico. Conceitos, notas históricas e didácticas (Apêndice 1).

sossegados, porque estão sempre à espera de ver o que é que vai acontecer. De ver o que é que é. Ah, eu acho que é sempre bom levar material desse.

I - Refere-se a trabalho prático com materiais.

J – Sim, com material que eles possam ver, tocar. Dizer-lhes como funciona e dizer-lhes isto está relacionado com isto e com aquilo … (ENT, 21/06/05).

Resolução de problemas

A receptividade de Joana à planificação de tarefas de resolução de problemas com contexto histórico foi uma constante ao longo do Percurso de Formação (PF). Essa adesão parece relacionar-se com o interesse despertado por problemas aos quais reconhece características inovadoras relativamente aos tradicionalmente encontrados em manuais escolares e que, por esse motivo, em sua opinião, encerram uma potencial motivação para os alunos: “Eu acho que isto [problemas históricos] é mais interessante do que aqueles problemas que vêm nos livros e que é sempre a mesma coisa. Eu acho que eles [alunos] se vão interessar” (ST, 13/12/05). Paralelamente, Joana mostra identificar-se com um ensino centrado na resolução de problemas, como transparece no seguinte excerto, a propósito da sua prática de ensino no 1º CEB:

Inv - Das actividades que desenvolveu no âmbito do ensino da matemática , de quais é que mais gostou?

Joana - Não sei, mas eu acho que foi na minha primeira semana. Uma aula em que estivemos a resolver situações problemáticas. Eu gostei muito disso (ENT1, 21/06/05).

Um aspecto merecedor de realce é que Joana parece identificar-se mais com os problemas históricos que traduzem situações de cariz mais recreativo, do que aplicado. Por exemplo, no âmbito da multiplicação de números reais, dos vários problemas discutidos no PF, Joana aderiu de imediato aos problemas O p*eixe* e A *repartição do dinheiro pelos pobres*, não mostrando inicialmente qualquer intenção de integrar nas aulas problemas relativos a aplicações da matemática a situações do quotidiano passado, como, por exemplo, o do *Quarto e Vintena*. Questionada sobre as razões, embora não as consiga precisar, percebe-se que se sente atraída por problemas com contextos menos complexos e com carácter mais lúdico. Atente-se no seguinte diálogo a propósito da abordagem de ensino planeada para a multiplicação de números racionais:

I (Inv) - E não resolve situações de aplicação da multiplicação?

J (Joana) - Ah sim, depois de ter dado aquela informaçãozinha [refere-se ao processo de cálculo do produto de dois racionais escritos na forma de fracção] vou-lhes dar os problemas ... que são o da *repartição do dinheiro pelos pobres* e o do p*eixe*.

I - Mas porque é que vai explorar esses problemas?

J - Nós gostámos deles, professora (risos).
I - O mais interessante pode ser o do Quarto e da Vintena, pois é um problema real.
J - Ah esse aí não vamos fazer.
I - Mas trata-se de um problema real que liga com conteúdos da disciplina de história. Não gostou dele?
J - Até gostei, mas achei mais piada aos outros, não sei porquê (risos) (ST, 04/01/06).

Conexões

Ressalta do excerto reproduzido o uso da forma plural "gostámos" que traduz a atitude de Joana, mas também do seu grupo de estágio e professora cooperante, perante três problemas de aplicação da multiplicação de números racionais, um deles aplicado ao quotidiano passado e os outros de carácter recreativo. Essa atitude perante os problemas aplicados ao quotidiano passado parece sugerir uma menor receptividade de Joana a tarefas que carecem de uma contextualização histórica para a sua compreensão e, consequentemente, para a sua resolução. Da reacção de Joana às palavras da investigadora, a propósito da sua intenção de não propor o problema do *Quarto e Vintena*, sobressai a preocupação com o tempo da aula o que, conjugado com outras intervenções posteriores (NC), permite inferir que Joana tem algum receio em propor problemas que pela sua natureza demorem algum tempo a explorar.

Inv - Esse problema tem a vantagem de traduzir uma situação real de pagamento de um imposto e em que se faz uso dos números fraccionários. Para além disso, os alunos abordam em história a problemática do pagamento de direitos sobre as mercadorias, apesar de não terem, seguramente, abordado esse imposto em particular. Só não sabem é como é que esses direitos eram calculados.
Joana - Esses dois problemas, em princípio, se houver tempo, vou fazê-los. Se houver tempo vou realizá-los. Se não houver tempo, ficará para outro dia (ST, 04/01/07).

Observe-se que a razão apresentada por Joana, alguns dias depois, para a integração do problema do *Quarto e Vintena* numa aula de Estudo Acompanhado, aponta precisamente nesse sentido:

I (Inv) - Precisa da minha ajuda nalguma coisa?
J (Joana) - Não professora. Está tudo pronto.
I - Da minha parte também está tudo. Portanto, não vai propor o problema *O Quarto e a Vintena*?
J - *O Quarto e a Vintena*? Esse problema vai ser dado no Estudo Acompanhado.
I - Ah é?
J - Para eles desenvolverem.
I - Vão ser vocês a explorá-lo? [questão dirigida às duas futuras professoras, dado que estas, por norma, colaboram também nesta área não curricular]
B (Beatriz) - Não sei. Em princípio, acho que não (ST, 11/06/06).

Quando Joana justifica a opção pela aula de Estudo Acompanhado dizendo: “para eles desenvolverem”, parece, de facto, reconhecer que se trata de um problema que necessita de tempo acrescido para a sua exploração, relativamente a outros. Por outro lado, parece haver da parte da professora cooperante interesse em propor o problema aos seus alunos, dispondo-se ela a fazer a exploração do mesmo.

Nesse sentido, embora Joana pareça ter uma maior afinidade com problemas históricos mais directamente relacionados com os conteúdos curriculares e que não careçam do estabelecimento de ligações a outras áreas curriculares, isso pode estar relacionado com uma certa pressão em cumprir o planificado para a abordagem do tópico “Multiplicação de Números Racionais”:

> J (Joana) - Para amanhã vou dar a multiplicação.
> (…)
> J (Joana) - Para a semana vou dar o inverso de um número racional ..
> I (Inv) - Para a semana já o inverso?
> (…)
> I -Essa planificação foi feita por sugestão da PC?
> J - Sim. Nós planificámos assim.
> I - E não resolve situações de aplicação da multiplicação?
> J - Ah sim, depois de ter dado aquela informaçãozinha [sobre como fazer a multiplicação, o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador] vou-lhes dar os problemas … que são o da *repartição do dinheiro pelos pobres* e o do *peixe*.
> (…)
> I - Então para a semana introduz o “inverso” e depois?
> J - Depois as propriedades da multiplicação.
> I - Na 3ª semana ou ainda na próxima semana?
> J – Depende, professora, de como for o andamento. Mas se calhar … não sei se será tudo na mesma semana (ST, 04/01/06).

Relativamente ao uso de materiais manipulativos, Joana mostra estar ciente de que a abordagem de ensino de um tópico matemático através de materiais exige que o professor oriente o trabalho dos alunos por forma a encaminhar a sua atenção para os conceitos e ideias matemáticas visados:

> J - Sim, mas eu acho que sempre que nós pudermos levar situações reais, coisas concretas para lhes mostrar, isso é muito bom. Para além de lhes cativar a atenção e de os manter sossegados, porque estão sempre à espera de ver o que é que vai acontecer. De ver o que é que é. Ah, eu acho que é sempre bom levar material desse.
> I - Refere-se a trabalho prático com materiais.
> J – Sim, com material que eles possam ver, tocar. Dizer-lhes como funciona e dizer-lhes isto está relacionado com isto e com aquilo … (ENT, 21/06/05).

Por exemplo, aquando da discussão da planificação da tarefa do *Gato e do Rato*, a partir da qual Joana pretende abordar a divisão de um inteiro por um número fraccionário, torna-se clara a intenção de levar os alunos a estabelecer conexões entre o trabalho com os materiais e as ideias matemáticas que se pretendem modelar.

> I (Inv) - Então vamos lá recapitular para ver onde é que a Joana quer chegar com esta tarefa.
> J (Joana) - Vão construir aqui o esquema das barrinhas e vão dizer que …, quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. Uma braça …demora … um dia e meio que é 1 a dividir por 2/3.
> I - Imagine que é uma aluna.
> J - Ai, professora (risos). Então eles vão fazer aquele esquemazinho do …
> I - Eles vão primeiro fazer o esquema ou vão primeiro trabalhar com as barrinhas?
> J - Vão trabalhar com as barrinhas. Fazer com as barrinhas.
> I- Portanto, os alunos vão utilizar o material Cuisenaire para resolver o problema, para encontrar a solução.
> J - E depois na resolução apresentam os dados. Fazem com material Cuisenaire, colocam as barrinhas e comparam. Depois da resolução do problema vão representar aqui o que eles fizeram com as barrinhas Cuisenaire. Pronto, vão desenhar aqui as barrinhas. A tal situação. E depois vão ver que é 1 a dividir por 2/3, chegar a essa conclusão. Depois aqui no final…
> I - Devagar, portanto quer que eles façam um esquema que traduza o trabalho com as barrinhas.
> J - Sim.
> I- E a partir daí?
> J- Daí vamos ver quantos dias é que o rato demorou a percorrer uma braça.
> I- A resposta é que demorou um dia e meio a percorrer uma braça. Daqui passa para linguagem matemática?
> J - Sim.
> I - De que maneira?
> J - Então vimos que era … demorou um dia e meio para percorrer uma braça. Então uma braça era 1 a dividir pelos 2/3, era o que o rato andava. Vimos que era um dia e meio dia. Eles escrevem isso para linguagem matemática.
> I - Então basicamente o que lhes vai perguntar depois disto é que ideia matemática ou que conceito está por detrás da resposta dada.
> J - Sim.
> I - O seu objectivo é que eles escrevam 1:2/3=3/2?
> J - Sim.
> I - E 4:2/3=6. É isso?
> J - Sim. (ST, 15/03/06)

Papel do aluno e do professor

Na planificação das aulas, de acordo com a natureza das tarefas, Joana procura sempre delinear a forma como se vai organizar o trabalho dos alunos. Na sua perspectiva, os alunos devem ter a oportunidade de trabalhar em grupo (díades ou pequenos grupos), sobretudo em problemas que envolvam o uso de materiais manipulativos. Esse trabalho, que deve ser supervisionado e apoiado pela professora, deve culminar com uma discussão colectiva, seguida do registo de aspectos importantes. O excerto seguinte refere-se a uma sessão de trabalho em que Joana expõe à investigadora o seu plano para a introdução da multiplicação de números racionais, através de uma tarefa histórica (resolução de um problema envolvendo o uso de materiais manipuláveis):

> J (Joana) - Sim. Vão trabalhar dois a dois. Cada grupo de dois tem um exemplar do côvado, da *sesma*, da *meia* , … Vai ser trabalhar dois a dois e à medida que eles vão trabalhando, vão descobrindo. Depois discutimos todos os problemas que lhes são dados. Vai ser discutido e depois disso vou-lhes dar uma informação sobre como fazer a multiplicação, o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador.
> I (Inv) - E vai-lhes dar a informação ou vai esperar que sejam eles a chegar a ela?
> J - Sim, vou esperar que eles cheguem a essa conclusão e depois eu dou a informação, para eles ficarem com a informação colada no caderno (ST, 04/01/06).

Recursos

O manual escolar é um dos recursos a que Joana habitualmente recorre quando pretende seleccionar tarefas a propor na aula ou, mesmo, para delinear a estratégia de ensino de um determinado tópico. É o que acontece, por exemplo, relativamente à planificação da abordagem do conceito de inverso em que Joana admite seguir de perto a tarefa preconizada num determinado manual, que não o adoptado na escola, como introdução ao conceito de inverso: “O inverso de um número racional, professora? Através de ... não tenho cá o livro. Pois não. É a actividade que está no manual x ou no manual y … É de umas laranjas” (Joana, ST, 04/01/06). Ou quando na planificação da tarefa do *Gato e do Rato*, Joana propõe integrar na ficha orientadora da actividade dos alunos, como uma última tarefa, uma adaptação da estratégia adoptada no manual referido, para o estabelecimento do algoritmo da divisão de números racionais:

> I (Inv) - Vai fazer um raciocínio multiplicativo, para tentar que eles escrevam que 4:2/3=4x3/2?
> J (Joana) - Estava a pensar não fazer e fazer aqui em baixo para eles chegarem à regra. Ou acha que não, professora?
> I- Eu só estou a tentar perceber a estrutura da sua ficha e o que planeia fazer.
> J - Sim. Estava a pensar não fazer ali. Fazíamos aqui em baixo e verificávamos que 1 vezes 3/2 ia dar os 3/2 obtidos com o trabalho com as barrinhas e que é o mesmo que dividir 1 por 2/3.
> I- Isto não é o que está no manual x?
> J - Sim, sim. Naqueles problemas todos que estão lá (ST, 15/03/06).

Curiosamente, numa conversa da investigadora com a Professora Cooperante, em que se falou da abordagem de ensino da divisão de números racionais e do interesse de levar os alunos a compreender a regra da multiplicação pelo inverso do divisor, Fernanda referiu então ser usual orientar as suas estagiárias para a estratégia adoptada no manual referido acima (NC, 5/01/06), que consiste basicamente no que Joana descreve acima. Tal situação denota que, no processo de planificação, a professora cooperante desempenha, de facto, um papel muito marcante, sendo a ela que cabe a palavra final sobre a adequação das tarefas seleccionadas, inclusive das desenvolvidas no PF. Em várias sessões de trabalho, tanto Joana como Beatriz mostram que assim é, pois nenhuma das tarefas é aceite por Joana ou Beatriz sem a concordância da professora cooperante. O uso frequente da primeira pessoa do plural, quando expõem os seus planos de aulas e as tarefas seleccionadas, é um indicador do trabalho conjunto do grupo de estágio, no qual claramente se inclui a professora cooperante.

4.2.2.2. Prática de ensino

A análise da prática de ensino de Joana incide sobre a abordagem de três tarefas de resolução de problemas históricos: *Quarto e Vintena*, *O gato e o rato* e A *venda do trigo*, se bem que esta tenha proposto outros problemas históricos no âmbito do tópico "Multiplicação de Números Racionais" (nomeadamente, os problemas intitulados *Repartir o Dinheiro pelos pobres e O peixe*, enunciados no Apêndice 2).

Ambiente de sala de aula

A turma de 6º ano de escolaridade em que Joana desenvolve a sua prática pedagógica apresenta algumas características que condicionam e perturbam continuamente o trabalho que se desenvolve em sala de aula. Tanto Joana como os alunos são constantemente interrompidos nos seus raciocínios por intervenções de certos alunos da turma, frequentemente descontextualizadas, que parecem ter como finalidade gerar reacções e conflitos. De facto, alguns manifestam uma tendência permanente para chamar a atenção sobre si, através de intervenções despropositadas (por vezes ofensivas para os colegas[137]) e acções desapropriadas que obrigam a interrupções frequentes do discurso em sala de aula. Como a própria Joana reconhece numa avaliação que faz da turma no início do 2º período, o ambiente de aula é claramente condicionado pela forma de estar na aula de alguns alunos: "A nossa turma se não tivesse lá três elementos era do melhor. Bem, quatro, para não dizer cinco. Mas é verdade, faltando os elementos destabilizadores da turma,

[137] A investigadora teve ocasião de observar agressões verbais de desprezo pelo interesse e participação revelado na aula por alguns alunos, epítetos como "marrão" foram várias vezes usados com esse sentido.

trabalha-se bem" (ST, 04/01/06). De acordo com as informações das futuras professoras e da sua professora cooperante, trata-se de uma opinião partilhada por outros professores da turma. Por outro lado, a turma, no seu todo, é caracterizada como bastante heterogénea, quer em termos de ritmo de aprendizagem quer de hábitos de trabalho: "Há lá alunos que resolvem … dentro de um ritmo normal que nós estamos à espera e resolvem. E há outros que não, que têm muitas dificuldades. Depois outros que se põem à conversa e só depois é que se lembram de ir fazer" (ST, 13/12/05).

Não obstante, Joana revela uma boa relação com a turma, é claramente reconhecida como professora e não como estagiária e, apesar do ruído de fundo permanente e das contínuas chamadas de atenção que é obrigada a fazer, o ambiente de aprendizagem criado permite o envolvimento activo dos alunos na realização das actividades propostas. Este envolvimento é notório através dos diálogos que estabelecem com Joana a propósito do que estão a fazer e também do à vontade com que admitem não perceber alguma coisa. As atitudes de Joana, a forma como interpela os alunos e os co-responsabiliza no desenrolar das actividades são um bom contributo para esse ambiente:

J (Joana) - Percebeste porque é que fizemos aquilo, Zé Paulo? Estás tão sério.
Olhem o Zé Paulo ainda não percebeu.
A (Aluno) - Eu também não.
J - Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo?
A - Eu não porque eu também não percebi.
J - Então eu perguntei se todos tinham percebido e disseram-me que sim.
(…)
J - Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo e à Elisa?...
Então ninguém é capaz?
Oh, Carolina explica lá outra vez. Tomem atenção (aula, 21/03/06).

Exploração do contexto dos problemas

Apenas no problema do *Quarto e Vintena*, Joana aproveita o contexto do mesmo como factor de motivação para a realização da tarefa. De facto, este é o único problema cuja exploração em sala de aula não se resume à sequência: distribuição do enunciado, leitura e interpretação do enunciado, resolução e registo por escrito da resolução e da resposta ao problema. Mesmo quando propõe o problema A *venda do trigo*, que tinha integrado a Exposição percorrida pela turma há pouco menos de dois meses, e apesar de alguns alunos o reconhecerem como tal, Joana limita-se a fazer um breve comentário a esse facto. Em nenhum momento da aula apela à memória dos alunos, aos aspectos para que eventualmente tenham sido alertados na Exposição, nem à forma como o resolveram com materiais manipulativos[138].

A (aluno) - Oh stora este problema é parecido com aquele que estava lá em Castelo Branco.
J (Joana) - Muito bem, estava a ver que ninguém chegava a essa conclusão.
A (alunos) – Era o do trigo …É o do trigo …
A (Aluno) - Eu não fiz o do trigo.
J – Inês, explica-nos lá o problema.
A - Eu fi-los todos.
J - Mas agora vamos todos fazer (aula, 21/03/06).

Na tarefa do *Quarto e Vintena*, Joana começa por estabelecer conexões com a disciplina de história, tomando como ponto de partida a projecção de um conjunto de imagens alusivas à época a que reporta o problema e interpela os alunos sobre o que estão a ver. Como se pode comprovar pelo excerto seguinte, Joana tem, de facto, a preocupação de recuperar alguns conhecimentos de história que permitem integrá-la num determinado contexto social e económico:

Joana - Vocês já falaram em história sobre os descobrimentos, não já? E sobre as naus que vinham carregadas do Oriente. Então se calhar esta imagem diz-vos alguma coisa, não diz? [Joana refere-se a imagens projectadas nas quais são visíveis espaços físicos do período dos descobrimentos, bem como a pesagem de mercadorias e a realização de trocas comerciais] (aula, 21/03/06).

Os alunos, quer pelas respostas que dão às perguntas postas pela professora, como pelas perguntas que fazem, parecem revelar interesse e curiosidade relativamente a esta contextualização histórica. Há até a intervenção de dois alunos que sugere que estes já possuem alguma informação relativamente à questão do pagamento dos direitos sobre as mercadorias, se bem que Joana não aprofunde o porquê da resposta: "um quinto". Porém, explora o contexto e acrescenta alguma informação que salienta a necessidade de se recorrer à balança como instrumento de medição da massa. Ao alertar para a enorme dimensão da balança usada na Casa da Índia, alerta, ainda que indirectamente, para a magnitude das mercadorias e especiarias descarregadas e para o significado do imposto do quarto e vintena.

J (Joana) – Então as mercadorias eram pesadas naquelas balanças, e numas ainda maiores que eu vou-vos mostrar, e parte dessa carga era para o rei. Diz lá!
A (Aluno) - Era um quinto.
A - Era a quinta parte. Era para o rei. Era para o rei.

---

[138] No documento em que valida a análise feita pela investigadora, Joana faz questão de notar que esta foi a estratégia delineada com a professora cooperante com a finalidade de recolher informação sobre se o ambiente/meio onde os problemas são propostos aos alunos tem ou não influência no interesse pelos problemas e compreensão dos mesmos (Anexo 10).

J - Sim, mas neste caso aqui temos outra situação. Lá está a imagem, as balanças que pesavam as mercadorias que vinham nas naus. (…)
Aqui temos uma balança que esteve na Casa da Índia. Reparem como ela é grande! Vem desde o tecto e há aqui uma varanda onde as pessoas circulam, por isso imaginem o tamanho desta balança. É maior do que esta sala, muito maior.
(…) Que era para pesar as especiarias que vinham do Oriente, sim?
A- Mas a balança não está a bater no chão.
A - E onde é que está essa balança, stora?
J - A balança não está a bater no chão, porquê?
A- Para podermos pesar. Para os pratos não baterem no chão.
J - Para se poder pesar. Muito bem. Aqui ela já não pesa, está no museu, aqui só está exposta. Está no museu de metrologia. Atenção que não é meteorologia. Meteorologia é do tempo. E metrologia vem do quê? (aula, 21/03/06)

É neste âmbito que Joana pede a um aluno que leia um pequeno texto e aproveita para salientar o papel da matemática na resolução de problemas do Homem:

A - Ora, quando os barcos atracavam no porto de Lisboa toda a carga era controlada na Casa da Índia, local onde também se procedia ao pagamento dos direitos sobre a mercadoria [o aluno lê o texto introdutório ao problema do *Quarto e Vintena*].
J (Joana) - Isto é para vocês verem que a matemática se aplica em todo o lado, sim?
(aula, 21/03/06)

A este comentário de Joana seguem-se risos de alguns alunos que parecem revelar alguma incredibilidade relativamente a esse papel da matemática. Porém, Joana não volta a fazer qualquer referência a este aspecto, remetendo os alunos para o significado do Quarto e Vintena.

Contextualizada a tarefa que vai propor, Joana distribui uma folha a cada aluno com o enunciado do problema do *Quarto e Vintena* (Figura 4.8).

Figura 4.8. O problema *O quarto e vintena*

Eu carreguei na Índia 64 quintais de pimenta e quero pagar deles o quarto e a vintena na Casa da Índia. Quero saber o que hei-de pagar a Sua Alteza e o que me resta.

(Adaptado de Bento Fernandes, in Almeida, 1994a, pp. 256, 257)

Apesar do termo *quintais* ter despertado estranheza, Joana limita-se a apresentar aos alunos uma equivalência dessa antiga unidade ao quilograma. Deste modo, pode concluir-se que a exploração do contexto do problema, através da leitura de um texto e da visualização de imagens da época, ao estabelecer algumas ligações directas com a disciplina de história, estimula a comunicação, desperta a atenção para o problema que se vai seguir, transmite aos alunos a ideia de que a matemática está presente na sociedade e que contribui para a resolução de problemas do homem (pagamento de impostos, neste caso).

Orientação da actividade de resolução de problemas

À excepção do problema do *Quarto e Vintena*, as tarefas são apresentadas aos alunos por escrito, em pequenos rectângulos de papel, que os alunos deverão colar no caderno. Após a sua leitura, primeiro em silêncio e depois em voz alta, os alunos, orientados por Joana, são compelidos a identificar os dados e o que é pedido, ou seja a questão do problema, como se pode comprovar nos dois excertos seguintes, das aulas em que propõe os problemas, respectivamente, *O gato e o rato* e *A venda do trigo*:

> J - [Joana distribui a folha com o problema] Vão ler, silenciosamente.
> Psiu. Já têm uma actividade para ler e para fazer.
> Meninos!
> Já vamos falar sobre isso. Primeiro vamos ler todos a actividade (aula, 16/03/06).
>
> J - Estou-vos a distribuir um problema …que é um problema … Luís pára lá! … É um problema antigo e é muito interessante. Vocês vão ler em silêncio e vão ver o que é que conseguem retirar daí, está bem? Os dados todos (aula, 21/03/06).

Através de questões dirigidas para os aspectos que pretende destacar, Joana procura orientar os alunos para a compreensão do problema. É o que acontece, por exemplo, no problema *O Quarto e Vintena*, em que Joana estabelece o seguinte diálogo com o aluno que leu o problema em voz alta:

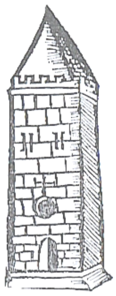
> J (Joana) - Então como é que se retirava para o rei? Diz lá! O que é que tu entendes dali?
> A (aluno)- Primeiro retirava-se um quarto …
> J - Sim.
> A - E do restante eram tirados um vinte avos.
> J - Muito bem. Então, a carga que vinha era pesada e depois dessa carga era retirado um quarto e ainda daquilo que restava ainda lhe era retirado mais um vinte avos. Muito bem, João (aula, 26/01/06).

O mesmo acontece relativamente a outros problemas, em que Joana tem sempre o cuidado de pedir aos alunos que traduzam o problema por palavras suas. Não obtendo resposta, a sua estratégia envolve, em geral, uma nova leitura do enunciado, a clarificação de alguns aspectos terminológicos e a orientação dos alunos para a identificação dos principais elementos do problema. Como se pode observar pelo teor das intervenções e das perguntas feitas nos dois excertos reproduzidos abaixo (referem-se, respectivamente, aos problemas *A venda do trigo* e *O gato e o rato*), Joana, embora revele algumas dificuldades iniciais em transferir para os alunos a responsabilidade pela interpretação do problema, consegue ser bem sucedida no seu intento (até porque há vários alunos a responder), mesmo entrando em linha de conta que algumas das perguntas que põe aos seus alunos são, frequentemente, frases por terminar e que estes devem completar.

Relativamente ao problema *O gato e o rato* (Figura 4.9), estabelece-se o seguinte diálogo em que é perceptível a preocupação com a familiarização com a situação:

J (Joana) - Bom. Então, o problema diz-nos o quê?
Quanto é que mede a torre?
A (Aluno) - Quatro braças.
[segue-se um pequeno diálogo em que Joana, com a ajuda dos alunos, apela ao conhecimento da braça como antiga unidade de comprimento e ao seu significado]
J - Então, a altura da torre era de quatro braças e em baixo o que é que estava à espera do rato?
A – Um gato.
J - Um gato que não se mexia. Então e o rato, quanto é que ele andava, Ângela?
(…)
A – Dois terços de braça.
J - O rato andava dois terços de braça por dia. E agora queremos saber o quê? Elisa?
A - Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. (aula, 16/03/06)

Figura 4.9. O problema *O gato e o rato*



Um rato está em cima da torre que tem quatro braças de altura e, em baixo, à espera dele está um gato. Ora, o rato desce por dia dois terços de braça. Quanto ao gato, este não anda coisa nenhuma.

(a) Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça? Porquê?
(b) Ao fim de quantos dias o rato chega finalmente ao pé do gato?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, in Almeida, 1994b, p.273)

E o mesmo acontece no problema *A venda do trigo* (Figura 4.10):

J (Joana) – Então o que é que nós podemos retirar daí?
[interrompida por comentários despropositados de um aluno, Joana tenta recolocar a questão, mas fá-lo dando a resposta à questão anterior]
J - Então temos o mercador …e empregou, ou seja, comprou, não é? Gastou 300 réis em … quantos alqueires?
A (aluno) - Em quinze … em trinta.
J - Em quinze? Vejam lá. Quantos …?
A (coro) - Em trinta.

J - Em trinta alqueires. Então o que é que ele fez? Com 300 réis comprou 30 alqueires de trigo e depois esse mercador …
A - Dividiu em metade, em quinze.
(…)
J – Em quinze alqueires. Então fez quinze alqueires para um lado e quinze alqueires para o outro… que é metade de trinta…
A – Quinze levou-os a um mercado…
(…)
J - Levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era quanto …?
A - Três quartos do dele.
J - Então o alqueire era igual ao dele, ou não?
A - Não.
J - Então quanto é que era?
A - Era três quartos do dele.
J - Eram três quartos do dele do dele e vendeu cada alqueire pequeno a …
A - A dez réis.
J - Dez réis. Muito bem.
Então vendeu cada alqueire daqueles a dez réis. E depois?
A - Depois levou os outros quinze a outro mercado.
J - A outro mercado. Sim, e onde o alqueire era quanto?
A - Cinco quartos do dele..
J - Cinco quartos do dele. Então era maior ou menor do que os três quartos anteriores?

(aula, 21/03/06)

Figura 4.10. O problema *A venda do Trigo*

Um mercador empregou 30 coroas em 30 alqueires de trigo. Este mercador quer vender o trigo e, para isso, tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era 3/4 (três quartos) do dele e vendeu cada alqueire pequeno por uma coroa. E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado onde o alqueire era 5/4 (cinco quartos) do dele e vendeu cada alqueire grande por uma coroa. Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo.

(Adaptado de Bento Fernandes, in Almeida, 1994b, p. 172)

Assegurada a interpretação correcta do problema, embora se perceba que Joana pretende que sejam os alunos, por si, a estabelecer e implementar um plano de resolução, as dúvidas, os pedidos de esclarecimento que os alunos lhe põem pressionam-na, por vezes, a pedir a um aluno que se dirija ao quadro para registar os dados e mesmo resolver o problema. É a partir da actividade desenvolvida pelo aluno que está no quadro que se processa a resolução que passa, nesse momento e até certo ponto, a ser colectiva, na medida em que Joana interpela os alunos no sentido de confirmar e/ou corrigir o que se está a fazer no quadro. No que diz respeito à resolução do problema do *Quarto e Vintena*:

> J (Joana) - Quem é que entendeu o problema? … Quem é que entendeu o problema?
> A (Alunos) - Eu não.
> A (aluno) - Oh, stora ainda não percebi.
> J - Andreia! Andreia! Vai ao quadro e coloca ali os dados do problema.
> (…)
> J - E agora Andreia, como é que é? Um vinte avos do quê? … Do que restava.
> Então pões um vinte avos do restante. Um vinte avos do restante.
> Então Andreia, como é que nós sabemos o que demos primeiro ao rei? Então dos 64 quintais, quanto é que lhe demos? Temos de ir ver isso.
> A – Demos um quarto de 64.
> J - Sim e então quanto é que é um quarto de 64? …
> Liliana, ajuda lá.
> A - Temos de fazer um quarto vezes 64. (aula, 26/01/06)

Já no que respeita ao problema *O gato e o rato*, resolvido com o recurso à utilização de barras de material Cuisenaire, Joana planeou introduzir, através dele, a divisão de números racionais e o respectivo algoritmo. Como alertam vários autores (Ma, 1999, Hibert e Carpenter, 1992) o sucesso da abordagem de ensino de um tópico através de materiais manipuláveis depende muito da orientação que o professor dá à actividade do aluno e também da forma como conduz a discussão sobre a actividade desenvolvida.

Uma vez familiarizados com o problema, os alunos são orientados para a utilização dos materiais, sem que lhes seja dado algum tempo para pensarem sobre o problema. Acresce dizer que Joana assume, a partir daqui, o papel de orientadora da actividade do aluno, não explicando, previamente, que tipo de utilização vai ser feita do material, isto é, como é que se vai modelar o problema. O que parece não causar perturbação aos alunos.

> J (Joana) - Então vamos saber quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. Vocês têm aí o material que eu vos distribui.
> A (aluno) - E o que é uma braça?
> J - Vão arranjar aqui uma barrinha que possa ser dividida em 3 partes.
> A - Em três partes?
> J - Sim, em três partes iguais. Essa barrinha vai ser correspondente a uma braça.
> [Joana supervisiona e acompanha o que os alunos estão a fazer]
> Essa dá, então podem aplicar essa. Então agora queremos saber o quê?
> A – Em quantos dias é que o rato demora a percorrer uma braça.
> J - E quanto é que anda .. quanto é que o rato percorre?
> A - Já está.
> Já descobri, professora (aula, 16/03/06).

Não obstante, Joana tem o cuidado de centrar a atenção dos alunos na relação entre a actividade com os materiais e o problema. Nos dois excertos seguintes reproduzem-se partes do diálogo mantido com diferentes alunos que apoiam esta afirmação:

> J (Joana) - Então esta aqui … meninos. Quem encontrou esta barrinha? Há outra que pode ser dividida também em 3. Quem encontrou esta, vai corresponder a quê?
> A (Aluno) - A duas amarelas.
> J - Não, estou a perguntar a que é que vai corresponder no problema.
> A - A uma braça.
> J - A uma braça. Então agora tenho que fazer o quê?
> [sobrepõem-se as vozes de vários alunos]
> Não, então se o rato anda 2/3 dessa braça, temos de dividi-la em quantos?
> A - Três.
> (…)
> J - Agora quero daí … se o rato desce por dia 2/3 de braça … quanto é que é 2/3 aí? Dois terços, qual é que é a barra que representa dois terços da braça?
> (…)
> J - Sim. Então já estão 2/3, não é? Então, mas falta percorrer esta parte da braça. E 2/3 anda em quanto tempo?
> A - Um dia.
> J - Um dia. Então falta, o quê? Para completar a braça, precisa de …
> A - Então se ele está aqui, está na pontinha e desce ham …
> J - Dois terços por dia.
> A - Então, pronto, fica assim. Um meio. Agora ..
> J – Um meio, falaste bem. Então quanto é que é este?
> A - Um meio.
> (…)
> A -Eu não estou a perceber o problema.
> J - Porquê? Diz.
> (…)
> Isto era uma braça e ele por dia percorre 2/3, não é? E nós queremos saber em quantos dias é que ele percorreu uma braça. Então isto aqui corresponde a quê?
> A - A um dia.
> J – (…) se ele andava 2/3 por dia, significa que daqui até aqui, já fez um dia, mas, depois, ainda lhe faltava este.
> A - É este.
> J - Não é? Porque olha aqui, isto aqui ... é quanto? Dois terços, não é?
> A - Isto é uma braça.
> J - Ainda lhe falta percorrer este bocadinho aqui, que é esta barrinha. E esta barrinha corresponde a quanto … destes 2/3?
> A - Metade.
> J - Metade destes 2/3, não é? Então se ele andava ... num dia 2/3, agora falta-lhe metade, metade de quê ?
> A - Do dia. Meio-dia (aula, 16/03/06).

O problema em análise, ao contrário de outros, foi resolvido autonomamente pelos alunos, ainda que sob a orientação de Joana. Porém, esta pede a um aluno que exponha aos colegas o seu processo de resolução. Orientado pelas questões colocadas, o aluno consegue estabelecer ligações claras entre a actividade realizada e a solução do problema:

J (Joana)- Já todos conseguiram resolver?
A (alunos) - Sim.
A (aluno) - Um dia e meio.
J - João. Levas as barrinhas e mostras aos teus colegas e explicas porque é que é um dia e meio.
(…)
J - Eu quero ouvir o João. Ouçam lá todos a explicação do João.
A - Se o rato anda dois terços de braça por dia …
J - Então explica lá com as barrinhas. Isso é o quê, João?
A - Isto é o que o rato faz por dia.
J - Eu quero ouvir o João. Meninos!
A - Isto é o que o rato faz por dia.
J - Sim. Então o rato percorre por dia ..
A - Dois terços.
J - De quê?
A - Dois terços da braça.
J - Dois terços da braça. Então e qual é a barrinha que corresponde à braça?
A - A azul.
J -A azul. E, então, os 2/3 são ... essas duas barrinhas verdes. Mas ainda falta percorrer mais um pouco. Então isso vai corresponder a quê?
A - Meio dia.
J - A meio-dia, sim. Então quantos dias é que ele precisa?
A - Um dia e meio.
J- Ele precisa de um dia e meio para percorrer uma braça. Todos perceberam?
(aula, 16/03/06)

A resposta negativa de alguns alunos à pergunta anterior leva Joana a sugerir ao aluno que represente figurativamente os diferentes passos executados para a resolução do problema e é a partir desta que Joana conduz a discussão que permite relacionar a actividade desenvolvida com o conceito de divisão. Interessa, por isso, analisar como é que Joana orienta a atenção dos alunos para as ideias matemáticas que pretende explorar e representar com o material, isto é, analisar até que ponto consegue estabelecer conexões explícitas entre a actividade desenvolvida e a divisão de número inteiro por um número fraccionário.

J (Joana) - Quanto é que ele demora a percorrer uma braça?
A (aluno) - Três meios.
J - Três meios dias. Muito bem.
A - Um dia e meio.
J - Sim senhor. Então o que é que nós fizemos … aqui? Tentámos ver quantas vezes cabia 2/3 numa braça, não foi? Tentámos ver quantas vezes cabia 2/3 numa braça. E como é que nós fazemos?
A - Um a dividir …
J - Um ... a dividir …
A - Por 2/3.
J - Pelos 2/3, porquê?
A - Porque é os 2/3 que ele percorre.
J - Porque é o que o rato percorre. Muito bem.
Todos estão a entender? Quem é que não está a perceber?

Diz, Inês. …
A - Porque é que é feita aquela divisão?
J - Porque tu tens a tua unidade que é esta braça e tu queres saber quantas vezes lá cabe os 2/3, não é? Então se tu dividires esta braça por 2/3, sabes quantas vezes lá cabe, não é? Vai dar ... Vai dar quanto? Vai dar três meios (aula, 16/03/06).

Como se pode observar, no excerto reproduzido, Joana começa por chamar a atenção dos alunos para a relação entre o significado da divisão por agrupamento com a actividade desenvolvida (tentámos ver quantas vezes cabia 2/3 numa braça) e quando um aluno a questiona sobre o porquê da divisão, Joana destaca outros conceitos chave para a compreensão do problema como um problema de divisão, como sejam os conceitos de unidade e de fracção.

Na segunda etapa da tarefa, em que é pedido o número de dias que o rato demora a descer a torre, embora os alunos continuem a utilizar o material para obter a solução, vários alunos concluem que a solução procurada pode ser encontrada através da divisão de 4 (altura da torre) por 3/2 (distância percorrida pelo rato diariamente) e mais do que isso, inferem um algoritmo para a divisão.

A - Oh stora, também podia ser 4 a dividir por 2/3.
J - Muito bem, já falas disso João.
(…)
A - Oh stora eu já sei como é que se dividem. Muda-se o denominador com o numerador.
J - Muito bem, João.
A - Muda-se o denominador pelo numerador. É muito fácil.
J - E isso é o quê? Quando se troca?
A - A divisão.
J - Não, quando nós fazemos a troca do denominador pelo numerador .. isso é o quê? Que nome é que demos a isso? É o ..?
A - É o inverso.
J - Muito bem.
(…)
[outra aluna chama Joana]
A - Stora já descobri o que é. É porque se nós aqui multiplicarmos vai dar o mesmo que aqui. É só trocar os números.
J - Quando nós fazemos isso ..
A - É o inverso.
J - Muito bem. Sim senhor (aula, 16/03//06).

Registe-se que em nenhum dos problemas, Joana orienta os alunos para a verificação da solução obtida ou para a revisão do processo resolução.

Conteúdo matemático

Como se procurou salientar, a estratégia de introdução da divisão por um número fraccionário e do respectivo algoritmo, através do problema do *Gato e o rato*, foi globalmente bem sucedida na medida em que Joana conseguiu orientar a actividade dos alunos com os materiais e conduzi-los à modelação do problema através da divisão. Além disso, o interesse com que os alunos se envolveram na resolução do problema e a natureza das suas intervenções sugere que a actividade desenvolvida permitiu tornar significativo o modelo encontrado, bem como a forma de calcular o quociente. A satisfação com que mais do que um aluno, após a resolução manipulativa, refere que o problema se pode resolver através da divisão e que já descobriu como se calcula o respectivo quociente, é disso um forte indicador.

Porém, como se pode constatar a partir dos excertos reproduzidos da abordagem de ensino dos três problemas, Joana nem sempre se mostra muito sensível ao estabelecimento de conexões com outros tópicos. De facto, isso só ocorre de forma explícita no problema do *Gato e o Rato*, usado como meio para a introdução de um novo conteúdo. Por exemplo, no problema *A venda do trigo*, não faz qualquer alusão ao significado das fracções 3/4 e 5/4 no contexto do problema. Ou seja, não se torna claro que ambas as fracções exprimem uma relação entre dois volumes e, consequentemente, que para cada um dos mercados se pretendia determinar quantos alqueires com um determinado volume era possível formar. O mesmo comentário se pode fazer relativamente à comparação dos dois volumes em questão. Apesar de Joana questionar os alunos sobre qual das fracções é maior, ao não pedir qualquer justificação da resposta dada pelos alunos desperdiça a oportunidade de conectar números e medida e de aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos relacionados com o problema.

> J - A outro mercado. Sim, e onde o alqueire era quanto?
> A - 5/4 do dele.
> J - 5/4 do dele. Então era maior ou menor do que os ¾ anteriores?
> A - Era maior.
> J - Então temos que … foi ao outro mercado onde o alqueire era 5/4 do dele e vendeu cada alqueire por quanto? (aula, 21/03/06)

Neste mesmo problema e a propósito da divisão, uma vez calculado o quociente da divisão de 15 por ¾, é notória a preocupação de Joana em assegurar que os alunos compreenderam o porquê do uso da operação de divisão. Não obstante, o que transparece das intervenções de alguns dos alunos é o facto de, muitos deles, não terem estabelecido um plano de resolução e terem sido induzidos para a execução de determinados cálculos. Não é, assim, de estranhar que, já no decorrer da resolução do problema no quadro, alguns admitam não entender o porquê dos procedimentos executados:

> J (Joana) - Todos perceberam porque é que dividimos o 15 por ¾? Percebeste Maria? …Ângela? …Percebeste Inês? … Sim André?
> [Joana, não recebendo nenhuma resposta negativa, começa a circular por entre os alunos e observa as suas resoluções]
> J - Percebeste porque é que fizemos aquilo, Zé Paulo? Estás tão sério.
> Olhem o Zé Paulo ainda não percebeu.
> A - Eu também não.
> J - Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo?
> A - Eu não porque eu também não percebi.
> J - Então eu perguntei se todos tinham percebido e disseram-me que sim.
> (…)
> J - Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo e à Elisa?...
> Então ninguém é capaz?
> Oh, Carolina explica lá outra vez. Tomem atenção. (aula, 21/03/06)

Embora dê oportunidade aos alunos de apresentarem os seus raciocínios, incentiva-os a isso, acaba por ser ela a assumir o papel principal na explanação à turma, certamente pressionada pelo tempo da aula. Observe-se, no excerto seguinte, a forma como Joana, depois de ter pedido à aluna Carolina que explicasse aos colegas o porquê de dividir 15 por 3/4, não lhe dá tempo suficiente para o fazer, tomando a palavra e acabando por ser ela a dar uma explicação. Explicação essa reveladora de compreensão conceptual e que procura orientar o pensamento dos alunos para o significado da divisão:

> J (Joana) - Carolina explica lá o teu raciocínio. Porque é que fizeste aquilo?
> A (Carolina) -Tínhamos 15 alqueires e no mercado ham …
> J - Então tínhamos 15 alqueires e fomos levar a um mercado onde o alqueire lá utilizado era …
> A (Carolina) – Três quartos.
> J - Então tínhamos quinze alqueires e fomos levar a um mercado onde o alqueire lá utilizado era …
> A - Três quartos do alqueire do mercador.
> J – Três quartos do alqueire do mercador. Sim? Então queremos saber com os quinze alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado, quantos alqueires pequenos conseguiu fazer o mercador.
> Percebeste Elisa?
> Então se temos os quinze alqueires no primeiro mercado, o alqueire pequeno eram três quartos do dele. Tínhamos quinze alqueires, fomos ver quantos três quartos podemos fazer nos quinze. Sim? Quantos grupos de três quartos podemos fazer.
> Depois diz que não percebes.
> [Joana chama a atenção a um aluno distraído e recomeça a circular por entre os alunos e a observar as resoluções da alínea b da tarefa] (aula, 21/03/06).

Na exploração do problema do *Quarto e Vintena*, Joana tende a focar mais a atenção dos alunos nas operações a efectuar do que no seu significado. É o que acontece, por exemplo, a propósito do cálculo do Quarto e vintena em que Joana não salienta o papel de operador das fracções ¼ e 1/20, isto é, que a multiplicação por um número fraccionário permite calcular uma parte fraccionária de um todo; no caso, do carregamento de mercadoria:

> J (Joana) - Então dos sessenta e quatro quintais, quanto é que lhe demos [ao rei]? Temos de ir ver isso.
> A (aluno) - Demos um quarto de sessenta e quatro.
> J - Sim e então quanto é que é um quarto de sessenta e quatro? (…)
> A - Temos de fazer um quarto vezes sessenta e quatro.
> J - Um quarto vezes sessenta e quatro, muito bem.
> (…)
> J - Então isso dá sessenta e quatro sobre quatro e isso é igual a dezasseis. Então e o que é aquele dezasseis além, Melita?
> A - São dezasseis euros.
> J - O que são aqueles dezasseis? Melita o que são aqueles dezasseis? Olha para lá.
> Dinheiro? Nós não estamos a falar de dinheiro. […]
> Carina, o que é aquele dezasseis além?
> A - É …
> J - Andreia?
> A - O que deram ao rei.
> É o que deram ao rei, percebeste? Então, isso foi o que demos ao rei. Sim? Então quanto é que… demos dezasseis quintais de pimenta ao rei […]
> J - O que é que temos de fazer para saber quanto é que nos restou?
> A - Menos.
> J - Sessenta e quatro menos dezasseis.
> Que é para sabermos o que nos resta.
> (…)
> J - Isso. Muito bem, é vezes, multiplicar (aula, 21/03/06).

Note-se que apesar dos problemas *Quarto e Vintena* e *A venda do trigo* poderem ser considerados problemas aritméticos, o facto de não envolverem nenhuma estratégia de resolução particular que não a percepção das operações adequadas, a compreensão do significado dessas operações revela-se crucial para a resolução do problema. Joana tem consciência disso, embora nem sempre consiga estabelecer conexões explícitas. A esta forma de agir não é alheio o facto de Joana viver a sua primeira experiência de prática de ensino, ainda no âmbito do seu processo de formação e, portanto, como tal deve ser encarada.

Um aspecto que sobressai da prática de Joana é o cuidado revelado com a forma como comunica em matemática, orientando os alunos para as conclusões decorrentes do trabalho realizado e corrigindo-os, sempre que oportuno, de modo a garantir uma formulação correcta e acessível aos alunos.

J (Joana) - Vamos ver agora a conclusão que nós podemos tirar deste problema todo. Está bem? E o João foi o primeiro a lá chegar, mas houve mais meninas que chegaram lá. A Patrícia e a Ana também já chegaram à conclusão
(…)
E qual foi … Qual foi a conclusão? Olhando além para aqueles cálculos, qual a conclusão que podemos retirar?
A (aluno)- Nós multiplicamos o dividendo pelo inverso do divisor, o resultado vai ser o mesmo.
J - Exactamente. Porque se vocês repararem o que nós temos aqui é o inverso do que está aqui na divisão. Não é? Quando temos uma divisão ... aqui está 1 a dividir por 2/3, para fazermos aquela divisão, transformamos os 2/3 no seu inverso que neste caso fica ... quanto?
A - Três meios.
J - Três meios e fazemos uma multiplicação. Então fazemos o 1 vezes o inverso do divisor, que fica 1 vezes 3/2 e obtemos então o resultado. Que vemos ali que vai dar o mesmo. Que é igual a 3/2.
(…)
J - Então agora vamos escrever a conclusão a que vocês chegaram ...
A - A conclusão é que o inverso …
J - Como é que é a conclusão, Ana?
A - Quando o divisor multiplica pelo inverso o resultado vai ser o mesmo.
J - Não.
A - Eu pus assim: concluímos que a divisão é o inverso da multiplicação e dá sempre o mesmo.
J - Não é bem assim. Não é bem assim.
Então é assim, para dividirmos ... dois números racionais …em que pelo menos um deles … está representado (pausa) por uma fracção, não é? (…) Multiplicamos o dividendo pelo inverso do divisor.
Foi o que vimos aqui, multiplicámos o dividendo pelo inverso do divisor.

(aula, 16/03/06)

4.2.2.3. Reflexão sobre a Prática de Ensino

Nas reflexões que faz sobre as aulas e sobre o processo de ensino e aprendizagem Joana reconhece a existência de dificuldades na aula, quer em relação à compreensão dos problemas, quer na sua resolução, conseguindo, por vezes, identificar possíveis razões por detrás das dificuldades. Apesar da reflexão ser essencialmente descritiva das intervenções dos vários participantes na aula, manifesta ser capaz de analisar criticamente a sua acção.

Na origem dos problemas de natureza pedagógica desencadeados por atitudes menos apropriadas de alguns alunos, sobretudo em relação aos colegas de turma, mas, por vezes, também em relação à própria professora, Joana identifica a ausência da criação de hábitos de trabalho, de cooperação e de respeito para com os outros:

> Eu acho que eles têm muita liberdade, mas isso já é próprio do meio familiar. Não estão habituados a cumprir regras. No meu tempo, na minha altura, algum dia pensava faltar ao respeito a algum professor. Nunca na vida. Eles não. Por exemplo, virar costas ao professor e o professor a falar com ele e ele vira costas e vai-se embora, assim ...
> (…)
> E há dois ou três elementos que são assim e destabilizam. (…) Nunca estão bem em lado nenhum. (ST, 17/02/06)

No que respeita à reacção dos alunos e envolvimento com as tarefas de resolução de problemas históricos, Joana nota o interesse dos alunos pelo contexto do problema do *Quarto e Vintena* e a motivação criada pela forma como apresentou a tarefa aos alunos.

> Inv - E qual foi a sua sensação relativamente à reacção dos alunos ao problema? Compreenderam a situação?
> Joana - Professora, o que eu acho é que eles gostaram muito ao início quando viram, quando eu lhes mostrei o problema antigo. Também gostaram muito daquela linguagem e quando lhes dei o problema, eles ficaram interessados. Só que depois, quando foi na parte da resolução é que muitos, como não estavam a entender, distanciaram-se um bocado. Começaram a falar de outras coisas (ST, 17/02/06).

É curioso referir que Joana, aquando da planificação, tinha colocado como hipótese que a pouca afinidade dos seus alunos com a disciplina de história, pudesse ter repercussão na reacção aos problemas:

> Se nós levarmos isto para a sala de aula, só por ser diferente… assim ... do conteúdo a que eles estão habituados, acho que os motiva. Agora das duas uma, professora (risos), eles não gostam muito de história. Só se eles não aderirem aos problemas por causa disso (risos). Agora é que eu não sei (Joana, ST, 13/12/05).

Questionada sobre as razões por detrás das dificuldades identificadas em termos de entendimento do problema, Joana associa-a à incompreensão da natureza do imposto do Quarto e Vintena. Como todos os impostos, o seu cálculo exige a compreensão do significado do conceito de imposto (aspecto que não foi abordado na aula), ainda para mais porque envolve duas etapas de cálculo:

> J (Joana) - Eu acho que a questão foi de terem de dar um quarto ao rei e depois ainda terem que dar um vinte avos ao rei, novamente. E acho que aí é que foi a baralhação deles, porque pensavam: «se já deu um quarto, como é que ainda vai dar um vinte avos? Para mim, foi aí a confusão deles.
> I (Inv)- Acha que eles não perceberam a natureza do imposto?
> J (Joana) - Exactamente. Eu acho que sim, que eles tinham que dar um quarto e depois do que sobrava ainda tinham de dar mais um vinte avos. E eu acho que eles não compreenderam porque é que tinham de dar mais um vinte avos.
> I - E depois, acha que com a sua explicação isso ficou claro?
> J - Para muito ficou, mas para outros não. Aqueles alunos assim … mas eu acho que ficou.
> (ST, 17/02/06)

Apesar disso, não avalia o problema como desadequado ou difícil para os alunos. Aliás, curiosamente, coloca-o no mesmo patamar de outros problemas propostos:

> I (Inv) - Na sua opinião, o problema foi mais difícil para os alunos do que os que fazem habitualmente?
> J (Joana) - Eu acho que foi só por aquela questão de ter que se dar ... do imposto. De ter de se retirar duas vezes para o rei.
> I - E a Joana sentiu-se bem a orientar a resolução deste problema?
> J - Senti, só depois na parte .. quando foi da expressão numérica e eles começaram: «ai, eu não sei de onde …» (ST, 17/02/06).

Relativamente à exploração das tarefas delineadas no PF é de ressaltar que, em duas delas (problemas *Quarto e Vintena* e *A venda do trigo*), Joana decide, com o consentimento da professora cooperante, ir um pouco mais além do que o planeado com a investigadora no PF. Assim, em ambos os problemas, Joana pede aos alunos que traduzam para linguagem matemática a situação dada, isto é, que traduzam por uma expressão numérica o processo de cálculo seguido na resolução de cada um dos problemas. Esta extensão do problema surge como um síntese do processo de resolução que permite não só percepcionar o cálculo do Quarto e Vintena como um todo, mas também julgar a adequação do processo de resolução seguido. Paralelamente, Joana estabelece a ligação com outros assuntos do tópico "Multiplicação de Números Racionais", como a própria salienta quando questionada sobre o porquê de pedir aos alunos que escrevam uma expressão numérica: "Porque era a matéria que eu estava a dar" (ST, 17/02/06). No entanto, esta decisão coloca-a perante desafios didácticos inesperados, relativamente aos quais admite ter sentido algumas dificuldades em dar resposta, sobretudo na expressão relativa ao processo de cálculo do imposto do Quarto e Vintena.

> J (Joana) - …os miúdos depois, quando foi no final da expressão numérica começaram-se a baralhar.
> (…)
> I (Inv) - Portanto achou que eles tinham dificuldade em escrever a expressão numérica?
> J - Sim, professora. Só que entretanto eles começaram-se a baralhar e eu senti que ... Mal eu dei conta, já eu estava baralhada também. E depois até comentei com a professora Fernanda e ela até afirmou que até ela estava a ficar baralhada com aquilo que eles estavam a dizer. (ST, 17/02/07).

De facto, tornou-se claro que se trata de uma expressão de alguma complexidade para a turma, pois os alunos mostraram alguma dificuldade em destrinçar os resultados parciais do respectivo processo de cálculo e, consequentemente, em escrever um modelo matemático do problema. Até porque Joana adopta como estratégia levar uma aluna ao quadro e através da interpelação à turma tenta chegar à expressão numérica planeada, não dando tempo aos alunos para pensarem um pouco sobre aquilo que se pretende. De qualquer modo, Joana, na reflexão que realiza sobre a forma como orientou a tarefa, atribuí ao tempo implicado na resolução do problema a causa primeira das dificuldades dos alunos em chegar à expressão numérica pretendida, bem como das suas próprias dificuldades na orientação da actividade do aluno:

> Foi muito longa a duração da actividade. Eu acho que foi bastante longa … mas também porque a actividade envolveu muitas etapas e isso leva sempre algum tempo e os miúdos depois, quando foi no final, na expressão numérica, começaram-se a baralhar.
>
> (ST, 17/02/07).

Porém, embora não reflicta explicitamente sobre as implicações da estratégia adoptada para as dificuldades sentidas pelos alunos, Joana altera-a no problema *A venda do trigo*. Assim, opta por orientar os alunos para que, individualmente ou em pequenos grupos, traduzam em linguagem simbólica o dinheiro conseguido nos dois mercados. Porém, também neste caso, a sua inexperiência parece ser um obstáculo à exploração das respostas obtidas. De facto, os alunos escrevem duas expressões distintas[139] e aquela que fica registada no quadro não corresponde ao processo de resolução também aí registado, por outro aluno. Questionada pela investigadora, Joana admite que não se apercebeu desse facto e desvaloriza-o, pois, em sua opinião, conseguiu levar os alunos a compreender que a expressão escrita traduzia efectivamente o problema:

> A expressão estava correcta e, então, nem me apercebi que havia ali … (…) Tanto que eu depois expliquei donde é que vinha … quando foi escrita a expressão numérica. Depois eu perguntei: - Então isto aqui corresponde a quê? - e eles chegaram lá.
>
> (Joana, ST, 24/03/06)

4.2.3. Formação e Profissão

4.2.3.1. Relacionamento com o curso e com a profissão de professora de matemática

Tal como a maioria das alunas da turma, Joana não frequenta a sua primeira opção na candidatura ao ensino superior, que era enfermagem. Na base da escolha do curso de Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática/Ciências da Natureza, correspondente à segunda opção de candidatura, não terá existido uma motivação

[139] Respectivamente, $15 \div \frac{3}{4} \times 10 + 15 \div \frac{5}{4} \times 10$ e $(15 \div \frac{3}{4} + 15 \div \frac{5}{4}) \times 10$.

particular pela profissão de professora, mas sim o gosto e o interesse particular que sempre sentiu pelas áreas científicas de Matemática e de Ciências da Natureza (QT1, 11/06/05). Não é pois de estranhar que Joana afirme sentir uma maior afinidade com a docência destas duas áreas no 2º CEB, do que com a monodocência no 1º CEB: “estou interessada em exercer actividade no segundo ciclo, pois considero que a matéria é mais interessante” (QT1,11/06/05). Porém, outros aspectos concorrem para essa escolha, como sejam o sentimento de estar a ser preparada sobretudo para a docência no 2º CEB: “nós somos mais preparadas para aí exercer actividade” (QT1, 11/06/05), bem como o nível etário e de desenvolvimento cognitivo dos alunos: “a mentalidade das crianças é um pouco diferente, dando para realizar situações problemáticas mais complexas” (QT2, 20/06/06).

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação, considera-se uma aluna de nível médio, cujas notas nunca diferiram significativamente das obtidas pelas colegas de turma. Admite ter concluído as disciplinas sem dificuldades de maior, ainda que reconheça que se poderia ter aplicado um pouco mais (QT1,11/06/05). Referindo-se à componente de formação em matemática, afirma que, por vezes, “os conteúdos, os conceitos e os teoremas” abordados a “aborrecessem”, “tentou nunca perder o interesse e a motivação de saber qual o motivo de tudo aquilo ser assim” (QT2, 20/06/06), ainda que nem sempre o tivesse conseguido (ET3, 30/06/06). Mesmo assim, terminada a licenciatura, Joana considera como bom o seu nível de preparação em matemática, acrescentando que “com a prática, com o passar do tempo, vou adquirir muitos mais conhecimentos, o que fará alargar o meu leque de aprendizagens feitas nesse sentido” (QT2, 20/06/06). No que respeita à preparação didáctica Joana atribui às disciplinas de Prática Pedagógica um papel “extremamente importante”, pois só através dela se contacta, “de certa forma, com a realidade de ser professor” (QT1, 11/06/05), “se aprende a estar perante os alunos e controlar uma turma” (QT2, 20/06/06). Para além desses aspectos, em sua opinião, a prática pedagógica “permite pôr em prática tudo aquilo que nos foi ensinado”, ao nível da planificação lectiva, da escolha das actividades de aprendizagem e da selecção de estratégias motivadoras (QT2, 20/06/06). A este reconhecimento da importância das disciplinas de Prática Pedagógica para a sua formação não parece ser alheio o papel importante que atribui à professora cooperante do 2º CEB em termos de orientação e motivação para a profissão.

Inquirida sobre possíveis sugestões de mudanças possíveis na licenciatura que frequenta, Joana aponta para a necessidade de serem utilizadas metodologias mais motivadoras para os estudantes e também para uma maior ligação à realidade através da escolha de exemplos reais (QT1, 11/06/06).

Ao longo do Percurso de Formação Joana conversou muitas vezes com a investigadora sobre as suas preocupações relativamente ao seu futuro profissional. Não raras vezes, terminadas as sessões de trabalho, Joana pediu a opinião da investigadora sobre o que fazer, uma vez terminada a licenciatura, ponderando mesmo a hipótese de se candidatar a outro curso. Apesar dessa inquietação relativamente ao futuro, em nenhum momento a investigadora sentiu que isso condicionasse a forma como se empenhou na realização das tarefas propostas. Aliás, todas as atitudes e comportamento de Joana revelaram um interesse crescente pelo curso e um enorme envolvimento, em particular, nas disciplinas de Prática Pedagógica. Estes aspectos reflectem-se na forma como no final do seu curso encara a profissão de professora e perspectiva o futuro: "Apesar de gostar imenso da profissão que escolhi e de me fascinar ensinar e entender que o aluno está a perceber correctamente os conhecimentos que estou a transmitir e de achar extremamente bonito poder transmitir conhecimentos, as minhas expectativas são muito más" (QT2, 20/06/06).

4.2.3.2. Percepção sobre o contributo do Percurso de Formação para a formação profissional

No final do ano lectivo 2005/06, foi pedido a todas as futuras professoras participantes no estudo que fizessem um balanço relativamente ao contributo do Percurso de Formação para a sua formação profissional. Da análise das respostas dadas por Joana, o primeiro aspecto que sobressai é a apreciação muito positiva que faz relativamente a todas as tarefas de formação propostas. Refere-se aos seminários e sessões de trabalho como momentos muito relevantes de formação, na medida em que contribuíram para uma maior consciencialização sobre questões de natureza didáctica: "Este tipo de seminários serviu-me para obter o conhecimento de que é necessário escolher, seleccionar muito bem as actividades propostas aos alunos, pois nem todas são as mais adequadas às situações, conceitos, que queremos tratar" (QT2, 20/06/06). Esta consciencialização dos cuidados a ter na selecção dos problemas/tarefas a propor aos alunos, parece ter resultado do facto de ser "obrigada" a resolver os problemas discutidos no PF. Desse trabalho parece ter resultado um maior cuidado na selecção das tarefas, com especial atenção às possíveis dificuldades dos alunos, à tomada de decisão sobre a adequação ou não de determinado problema aos seus alunos e à necessidade de, por vezes, ser necessário reformular os enunciados ou as questões que se fazem: "A resolução dos problemas foi bom, porque nos permitiu ver as dificuldades que as crianças podem ter. Se nós as temos, eles vão ter ainda mais e então …aquela questão deve-se resolver sempre os problemas e não só olhar para eles e pensar: - Ah, os miúdos conseguem fazer" - e acabou e então ver que existem dificuldades, que se calhar é melhor pormos de outra forma" (ET, 30/06/06).

Acrescenta, referindo-se, por exemplo, à reflexão feita sobre manuais escolares e sobre documentos curriculares: "Ajudou-me, por exemplo, na questão dos manuais, a ver que havia determinadas actividades propostas que não se enquadravam com o que era pretendido, ou tinham um grau de dificuldade muito baixo, ou estavam muito desencontradas com aquilo que nós íamos trabalhar. E a análise dos documentos curriculares também permitiu ter uma ideia mais fundamentada do que estes são e do que se pretende" (ET, 30/06/06).

Nesse sentido, Joana atribui às sessões trabalho um papel muito relevante em termos formativos, quer a nível do apoio à planificação quer da reflexão sobre a prática de ensino. Em relação ao apoio à planificação afirma: "Várias vezes me reuni com a professora e de todas as vezes aprendi muito. Aprendi técnicas, formas, estratégias para explorar as actividades e levar os alunos ao encontro daquilo que pretendia que fosse explorado. Durante as várias sessões, muitas foram as orientações pedidas e "discutidas" com a professora, o que segundo o meu ponto de vista foi muito gratificante para o desempenho do meu trabalho" (QT2, 20/06/06).

No que respeita à reflexão sobre a prática de ensino, admite uma maior consciencialização para a existência de abordagens alternativas que podem enriquecer a exploração feita em sala de aula e ainda que a reflexão a ajudou a "corrigir muitas imperfeições, evitando que se repetissem" (QT2, 20/06/06).

<u>História da matemática / Resolução de problemas históricos / Conexões</u>

Ao longo do PF nota-se uma evolução substancial relativamente à forma como Joana encara a história da matemática e, em particular, os problemas históricos, a dois níveis, enquanto recurso/veículo para o ensino e aprendizagem da matemática e enquanto contributo para a sua formação profissional.

Ainda que durante a PP realizada no 1º CEB Joana e as suas colegas de grupo de estágio procurassem integrar aspectos relativos à história das antigas unidades, fizeram-no apenas através de uma curta dramatização (cujos autores foram as próprias estagiárias, limitando-se os alunos a ser espectadores) cuja temática incidiu sobre as unidades de massa (NC, 09/05/05). Na entrevista realizada após a PP no 1º CEB e em que foi inquirida sobre se tinha proposto algum problema histórico[140] aos alunos, Joana afirma que não, justificando-se com as características globais da turma em que realizou o estágio e que considera ser constituída por "crianças com muitas dificuldades e com ritmos de trabalho diferentes" (ENT2, 21/06/05). Referindo-se ao tipo de tarefas propostas aos alunos afirma: "Se colocasse uma questão dessas não seriam capazes de resolver, até porque as questões que nós lhe colocámos eram questões sempre muito simples ou muito básicas (…) porque se fugirmos para o complexo, metade, mais de metade da turma deixa de acompanhar" (ENT2, 21/06/05). Destas palavras parece poder inferir-se que, embora não o verbalize, Joana encara os problemas históricos como difíceis, o que aliás está de acordo com a reflexão que faz relativamente à sua própria experiência de resolvedora de problemas históricos na disciplina de Geometria: "Eu acho que é bem mais interessante [refere-se comparativamente a problemas com as antigas unidades ou com as unidades actuais do SI], apesar de nos causar uma certa confusão, porque nós nunca ouvimos falar nessas unidades, não é? E depois conseguir fazer a relação entre elas é um pouco complicado" (ENT2, 21/06/05).

Após a experiência de ensino num ambiente não formal, como foi a propiciada pela participação no planeamento de dinamização do módulo "Comprimento" na Exposição interactiva, Joana sustenta uma posição de maior receptividade relativamente às potencialidades dos problemas históricos na sala de aula, nomeadamente ao nível do interesse e motivação dos alunos para aspectos da história da matemática. Observe-se a surpresa que manifesta quando reconhece que a reacção das crianças à Exposição contrastou com as suas expectativas, que, depreende-se das suas palavras, seriam muito baixas:

[140] Referimo-nos aos problemas históricos resolvidos em geometria pelas futuras professoras na disciplina de Geometria, ou outros, que estas tivessem encontrado em manuais escolares ou outras fontes.

J (Joana) - Acho que a Exposição foi muito bem, correu muito bem. Acho que sim.
I (Inv) - Correu melhor do que estavam à espera?
J - Eu confesso que sim. Surpreendeu-me.
I - Porquê, tinha expectativas baixas?
(…)
I - Expectativas em relação ao envolvimento dos alunos?
(…)
I - Ou devido ao facto de os problemas apelarem a antigas unidades?
J - Se calhar, também um bocadinho isso. De utilizar antigas unidades e de os miúdos poderem dizer: -Ai, antigas unidades. Há sempre aquela noção, são antigas, já passou. Mas foi o contrário, notou-se que gostam de saber ... coisas antigas (risos). Desperta-lhes a atenção. Eu acho que sim. Surpreendeu-me muito (ST, 03/03/06) .

No balanço final que faz desta experiência de formação, Joana atribui-lhe muita relevância em termos do desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática e justifica: “Através da Exposição pude verificar mais uma vez que, usando materiais adequados, para a motivação dos alunos estes resolvem as actividades de forma lúdica e muito enriquecedoras para a compreensão” (QT2, 20/06/06).

Relativamente à exploração em sala de aula de problemas históricos delineados no PF, Joana manifesta também a mesma perplexidade perante as reacções dos alunos: “Todas as tarefas propostas despertaram nos alunos muito interesse, surpreendendo-me muitas vezes, (quase sempre) pela positiva (QT2,20/06/06). O parêntesis colocado por Joana sugere que Joana terá encarado inicialmente alguma ou algumas das tarefas que planificou no âmbito do PF com algum cepticismo, apesar de sempre ter aderido com entusiasmo à ideia de as integrar nas suas aulas. Certamente que a este último aspecto não terá sido alheia a posição favorável da professora cooperante relativamente aos problemas históricos: “A professora cooperante aceitou da melhor forma o uso de problemas históricos, mostrando-se muito interessada para a sua aplicação nas aulas” (Joana, QT2, 20/06/06).

Finalizada a PP no 2º CEB, Joana assume que a experiência de ensino em que foi envolvida lhe deu uma nova perspectiva sobre a integração da história da matemática: “Hoje, tenho uma perspectiva muito boa depois de ter desenvolvido e explorado este tipo de situações em contexto de sala de aula” (QT2, 20/06/06). Inquirida sobre se futuramente poderá repetir tal experiência de ensino, Joana mostra-se muito receptiva e realça as potencialidades dos problemas históricos no desenvolvimento das capacidades dos alunos, no desenvolvimento da compreensão das ligações da matemática com outras áreas, bem como da utilização da matemática na história da humanidade.

> "E porque não? Eu acho que são muito interessantes e acho que são muito … desenvolvem muito as capacidades dos miúdos e … Porque por exemplo, eles estão habituados a trabalhar as fracções, por exemplo, com as pizzas, aquelas coisas todas e sempre com problemas muito do actual e também lhes faz falta um pouco de história e eles gostam. Para ver que a matemática pode ser … que abrange outras áreas e que desde há muito tempo é utilizada. (ENT3, 30/06/06)

Acresce dizer que Joana admite que o Percurso de Formação foi um contributo positivo para a articulação na prática de ensino da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática. Ainda que, como resulta da análise da prática de ensino, Joana nem sempre tenha conseguido tornar essas conexões explícitas, Joana tem a consciência que a exploração do contexto dos problemas é favorável ao estabelecimento de ligações entre a matemática e outras áreas curriculares, como, por exemplo, a área de:

> J (Joana) - Eu acho que foi um contributo muito bom. Sim, porque, por exemplo, outras disciplinas curriculares, por exemplo, a história quando eu falei, quando foi aquele problema do …
>
> I (Inv) - Do *Quarto e Vintena*, por exemplo.
>
> J - Sim, sim. Exactamente que era da alfândega, que falei lá de algumas questões históricas. Ligação entre a matemática e problemas do quotidiano, lá está também. Ligações entre conceitos e processos matemáticos, também estavam todos ligados, não é? Eu acho que foi muito bom (ENT, 30/06/06).

No que respeita à percepção do contributo do PF para a sua formação profissional, Joana realça o interesse da resolução de problemas com unidades desconhecidas e que mantêm entre si relações também desconhecidas, pois, em sua opinião, isso contribui para o desenvolvimento das capacidades de pensamento e raciocínio: "conseguir fazer a relação entre elas é um pouco complicado, mas eu acho que nos ajuda a pensar e a conseguir relacionar as coisas" (ET, 21/06/05). Admite também que resolver problemas históricos lhe permitiu ter a noção de que "a matemática evolui e que sempre esteve presente nas necessidades mais ínfimas do homem" (QT2, 20/06/06). Assim, em jeito de reflexão final, Joana qualifica como muito relevante o contributo do PF, em particular, para a sua formação em didáctica da matemática, alegando que a resolução dos problemas históricos lhe permitiu desenvolver o seu conhecimento matemático e que lhe mostrou "que a história da matemática se pode tornar muito interessante quando é bem utilizada, bem explorada. Quando usada em contexto de aula resulta bastante bem e permite mostrar aos alunos que desde sempre a matemática foi necessária e que esteve presente em todas as áreas" (QT2, 20/06/06).

4.2.4. Sumário

Conquanto Joana ingresse num curso que foi a sua segunda opção e nunca faça referência a alguma motivação particular para a profissão de professora que não a afinidade sentida pelas duas áreas específicas da licenciatura que frequenta (Matemática e Ciências da Natureza), o entusiasmo que transparece da forma como se envolve em todas as actividades de prática pedagógica, o balanço final que faz sobre a formação, bem como a análise da sua prática de ensino, são reveladores da adequação da escolha feita.

Joana perspectiva a matemática como uma ciência em evolução, conectada com outras ciências e que permite dar resposta a muitas situações do quotidiano do homem e em que a exploração, o pensamento e o raciocínio desempenham um papel fundamental para o seu desenvolvimento. Daí que, a resolução de problemas seja uma experiência de ensino e aprendizagem muito valorizada, em particular, através do recurso a materiais que permitam modelar os problemas e estabelecer a ponte para a manipulação mental de conceitos e ideias matemáticas.

Na resolução de problemas históricos na disciplina de Geometria, evidencia reconhecer e ser capaz de aplicar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários à sua resolução, mas as resoluções que apresenta sugerem uma excessiva centralização na apresentação dos cálculos, falta de hábito em justificar o processo de resolução e de verificar a adequação ao problema da solução matemática encontrada. Outro aspecto que não pode deixar de ser notado é que a falta de familiarização com os antigos sistemas de unidades pode ser avançada como causa possível da dificuldade na manipulação conceptual das relações entre as unidades, ajudando a explicar as resoluções muito centralizadas no cálculo.

Em termos de prática pedagógica, ainda que seja notória a influência que a professora cooperante exerce na planificação das aulas, nomeadamente na selecção de tarefas e recursos, a abordagem que Joana adopta na orientação da resolução de problemas históricos em sala de aula (e também na Exposição) caracteriza-se por uma grande valorização dos aspectos conceptuais implícitos nos problemas, sendo evidente a ênfase que Joana atribui à compreensão dos enunciados dos problemas e à relação destes com os conceitos e ideias matemáticas necessários à sua resolução. Na orientação da resolução de problemas, é sensível às várias etapas de resolução de problemas, embora manifeste, por vezes, alguma dificuldade em orientar os alunos para o trabalho autónomo, o que parece ser fruto das características da turma em que há vários alunos propensos à distracção e a distrair os colegas. Não obstante, consegue criar um ambiente de grande empatia com os alunos, repreendendo, sempre que necessário, e marcando o ritmo de trabalho em sala de aula. A sua estratégia de ensino está próxima de favorecer uma aprendizagem compreensiva dos conceitos e dos procedimentos, na medida em que consegue estabelecer ligações entre diferentes ideias matemáticas.

Relativamente ao Percurso de Formação, Joana faz uma apreciação muito positiva do seu contributo para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional, nomeadamente ao nível da didáctica, destacando o contributo para a mudança de perspectivas relativamente ao valor didáctico da história da matemática, tanto ao nível da formação de professores, como ao nível do ensino e aprendizagem da matemática. Tendo-lhe sido pedido que validasse as interpretações feitas pela investigadora relativas aos dados recolhidos no Percurso de Formação[141], Joana reforça esta conclusão quando afirma: "Considero que esta experiência de uso de problemas antigos foi muito gratificante e muito relevante no contributo da minha formação em didáctica". Nesse documento Joana reitera "É de referir que a história da matemática se torna extremamente interessante quando é bem explorada, permitindo passar aos alunos que a matemática é fundamental e que desde sempre, esta foi necessária". Releva-se assim o papel do Percurso de Formação para a transmissão em sala de aula de uma imagem da matemática como uma ciência estreitamente relacionada com outras áreas e com o quotidiano.

Na tabela 4.1 resumem-se, com base nas dimensões e categorias de análise consideradas, as principais características de Joana.

Finalmente há que referir que, solicitada a opinião de Joana relativamente à análise feita pela investigadora, esta concorda, em termos globais, com a mesma, destacando e clarificando alguns aspectos pontuais dessa análise e que se prendem com a resolução conceptual e com a exploração didáctica em sala de aula do problema *A venda do trigo* (Anexo 10). Esses aspectos foram tidos em conta na elaboração da análise aqui apresentada.

[141] Cerca de um ano após a conclusão do PF foi facultada a Joana a análise feita pela investigadora e solicitada a sua opinião sobre a mesma (Anexo 10).

Quadro 4.1. Síntese das características de Joana em relação às dimensões de análise

Dimensões/categorias		Características
Resolução de Problemas	Desempenho global	Aplica os conhecimentos matemáticos necessários à obtenção da solução. Dificuldades de manipulação das relações entre as antigas unidades. Resolução nem sempre acompanhada da justificação dos procedimentos adoptados. Não verifica a solução nem a sua adequação ao problema.
Prática Pedagógica	Perspectivas de ensino e aprendizagem da matemática	Destaca tarefas que envolvam pensamento, exploração e descoberta. Acredita que saber e compreender o que se ensina é fundamental para a promoção da aprendizagem. Salienta a importância da motivação para a aprendizagem e o papel dos materiais manipulativos para a compreensão de ideias matemáticas.
	Prática de ensino	Ensino centrado na resolução de problemas, quer como aplicação de conceitos matemáticos, quer para a introdução de novos conceitos. Ênfase na compreensão do problema e na exploração dos conceitos e relações requeridos para a sua resolução. Estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas. Estabelecimento de ligações entre a actividade desenvolvida com materiais e as ideias matemáticas modeladas. Ensino orientado para a compreensão conceptual.
	Reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem	Capacidade de análise crítica das suas acções, identifica aspectos positivos e negativos das estratégias implementadas, retirando daí implicações para a prática futura.
Formação e profissão	Percurso de Formação	Maior consciencialização de questões de natureza didáctica ao nível da selecção das tarefas, da importância de julgar a adequação da tarefa aos alunos em termos do seu nível de desenvolvimento cognitivo e de possíveis dificuldades. Contributo positivo para articulação da história da matemática, da resolução de problemas e de ligações intra e extra matemáticas
	Problemas históricos	Contributo importante para o enriquecimento da cultura matemática do professor e para a sua formação profissional. Motivadores e interessantes para os alunos do ensino básico, representam uma inovação relativamente aos tradicionalmente apresentados em manuais escolares e permitem o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos.
	História da matemática	Contributo importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico Permite mostrar aos alunos que desde sempre a matemática foi necessária e que esteve presente em todas as áreas. Recurso didáctico importante, se bem utilizada e explorada.
	Conexões	A exploração do contexto dos problemas é favorável ao estabelecimento de ligações entre a matemática e outras áreas curriculares e com o quotidiano.
	Relacionamento com o curso e com a profissão	Marcada pela inquietação relativamente às possibilidades de vir a exercer a profissão futuro, nunca deixa que isso interfira na alegria e empenhamento que põe em tudo o que faz. Manifesta um grau de satisfação elevado com o curso, mas sugere alterações ao nível das metodologias. É às disciplinas de Prática Pedagógica que atribui a maior relevância em termos de preparação didáctica.

4.3. Inês

A Inês tem estatura média, cabelos lisos e compridos, aspecto cuidado e sorriso fácil. É uma das alunas mais jovens da turma e destaca-se pela vivacidade, pelas intervenções constantes e pelo espírito crítico. Aparentando uma grande segurança em si própria, nas suas crenças e conhecimentos, raramente aceita uma sugestão sem a discutir ou, mesmo, a tentar rebater. Frequenta um curso que nem sequer considerou na sua primeira candidatura ao ensino superior. Tal como a maioria das alunas da turma, candidatou-se, em primeira opção, para o curso de Enfermagem, para o qual a sua nota de candidatura se mostrou insuficiente. Acabou por ingressar e matricular-se na sua segunda opção, o curso de Engenharia Informática e das Tecnologias de Informação, a funcionar noutra escola do Instituto Politécnico que frequenta. No final do primeiro ano, decepcionada com o curso, pediu transferência para o Curso de Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática /Ciências da Natureza por "desde pequena sentir uma inclinação para o ensino" nos primeiros anos de escolaridade, "principalmente no 1º ciclo". O facto de, como aluna, ter "gostado muito" do 2º CEB terá contribuído para a escolha de um curso de formação de professores que lhe confere habilitação profissional para a docência no 1º ciclo e para a leccionação das disciplinas de Matemática e Ciências da Natureza no 2º ciclo do Ensino Básico (QT1, 11/06/05).

Inquirida relativamente ao seu percurso escolar, Inês considerou-se, no ensino básico, uma aluna de nível bom, "sem dificuldades de maior a qualquer disciplina", o que se reflectia "nas notas, de um modo geral boas" (QT1, 11/06/05). É na transição do ensino básico para o ensino secundário que recorda algumas dificuldades em matemática, que associa à maior exigência da escola e ao carácter mais abstracto da disciplina, e que foram ultrapassadas através de estudo regular e com o apoio de um explicador "onde resolvia exercícios" (QT1, 11/06/05). No ensino superior, no qual considera ter alcançado globalmente um nível de bom, destaca o papel que a frequência voluntária e regular das aulas e a realização de todas as tarefas propostas desempenharam para o sucesso conseguido e a conclusão da licenciatura nos quatro anos curriculares. Referindo-se à componente de formação em matemática, Inês situou-se num patamar mais baixo, isto é, num nível médio, baseando essa percepção nas notas finais obtidas e na maior dificuldade de algumas dessas disciplinas relativamente a outras do currículo. Foi o que aconteceu com a disciplina de Análise Infinitesimal relativamente à qual recorda: "Eu não gostei muito de Análise. Tive imensa dificuldade em fazer a disciplina, porque eu não … achei piada nenhuma à disciplina. Pronto. Para mim foi um bicho de sete cabeças, foi a coisa mais difícil que tive cá para fazer. Para mim, aquilo foi uma disciplina que fiz e acabou" (ENT2, 27/06/06). Esta dificuldade parece também ser fruto da falta de gosto e interesse que começa a sentir logo a partir do ensino básico no tema funções. Referindo-se a isso, Inês afirma: "É uma área que não gosto muito e talvez por isso tenha havido maior desinteresse da minha parte, o que conduziu a maiores dificuldades" (QT1, 11/06/05).

4.3.1. Resolução de problemas históricos - Desempenho global

Como já foi referido, a resolução de problemas históricos constituiu o eixo organizador do Percurso de Formação delineado e desenvolvido a dois níveis. Um deles relativo à resolução de problemas e o outro à exploração didáctica dos problemas em sala de aula e em ambiente não formal, pelas futuras professoras.

A análise do desempenho global de Inês, enquanto resolvedora de problemas, está subdividida em duas subcategorias, resolução conceptual e resolução manipulativa, relativas, respectivamente, à resolução conceptual dos problemas propostos nos seminários de Geometria e à resolução manipulativa delineada para os problemas incluídos no módulo da Exposição Interactiva. Dado que, em ambas as situações, as futuras professoras trabalharam em pequenos grupos, a análise reflecte, necessariamente, essa realidade. Contudo, em ambas as situações, a investigadora teve um papel de observadora participante, o que lhe permitiu aperceber-se melhor do desempenho individual, que foi registando em notas de campo (NC).

Resolução conceptual

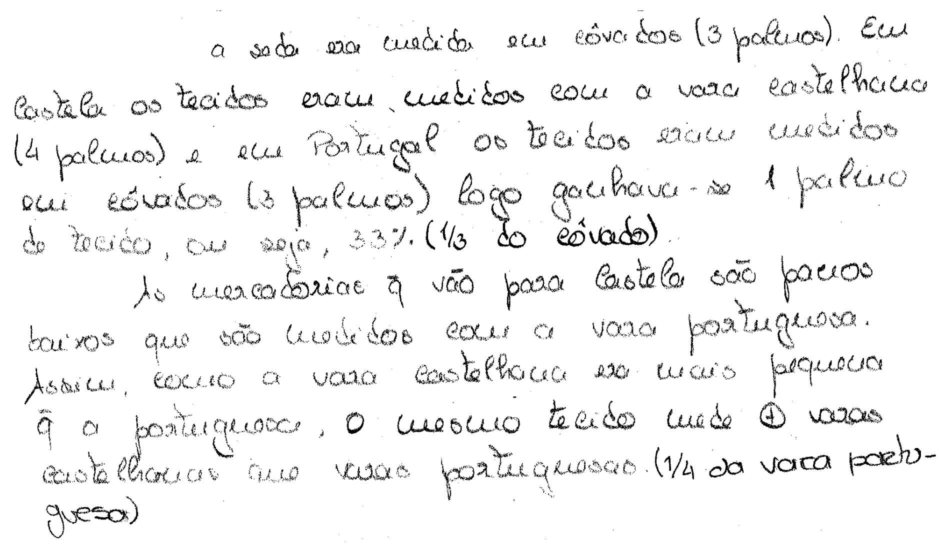
Nos seminários, Inês trabalhou sempre integrada num grupo de três elementos e evidenciou sempre confiança e autonomia na realização das tarefas, colaborando e discutindo com as colegas ideias e abordagens possíveis aos problemas (NC). Na opinião que expressa sobre essa actividade, na primeira entrevista, confirma a atitude demonstrada em todas as sessões: "Eu gosto, eu gosto muito dessas coisas … A sério, gosto muito" (ET1, 21/6/05).

Na análise do seu desempenho na resolução dos problemas propostos em Geometria (Anexo 6) são tidas em consideração as resoluções escritas, bem como as notas de campo tomadas pela investigadora. Dada a dimensão reduzida da turma e o facto de as alunas, futuras professoras, trabalharem em três pequenos grupos (dois deles formados por duas e o outro por três alunas), a análise de desempenho incide sobre a qualidade das resoluções apresentadas por escrito, nomeadamente sobre a organização e explicitação do processo da resolução e solução e, ainda, sobre as justificações apresentadas.

Das futuras professoras em estudo, Inês destacou-se desde o início ao nível da escolha das estratégias possíveis de resolução e/ou da percepção dos cálculos a efectuar, bem como na forma como expressa e argumenta os seus pontos de vista (NC). As resoluções escritas dos problemas reforçam essa percepção da investigadora.

Por exemplo, no problema da *Transacção de panos entre Portugal e Castela*, Inês é a que apresenta uma solução mais completa e mais explícita, revelando o entendimento do propósito da tarefa, um raciocínio correcto sobre os dados e ainda a compreensão das ideias matemáticas e exploração de diferentes representações dessas ideias (figura 4.11), como se pode comprovar pela interpretação que propõe para o lucro obtido pelo mercador em qualquer uma das transacções referidas no problema.

Figura 4.11. Solução do problema *Transacção de panos entre Portugal e Castela*, apresentada por Inês

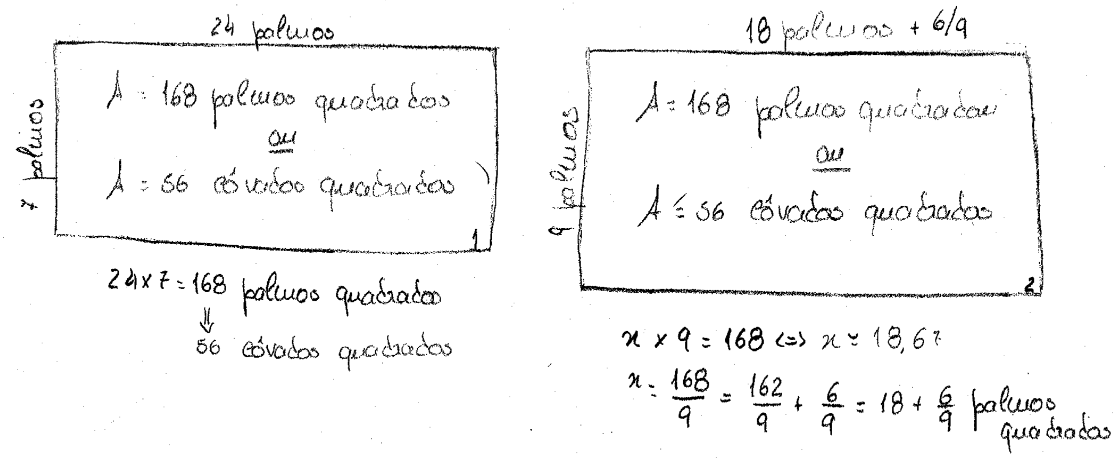

A seda era medida em côvados (3 palmos). Em Castela os tecidos eram medidos com a vara castelhana (4 palmos) e em Portugal os tecidos eram medidos em côvados (3 palmos) logo ganhava-se 1 palmo do tecido, ou seja, 33%. (1/3 do côvado).

As mercadorias q vão para Castela são panos baixos que são medidos com a vara portuguesa. Assim, como a vara castelhana era mais pequena q a portuguesa, o mesmo tecido mede 1 varas castelhanas em varas portuguesas. (1/4 da vara portuguesa)

Acresce ainda dizer que a resolução dos problemas é apresentada sempre de uma forma muito organizada e que Inês consegue finalizar todas as tarefas com sucesso, ainda que por vezes cometa algumas imprecisões de linguagem ou erros conceptuais esporádicos no decorrer da resolução. Esta forma de proceder parece ser um indicador de que as acções executadas são fruto de uma percepção prévia do que fazer para dar resposta à questão do problema.

É o que acontece no primeiro problema proposto envolvendo antigas unidades de área, o problema *O vestido*. Podemos observar na figura 4.12 que a resolução é acompanhada de uma representação rectangular dos panos, que parece ter sido feita como apoio à resolução e também com a finalidade de verificar a solução encontrada. Embora a resolução não o explicite por palavras, Inês parte da suposição de que, para que seja possível confeccionar o segundo vestido, os dois panos devem ter a mesma área. De facto, calcula a área do primeiro pano, exprime o comprimento do segundo pano por x e iguala as duas áreas.

Figura 4.12. Representação figurativa da solução do problema *O vestido,* apresentada por Inês



Note-se que Inês regista nas figuras a área dos dois panos expressa em palmos quadrados e acrescenta, incorrectamente, a medida da mesma área em côvados quadrados. Tudo indica que faz a redução fazendo uso da razão entre as duas unidades de comprimento e não da razão entre as respectivas unidades derivadas de área. Esta incorrecção não tem, porém, qualquer reflexo na solução apresentada, que é apresentada de forma correcta: (Figura 4.13): “No segundo pano temos mais 2 palmos de tecido de largura, logo no comprimento precisamos de 18 palmos e 2/3, ou seja, 6 côvados e 2/3 de palmo” (Inês, 14/01/06).

Figura 4.13. Resposta da Inês ao problema *O vestido*

Côvado - 3 palmos

8 côvados = 24 palmos

1º vestido: 8 côvados (comprimento) × 7 palmos (largura)

2º vestido: 7 côvados e 1 palmo (comprimento) × 9 palmos (largura)

No 2º pano temos mais 2 palmos de tecido de largura logo no comprimento precisamos de 18 palmos e 2/3, ou seja, 6 côvados e 2/3 de palmos.

Nos problemas relativos à construção de paredes, Inês manipula com destreza as relações entre antigas unidades de comprimento, optando, nesses problemas, por exprimir os comprimentos nas unidades mais adequadas ao cálculo de áreas/ou volumes (Figura 4.14). É, do grupo das futuras professoras em estudo, aquela que evidencia uma maior capacidade de raciocínio a esse nível.

Figura 4.14. Resolução do problema *A área de uma parede*[142], apresentada por Inês

1 braça^2 = 600 reais

1 vara = 5 palmos

20 varas = 100 palmos

3 varas = 15 palmos

100 palmos = $\frac{100}{10}$ = 10 braças

15 palmos = $\frac{15}{10}$ braças

4 palmos = $\frac{4}{10}$ braças

1 palmo = $\frac{1}{10}$ de braça

$$A = (10 + 4/10) \times \frac{15}{10} = \frac{104}{10} \times \frac{15}{10} = \frac{1560}{100} = 15,6 \text{ braças}^2$$

15,6 × 600 = 9360 reais

Em suma, Inês mostra uma atitude muito positiva e favorável à realização de actividades de resolução de problemas e evidencia possuir competências de resolução de

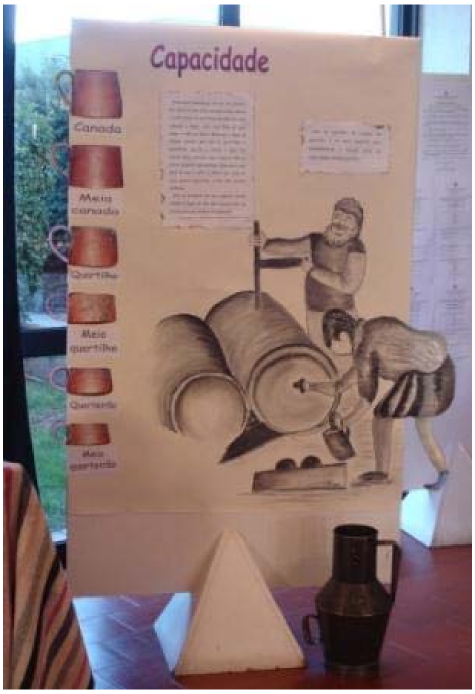
[142] Um homem manda fazer uma parede e levam-lhe 600 reai s por braça quadrada. Ora esta parede tem de comprido 20 varas e 4 palmos e de altura tem 3 varas. Pergunto: quanto levam a este homem pela parede? (Adaptado de Gaspar Nicolas, 1519, fol. 92).

problemas e de raciocínio. Embora nem sempre apresente justificações detalhadas do processo de resolução, a resolução apresentada, bem como as discussões mantidas com as suas colegas nos seminários, mostraram que os registos e os cálculos que apresenta por escrito são fruto da compreensão da situação exposta e do raciocínio sobre a mesma (NC).

Resolução manipulativa

Entende-se por resolução manipulativa o planeamento e desenvolvimento de materiais para a resolução manipulativa de problemas históricos, bem como a orientação das crianças no processo de resolução dos problemas que Inês e a sua colega de grupo, Mariana, desenvolveram na Exposição Interactiva, no âmbito do módulo "Capacidade". Na figura 4.15 apresenta-se uma imagem do cartaz de apresentação deste módulo.

Figura 4.15. Cartaz de apresentação do módulo "Capacidade" da Exposição Interactiva



A primeira tarefa do módulo envolve a comparação das capacidades de diferentes recipientes e a segunda a medição de um determinado volume, usando para o efeito três recipientes de diferentes capacidades (Anexo 5). Para a resolução da primeira, são usados como materiais copos de alumínio com capacidades equivalentes à *canada*, *meia-canada* e *quartilho* e, ainda, uma jarra com água. Deste modo, a resolução manipulativa da tarefa consiste em determinar a relação entre as capacidades dos vários recipientes, enchendo de água um deles e vertendo essa água para o outro, tantas vezes quantas as necessárias para exprimir numericamente essa relação.

Dado que a Exposição se destinava a crianças dos 3º ao 6º anos de escolaridade, Inês e Mariana optaram por orientar os alunos para uma relação entre as medidas expressa através de números inteiros, como se pode comprovar no painel que construíram com essa finalidade (Figura 4.16). Poderiam, porém, se o desejassem, orientar os alunos do 2º CEB para o estabelecimento de uma relação fraccionária. Porém, não o fizeram (NC). Na opinião de Inês, todos os alunos realizaram com muito entusiasmo e sem dificuldade esta tarefa.

Figura 4.16. Painel para registo da relação entre as capacidades da *canada*, *meia-canada* e *quartilho*

O mesmo não aconteceu com a segunda tarefa que se afigurou, na opinião de Inês, particularmente difícil para os alunos do 1º CEB e, também, para muitos de 2º CEB (Figura 4.17).

Figura 4.17. O problema *Medir volumes com cabaças*

Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 canadas de vinho numa cabaça e outro levava 8 canadas de vinho em duas cabaças, cinco canadas de vinho numa e três na outra. Beberam o vinho da cabaça grande que tem 8 canadas e querem se separar e dividir o vinho das outras duas cabaças, cinco numa e três na outra. Querem que nenhum deles leve mais vinho do que o outro, ou seja que cada um leve 4 canadas e não têm medidas nenhumas. Ora eu pergunto de que maneira devem cambar o vinho de uma das cabaças para as outras para que nenhum vá enganado.

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 51v)

Esta tarefa, ao requer a medição de um volume de quatro quartilhos usando apenas recipientes com as capacidades de 3, 5 e 8 quartilhos, envolve sucessivas mudanças de água de um recipiente para outro. Embora tivessem consciência de que a realização da actividade, ao envolver muitas trocas, podia ser um obstáculo (NC), as dificuldades reveladas pelas crianças mostram que Inês e Mariana não as tiveram em conta quando planificaram o módulo, encontrando possíveis estratégias para ajudar os alunos a contorná-las (por exemplo, uma tabela com uma representação das três cabaças em que as crianças pudessem fazer o registo das mudanças já feitas). Identificada a dificuldade, substitui-se a segunda tarefa por outra do mesmo tipo, mas mais simples. Porém, na opinião de Inês, a tarefa também apresenta algumas dificuldades para os alunos do 2º CEB:

> I (Inv) - Acharam que o segundo problema era difícil?
> Inês - O inicial?
> Inv -Sim, o inicial.
> Mariana - Aquilo tinha muitas maneiras de resolver.
> Inês - Tinha. Na minha opinião ... não sei … mas para 1º ciclo era muito complicado. Para o 2º ciclo não. Tanto que houve miúdos … quando trouxemos cá os da nossa turma que nós sabíamos quem é que era capaz de fazer, houve um ou dois grupos que eu disse à Sílvia, era a Sílvia que lá estava[143]: «Diz–lhes para fazerem aquilo, porque eles conseguem fazer». Outros não.
> I - E conseguiram?
> Inês - Conseguiram. Por exemplo, o grupo do Tiago e da Ana foi o primeiro grupo logo que esteve lá. Eu quando os vi lá, falei, disse à Sílvia: «manda fazer também aquele, porque eles sabem fazer». E conseguiram fazer. Agora houve outros que eu acho que não eram capazes … (…)
> Mesmo … houve alunos da nossa turma que não fizeram. Fizeram só aqueles que nós sabíamos à partida que eles já saberiam fazer. Pronto nós sabíamos que eles…
> (ST, 23/02/06)

A afirmação de que a tarefa tem várias soluções, feita por Mariana e corroborada por Inês, parece ser encarada como uma dificuldade à sua abordagem didáctica. Destaca-se também que Inês faz juízos de valor sobre as capacidades cognitivas dos seus alunos e que isso influencia, à priori, a decisão de propor ou não a resolução da tarefa a certos alunos. Do diálogo anterior transparece que, pelo menos, relativamente aos alunos da turma em que faz estágio é ela própria que selecciona as tarefas a propor, não dando, desse modo, a oportunidade aos alunos de se envolverem na realização das mesmas actividades realizadas pelos colegas. Ou seja, as questões e os problemas que propõe aos alunos parecem ser condicionadas pelas crenças que possui sobre o que os alunos conseguem fazer.

[143] Na tentativa de conciliar a orientação dos alunos na exposição e o estágio, as futuras professoras organizaram um sistema rotativo de presença na exposição.

Neste contexto, o seu papel enquanto orientadora da actividade dos alunos é considerado determinante para a obtenção da solução, pois Inês reconhece que a segunda tarefa, ao exigir um número relativamente elevado de mudanças da água de um recipiente para outro, conduzia os alunos a uma certa tendência em voltar atrás, não conseguindo, sem o seu apoio, um modo de resolver o problema:

Inv - Que tipo de orientação é que vocês lhes davam nesse problema, em concreto?
Inês - Nesse? Íamos dando pistas: «Então pensem lá, se fizéssemos antes assim como é que ficava?» Porque eles tinham muita tendência de voltar atrás
Inv - Mas houve quem resolvesse sem qualquer pista?
(…)
Inês - Enquanto eu lá estive também não. Mesmo os nossos de 6º ano não. E os de Alcains também não. (…) Havia sempre um ponto em que nós tínhamos que dizer: «então pensem lá»; porque senão voltavam atrás outra vez. Nós dizíamos: «Então se fazes assim, voltas atrás, ficas na mesma. Então, achas que vale a pena?» (ST, 23/02/06).

A avaliação de Inês relativamente à adequação das tarefas propostas em cada módulo ao nível de escolaridade dos alunos relaciona-se com o nível de exigência das tarefas propostas. Assim, em sua opinião, atribui uma maior adequação ao 1º CEB, das tarefas dos módulos do comprimento e da massa (as únicas em que teve intervenções esporádicas, para além da sua), sendo as tarefas do dinheiro, do volume e da capacidade mais adequadas ao 2ºCEB, por serem mais difíceis e conceptualmente mais exigentes (ST, 23/02/06).

4.3.2. Prática pedagógica

4.3.2.1. Perspectivas sobre o ensino e aprendizagem da matemática

Será com base nos questionários, entrevistas e registos das sessões de trabalho que procuraremos caracterizar as perspectivas de Inês relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática, tendo sempre presente que se trata de uma futura professora inserida num processo de formação em que se encontram envolvidos, na sua orientação e acompanhamento da Prática Pedagógica, pelo menos dois professores, o professor supervisor e o professor cooperante (este último, também responsável pela turma na qual se realiza a prática pedagógica /estágio.

Sempre que se refere à matemática, o primeiro aspecto que sobressai no discurso de Inês é a valorização das aplicações no dia-a-dia como a característica fundamental da disciplina. “Considero a matemática muito útil no nosso quotidiano. No fundo, tudo tem um pouco de matemática, o segredo é descobrir” (QT2, 20/06/06). E é precisamente nessa aplicabilidade que Inês sustenta o gosto e o interesse que sempre sentiu pela matemática ao longo de toda a escolaridade e justifica o porquê desse gosto, mesmo num período em que enfrenta algumas dificuldades: “Apesar da matemática leccionada no secundário ser mais abstracta, continua a encontrar-se a sua utilização no quotidiano” (QT1, 11/06/05). Saliente-se, porém, que Inês parece referir-se sempre à matemática escolar e não à matemática enquanto ciência e, nesse sentido, não é de estranhar que os resultados das avaliações sejam aspectos que têm implicações no maior ou menor envolvimento que sente relativamente à disciplina: “Sempre gostei de matemática até que no 10º ano me deparei com (…) o decréscimo de notas. (…) Mas no ano seguinte superei as dificuldades e melhorei as notas, o que fez renascer o gosto pela matemática” (QT2, 20/06/06).

<u>Resolução de problemas</u>

Em concordância com essa visão da matemática, Inês defende que as crianças têm de perceber que ”a matemática faz parte do seu dia-a-dia” (QT1, 11/06/05). Assim, em sua opinião, os problemas que traduzem situações próximas do quotidiano dos alunos são os que têm mais potencialidade de envolver e motivar os alunos para a sua resolução. Valoriza, assim, a necessidade de dar a conhecer aos alunos exemplos concretos de aplicações da matemática no quotidiano como uma forma de desmistificar a crença de que é difícil e inacessível para muitos e, também, transmitir a necessidade de se aprender matemática:

> A matemática aplica-se todos os dias, mesmo quando nós não damos conta. Eu acho que as crianças têm de perceber isso. A matemática faz parte do dia-a-dia delas, sem ser … assim, nada do outro mundo. (…) Nós crescemos a ouvir dizer que a matemática é difícil e elas têm de perceber que a matemática está presente no dia-a-dia delas. (ET1, 21/06/05)

Nesse sentido, afirma que gosta muito de propor aos seus alunos situações que apelida de problemáticas, sobretudo “daquelas assim complicadas, que os levem a pensar” (ET1, 21/06/05). Referindo-se à prática de ensino concretizada no 1º CEB afirma:

> Tentámos transmitir-lhes exemplos concretos de situações que nós encontramos todos os dias e em que não nos damos conta que a matemática está lá. Isso para mim é importante, porque são crianças e vão ser adultos e, se calhar, assim, vão ter uma ideia um bocadinho diferente do que é a matemática (ET1, 21/06/05).

Porém, a análise da prática de ensino no 1º CEB revela que as situações "problemáticas" que propõe aos alunos se podem enquadrar genericamente na categoria de "problemas de palavras" e que, por vezes, expõem situações que pouco têm de real, servindo apenas de contexto para prática de procedimentos. Um bom exemplo são as situações propostas na aula e destacadas por Inês como clarificadoras do que quer dizer quando se refere a situações problemáticas:

> Pedi-lhes que me ajudassem[144] (…) tinha estado a discutir com uma amiga minha porque a minha casa tinha uma determinada área em metros quadrados e a dela tinha noutra unidade, em decímetros quadrados. Eles tinham de ver qual era maior. Nas unidades de capacidade, sei que eram dois tanques (…) um com uma capacidade… por exemplo três hectolitros e o outro em decímetros cúbicos ou metros cúbicos. (ET, 21/06/05)

Nos dois exemplos referidos por Inês, o que se pretende é apenas a realização de reduções entre unidade de medida, a escrita convencionada da respectiva unidade e a comparação das duas medidas. Esse facto sugere uma concepção de "problema aplicado" muito próxima dos chamados "problemas de palavras", cuja resolução se resume à realização de dois ou três passos que transparecem de forma imediata da respectiva leitura.

Na transcrição seguinte, em que se refere a uma experiência de leccionação, no 1º CEB, de uma aula referente à construção de figuras geométricas com régua e compasso note-se como Inês sente a necessidade de introduzir na aula a componente de cálculo, o que indicia uma visão da matemática muito ligada ao cálculo:

> Não gostei. Acho que é uma matéria muito "sem sal". Não gosto. Gosto mais de coisas que envolvam cálculos e aquele conteúdo não envolvia. Fiz uma ficha inteira e para fazerem alguns cálculos tive de pôr lá para calcularem a área de um quadrado e de um rectângulo, que eles já tinham dado. (ET, 21/06/05)

Embora reconheça que os alunos se mostraram muito envolvidos na realização das actividades de construção e medição propostas e admita que esse aspecto é fundamental para a motivação do professor, das suas palavras depreende-se uma ligação mais forte aos conteúdos matemáticos com cálculo que se manifesta no desinteresse pela leccionação de tópicos de geometria. Esta visão da matemática é apoiada pelas suas preferências, enquanto aluna, por temas e disciplinas com forte componente de cálculo, tais como estatística, probabilidades ou certos tópicos de álgebra (QT1, 11/06/06; QT2, 20/06/06).

[144] Inês acredita que introduzir os problemas através de um pedido de ajuda é uma estratégia que funciona como motivação para o envolvimento dos alunos na sua resolução.

Conteúdo matemático / Conexões

Inês tem plena consciência da existência de conexões entre diferentes tópicos matemáticos e da matemática com outras áreas e o quotidiano e valoriza essas conexões como uma característica da matemática a que o ensino deve atender: “as conexões são muito importantes numa disciplina como a matemática, pois tudo está interligado (…) o perceber que as coisas estão relacionadas entre si (…) torna a compreensão mais fácil” (ET2, 27/06/06). Contudo, a forma como perspectiva a abordagem dos conteúdos ao longo da sua prática de ensino parece ser marcada pela visão oposta, isto é, por uma visão em que os vários conteúdos são encarados como peças isoladas do conhecimento matemático. Essa tendência de encarar a matemática como um conjunto de factos, regras e procedimentos isolados manifesta-se ao longo de todo o período em que a investigadora acompanhou Inês. Em várias sessões de trabalho, afirma que os conteúdos que vai leccionar pouco têm a ver com os leccionados pelas suas colegas de estágio. Também na entrevista realizada no final do 1º ano do estudo, questionada sobre a escassa interligação dos conteúdos leccionados em matemática pelos vários elementos do seu grupo de prática pedagógica, começa por afirmar peremptoriamente: “O que eu dei não teve nada a ver com as semanas das outras todas” (ET1, 21/06/05), e acrescenta, reflectindo sobre a sua prática e das colegas: “Acontece muitas vezes, nós damos uma coisa e guardamos na prateleira. Já não é precisa e não voltamos a pegar” (ET1, 21/06/05).

Certas intervenções de Inês apontam também para uma perspectiva de aprendizagem por repetição e mecanização: “acho que é melhor nós fazermos várias vezes a mesma coisa, para ver se eles aprendem, para ver se melhoram” (ST, 19/12/05), embora depois admita que não se obtiveram os resultados esperados.

Na planificação das aulas de 2º CEB, a avaliação é uma preocupação central, sobretudo, a avaliação das aprendizagens através do teste escrito. Apesar de perceber que as estratégias de ensino utilizadas não produziram aprendizagem, “nós andamos ali e vemos que alguns sabem e percebem e outros …” (ST, 19/12/05), o teste escrito é o momento chave da avaliação das aprendizagens, ”quando fizermos o teste logo vemos” (ST, 19/12/05). Aliás, tanto Inês, como a colega de estágio, Mariana, evidenciam, ao longo do estudo, uma grande preocupação em dar os conteúdos que vão ser avaliados no teste formal, como se pode comprovar no seguinte excerto de uma sessão de trabalho em que

Inês expõe a sua planificação: "vou dar a subtracção de fracções (…) depois vou dar expressões numéricas porque eles vão fazer teste" (ST, 25/11/05).

Esta associação da avaliação das aprendizagens aos testes escritos está bem patente numa sessão de trabalho em que Inês, reconhecendo que a abordagem ao conceito de numeral misto (da responsabilidade de Mariana) não produziu aprendizagem, "Foi muito complicado. E eles ainda não sabem" (ST, 25/12/05), recusa retomar este conceito na "sua" semana[145]. Muito centrada no conteúdo que "tem" de leccionar, apenas admite retomar o conceito na aula de "revisão" para o teste, mas apenas porque a sua aprendizagem vai ser objecto de avaliação:

> Vou dar a subtracção de fracções, porque eles vão fazer teste e temos de a dar (…) não tenho tempo para fazer isso tudo. (…) Vamos fazer revisão para o teste e no teste vão sair numerais mistos (…) Portanto (…) vai haver uma situação em que vai aparecer o numeral misto. (ST, 25/11/05).

A desvalorização da importância de certos conteúdos também sobressai no discurso de Inês. Referindo-se à abordagem que planeia fazer em relação às propriedades da adição de números racionais, desvaloriza a sua importância e, como tal, planeia fazê-lo apenas na aula de "revisão" para o teste (e imediatamente anterior a este) e justifica:

> Vem para o teste … também é uma coisa que não é nada de especial (…) é uma coisa que nós não precisamos para resolver um problema (…) Além disso, eles já deram as propriedades da adição de números inteiros. É a mesma coisa. (ST, 25/11/05).

Parece, pois, poder concluir-se das palavras de Inês que esta não reconhece às propriedades da adição de números racionais nenhuma utilidade em termos de processo de resolução de um problema, nem sequer a um nível mais prático, como o do cálculo mental ou da estimação do valor de uma soma. Ou seja, trata-se de um conteúdo "básico" que planeia leccionar apenas porque tem de ser avaliado.

Inês mostra possuir convicções muito marcadas sobre os métodos de ensino mais eficazes para ensinar matemática. Por exemplo, referindo-se à turma em que realiza Prática Pedagógica no 2º CEB, afirma que a melhor maneira de chegar àqueles alunos "é através da exposição da matéria no início da aula" (ST, 25/11/05). Ainda que clarifique que não quer dizer que é ela a expor, mas sim que são os alunos, através de fichas de trabalho, previamente preparadas, que realizam actividades, tiram conclusões e as escrevem no

[145] Inês e Marina alternam semanalmente a docência da disciplina de Matemática.

caderno: "Por exemplo, quando eu dei a adição, não lhes disse nada. Eles é que fizeram, tiraram as conclusões e registaram-nas no caderno. A seguir, realizaram outra actividade … registaram" (ST, 25/11/05). A planificação de fichas de trabalho foi uma tendência que acompanhou Inês desde a primeira experiência de ensino no 1º CEB, mas que se tornou mais evidente na prática no 2ºCEB. De um modo geral, Inês planeia essas fichas, ora para introduzir um assunto novo, ora como aplicação de procedimentos, mas incluindo sempre problemas, ainda que alguns sejam problemas de palavras. Embora esta opção possa ser encarada como uma forma que Inês encontrou para manter os alunos ocupados e, simultaneamente, poder acompanhar e apoiar alunos com diferentes ritmos de aprendizagem, tem consciência que se trata de uma estratégia que parece cansar os alunos, "Na última meia hora, nós nunca podemos fazer nem ficha de trabalho, nem correcção de nada" (ST, 25/11/05), e também a ela própria, "O Professor Cooperante disse-me para fazer uma ficha de trabalho. Mas aquilo é uma seca; coitados dos miúdos, só fazerem uma ficha de trabalho" (ST, 16/02/06). Por se tratar de uma turma que em termos globais apresenta um baixo aproveitamento em matemática e em que muitos alunos revelam pouco interesse pelas tarefas propostas, Inês mostra-se sempre muito receptiva aos problemas históricos delineados no PF, sobretudo aos problemas que traduzem aplicações da matemática.

4.3.2.2. Prática de ensino

Relativamente à PP no 2º CEB, o primeiro episódio de aula analisado refere-se à exploração do problema *O Quarto e Vintena*. Inês propõe o problema aos seus alunos de 6º ano de escolaridade, inserido no tópico curricular "Multiplicação de números racionais", no início do 2º período (13/01/06) como a primeira tarefa dessa aula. Nessa mesma aula, propõe mais dois problemas históricos, um deles envolvendo a repartição de uma dada quantia em dinheiro por quatro pobres e o outro referente ao pagamento da maquia nos lagares tradicionais da Beira.

No âmbito da divisão de números racionais, Inês planifica e explora um problema integrado no módulo "Volume" da Exposição Interactiva. Os alunos de Inês visitaram a Exposição e aí tiveram oportunidade de resolver o problema da *Venda do trigo*, manipulativamente, fazendo agrupamentos e contando o número de grupos formados.

A última aula analisada incide sobre a exploração didáctica de uma tarefa inserida no âmbito da Proporcionalidade e que envolve a comparação das quebras sofridas por dois carregamentos de pimenta e gengibre.

Ambiente de sala de aula

A turma de 6º ano de escolaridade em que Inês realiza o estágio é muito heterogénea, com um aluno de nível muito bom, alguns de nível bom e um número considerável de alunos com falta de hábitos de trabalho. "Eles têm muitas dificuldades. (…) é um desespero nós irmos dar as notas e metade da turma ter negativa (…) São 21. Não sei quantas negativas há, mas acho que são 11. É mais de 50%" (ST, 19/12/05). Aliado a este baixo nível de aproveitamento, observa-se o desinteresse, por vezes, mesmo indiferença, de alguns alunos pelo que se passa na aula. Mesmo quando incentivados, rapidamente se deixam vencer pela apatia, talvez por não conseguirem realmente acompanhar o que se está a tratar na aula ou por desinteresse pela própria escola. Esta maneira de estar é uma constante em todas as aulas que a investigadora observou e é reconhecida pelas duas futuras professoras e pelo professor cooperante como habitual (NC).

O primeiro aspecto que sobressai na prática de ensino de Inês é a calma, a serenidade, a forma educada com que lida com os alunos, apenas elevando o tom de voz quando a agitação e o barulho causado por conversas cruzadas começa a sobressair na aula. Sempre atenta ao que se passa, circula regularmente entre os alunos, supervisiona as actividades realizadas, os registos efectuados e consegue com essa postura criar um ambiente envolvente e agradável.

Situações imprevistas são também facilmente resolvidas por Inês que consegue ultrapassá-los sem gerar qualquer agitação ou sobressalto na sala. Desse à vontade pedagógico, é exemplo a forma como, numa aula em que planeia introduzir um problema histórico a partir da apresentação e diálogo sobre um conjunto de imagens alusivas à época histórica a que o problema reporta[146], ocorre uma avaria técnica que inviabiliza a projecção das imagens. De forma imediata, Inês ultrapassa a dificuldade, começando por focar a

[146] Período dos descobrimentos. Incluía imagens de naus e caravelas, do Terreiro do Paço, etc.

atenção dos alunos nas imagens projectadas no ecrã do seu computador, gerando a partir daí a discussão dos aspectos planeados.

Apesar de Inês criar um ambiente de sala de aula que estimula o aluno a trabalhar autonomamente, percebe-se que estes estão habituados a chamar a professora para que esta valide o que estão a fazer. Nesse papel, Inês assume, por vezes, uma postura muito prescritiva, pois embora procure através do questionamento orientar os alunos, quando não consegue obter as repostas esperadas, é ela própria que vai sugerindo os passos a seguir:

> I (Inês) - O que é que vocês vão ter que fazer? Desses 64 quintais, primeiro o que é que têm de tirar?
> A (Aluno) - Um quarto.
> I - Um quarto é o imposto chamado Quarto. E depois?
> A - Um vinte avos.
> I - Um vinte avos do quê?
> [intervenções de vários alunos que revelam que não percebem a questão, senão mesmo o problema]
> I - Ou do que sobrou?
> A - Do que sobrou, porque nós tirámos um quarto.
> [Inês dirige-se a outro aluno, observa o que este está a fazer]
> I - É assim como estás a fazer, essa está bem. (aula, 13/01/06)

Do discurso de Inês ressalta também a tendência de formular as perguntas aos alunos de forma fechada, isto é, usando frases que os alunos devem terminar com uma ou duas palavras. Talvez pela natureza da turma, raramente promove a discussão de ideias entre os alunos, agindo sempre como intermediária no discurso em sala de aula. Embora ouça com atenção o que os alunos dizem, manifesta algumas dificuldades em pôr à consideração da turma o que foi dito por um determinado aluno.

<u>Exploração do contexto dos problemas</u>

Como metodologia de trabalho Inês começa sempre por pedir a um ou mais alunos que leiam o texto introdutório dos problemas, interrompendo a leitura sempre que surgem vocábulos menos comuns e aprofundando o seu significado:

> I (Inês) - Intempéries … quem sabe o que são intempéries? … Ninguém sabe? ... Intempéries naturais …pensem lá o que é que será … Diz, Ricardo.
> A (aluno) - Coisas más.
> I - Coisas más … então se são naturais, o que é que achas que podia acontecer às naus?
> A - Ham … qualquer coisa, por causa da água.
> I - Por exemplo, o mar muito agitado, a chuva, as tempestades. (aula, 05/05/06)

Deste modo, através da leitura e discussão de um texto introdutório, os problemas históricos são integrados no respectivo contexto histórico. Em particular, no problema *O Quarto e Vintena*, o diálogo procura estabelecer ligações com aspectos da história de Portugal já conhecidos dos alunos.

> I (Inês) - Eu tenho aqui … Isto era previsto aparecer em grande aqui [aponta para o ecrã], só que o aparelho não funciona. Portanto, eu vou tentar mostrar-vos aqui [aponta para o monitor do portátil] (…) Conseguem ver o que aparece lá?
> A (Aluno) - Sim, um barco.
> I - Que tipo de barco é?
> A - É uma caravela.
> I - É uma caravela. O que é que as caravelas vos fazem lembrar?
> A - Barcos … as descobertas.
> I - As descobertas! O que é que aconteceu com os portugueses? Foram para o mar fazer as suas descobertas e o que é que traziam dos sítios?
> A - Especiarias.
> I - Por exemplo. Mercadorias. Não é? Traziam as mercadorias nos barcos e depois o que é que acontecia? Os portugueses chegavam cá, chegavam ao porto de Lisboa com os seus barcos carregados e depois alguém sabe o que é que acontecia? Chegavam e a mercadoria ficava toda para eles?
> A - Não [várias vozes].
> (…)
> A - Era para o rei.
> I - Era para o rei. Era toda para o rei? (aula, 13/01/06)

Alguns meses mais tarde, ao propor o problema *A quebra das mercadorias*, Inês estabelece, explicitamente, a ligação entre este e o problema *O Quarto e Vintena*, o que indicia a importância que atribui à contextualização dos problemas históricos:

> I (Inês - Como eu estava a dizer, nós já falámos cá … falámos daquelas naus que vinham com os carregamentos da Índia. Vocês lembram-se de falarmos nisso? Falámos dos impostos que era preciso pagar ao Rei. Vocês ainda se lembram? …Quarto, vintena … já ninguém se recorda? (…) Durante as viagens havia perdas das mercadorias (…) Hoje vamos falar um bocadinho das perdas que as mercadorias sofriam… essas perdas chamavam-se quebras (aula, 05/05/06).

Embora se possa afirmar que estabelece alguma ligação com a disciplina de história, esta poderia ter sido mais aprofundada, tanto mais que Inês frequenta um Curso que a habilita para docência de todas as áreas do 1º CEB, nas quais se insere a história de Portugal[147]. Referimo-nos, por exemplo, no problema *O Quarto e Vintena*, à questão do pagamento de impostos. Sendo provável que, na disciplina de história, os alunos tenham ouvido falar no pagamento de tributos/impostos ao rei, não é de todo claro que alunos de

[147] Acresce ainda que a preferência, manifestada por Inês, pela docência no 1º CEB, deveria torná-la mais sensível às conexões com outras áreas do currículo.

10/11 anos percebam, efectivamente, o que isso significa. Nesse sentido, Inês poderia ter indagado os alunos no sentido de perceber qual o entendimento relativamente ao significado do termo imposto, às razões do pagamento de impostos ao rei, para, a partir daí, clarificar o significado de imposto como uma parte fraccionária da pimenta descarregada, fazendo, desse modo, a ponte entre a história e a matemática. Esse modo de proceder poderia ajudar a compreender o significado matemático dos termos “Quarto” e “Vintena”. Embora Inês questione os alunos sobre o significado desses termos, o diálogo estabelecido não aprofunda por que é que depois de os relacionarem com “quatro” e “vinte”, os alunos concluem referir-se a numerais fraccionários.

> I (Inês) - Na Casa da Índia o que é que acontecia? Eram cobrados uns impostos sobre as mercadorias que eles traziam, sim? O que é que acontece? Era cobrado um imposto que se chamava o quarto e a vintena. O que é que estes nomes vos fazem lembrar?
> A (Aluno) - Quatro e vinte.
> I - Quarto e vintena.
> A - Quatro e vinte.
> I - Quatro e o vinte, mas quê? O que é que vocês acham relativamente às especiarias, que parte das especiarias seria?
> A - Um quarto.
> I - Um quarto, o quarto. E a vintena?
> A – Vinte.
> I - Vinte, quê?
> A – Vinte avos.
> I - Um vinte avos. (aula, 13/01/06)

Essa tendência de lançar uma pergunta à turma e dar a resposta quase logo a seguir, não dando tempo aos alunos para pensarem na pergunta, é uma característica de Inês, que tem também algumas dificuldades em reformular as perguntas feitas, ou seja, em orientar as respostas dos alunos para o que pretende. No excerto transcrito atrás note-se como Inês informa desde logo os alunos que o quarto e a vintena representam partes da carga de pimenta, não explorando as respostas que estes lhe dão de modo a que concluíssem, por si, a ligação entre o imposto e o conceito de fracção (o imposto, em qualquer situação, não é mais do que uma determinada parte de um todo, que, neste caso, corresponde à massa da mercadoria descarregada).

Acrescente-se que, em termos de exploração do contexto dos problemas históricos, Inês, embora não realce de forma explícita o papel da matemática para a resolução de problemas do Homem, consegue implicitamente fazê-lo pela forma como apresenta o problema. Por exemplo, antes de apresentar o problema *O Quarto e Vintena* Inês informa os alunos: “Tenho aqui uma situação para vocês me ajudarem a resolver, para vermos se a parte que era para o rei era muito grande ou não" (aula, 13/01/06), o que está em consonância com a perspectiva de ensino da matemática que defende, centrada em situações que traduzam aplicações da matemática ao quotidiano.

Orientação da actividade de resolução de problemas

Uma vez contextualizada a tarefa, lida e discutida com a turma, nos termos descritos atrás, Inês tem por hábito dar um tempo aos alunos para que releiam o problema e o tentem resolver. Durante esse tempo, circula entre os alunos de modo a acompanhar o que estão a fazer e (re) orientar a resolução. Ainda que o problema tenha sido lido em voz alta e postas algumas questões relativamente a aspectos terminológicos, constata-se que Inês não se assegura de que os alunos compreenderam efectivamente o problema antes de iniciarem a sua resolução e que não os orienta para a percepção prévia dos cálculos a executar. Por exemplo, o diálogo seguinte com um aluno sugere que este se encontra a realizar cálculos, um tanto erraticamente, no sentido em que os cálculos parecem não ser fruto da tradução do problema para uma questão matemática e da compreensão dessa questão:

I (Inês) - Da parte restante. Estou a falar contigo, Raul. Tens os 64, tirámos um quarto, da parte que sobrou vamos retirar a vintena.
A (Aluno) - Então é tudo menos, eu estava a fazer de multiplicar.(aula, 13/01/06)

É curioso notar a contradição entre o desejo manifesto por Inês de que os alunos resolvam autonomamente os problemas e a tentação em ser ela a sugerir os passos a seguir:

I (Inês) - Calma ainda não vamos fazer. Eu quero que vocês tentem fazer por si sós.
A (Aluno) - Eu estou a fazer por mim, stora
I - Mas as tuas colegas ainda não. Como é que nós podemos comparar uma quebra e a outra? …
Se calhar primeiro vamos ter que escrever a quebra que ainda não calculámos .. que é a de …
A - Pimenta.
I - De pimenta. Então vamos calcular essa quebra e depois quero que vocês encontrem uma forma de comparar ... uma com a outra (aula, 05/05/06).

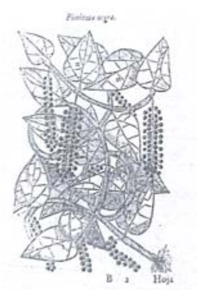
Note-se como Inês, não obtendo resposta imediata à pergunta - "Como é que nós podemos comparar uma quebra e a outra? -, dá de imediato uma pista, quando o desejável era que fossem os alunos por si a estabelecer um plano de resolução. O mesmo acontece, no diálogo seguinte estabelecido com o aluno que está no quadro a resolver o problema *A quebra das mercadorias* (Figura 4.18) e com a turma que Inês vai interpelando:

I (Inês) - Então, aquela razão que o Nuno escreveu ... 33 para 300 o que é que significa …, Sofia?
A (Aluno)- O prejuízo … ham…o prejuízo que ele teve da pimenta e o que embarcou na Índia.
I - A quebra … no fundo … da pimenta, certo? Eu quero que vocês me comparem a quebra .. da pimenta com a do gengibre, para saber qual delas foi maior. Nuno, escreve lá a razão que representa a quebra sofrida na quantidade de gengibre. (…)
Então e agora, será que nos é fácil comparar essas duas razões?
Que é que estás a fazer Nuno?
A - Uma razão equivalente …
I - Porquê? …
Por exemplo, para vocês é fácil olharem para ali, para aquelas razões 33 para 300 e 40 para 400 e dizerem-me qual é que é aquela que sofreu a maior quebra ou aquela que sofreu a menor quebra? …
É fácil dizer.., olhando só assim?
A – Não. (aula, 05/05/06)

Após esta resposta negativa, Inês deveria ter pedido aos alunos que explicassem o porquê dessa resposta, de modo a que estes apreendessem a ideia de que referenciar as duas quebras a massas iguais permite fazer a comparação pretendida. Em vez disso, chama a atenção para o que aluno está a fazer no quadro e, novamente, não aprofunda a resposta obtida à nova questão que põe aos alunos:

I (Inês) - O que é que o Nuno está a fazer? A tentar encontrar …razões equivalentes que nos sejam mais fáceis comparar. A razão de consequente 100 torna-nos mais fácil a comparação.
(…)
Isso. E agora ... já me conseguem dizer em qual delas a quebra foi maior? …Ou não.
A (aluno)- Já.
I - Já? Só assim? ... Em qual é que foi?
A - Foi a de gengibre … ai, a de pimenta.
I - Pimenta, mas para nos facilitar ainda mais, ainda podemos calcular mais. O que é que podemos calcular?
A - Dividir 33 por 300 (aula, 05/05/06).

Figura 4.18. O problema *A quebra de mercadorias*



1. Uma nau carregou na Índia 400 quintais de gengibre e chegou a Portugal com 360 quintais.

a) Que quantidade de gengibre ficou danificada durante a viagem?
b) De quanto foi a quebra por cada 100 quintais?

2. A mesma nau, carregou também na Índia 300 quintais de pimenta que sofreram uma quebra de 33 quintais.

Compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual das duas mercadorias sofreu a maior quebra.

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d' Arismética , 1519, fol.46)

O excerto seguinte, relativo ao momento em que propõe uma variante do problema *O Quarto e Vintena*, sugerida pelo seu professor cooperante, sugere que Inês sente alguma dificuldade em conduzir os alunos para a resolução autónoma dos problemas:

> I - Como eu estava a dizer, nesta situação o que é que acontece? Nós pagávamos os dois impostos, um de cada vez, certo? Primeiro pagávamos a quarta e depois pagávamos a vintena. E se pagássemos os dois ao mesmo tempo?
> A - É fácil.
> I - Será que era o mesmo valor?
> A - Não, porque assim não sobrava.
> I - Não sobrava o quê?
> Será que a quantidade que era para o rei e a quantidade que ficava para o mercador era a mesma? Ricardo?
> A - Não.
> I - Não? Então vamos lá verificar isso. Façam lá os cálculos.
> A - É fácil, um quarto mais um vinte avos.
> I - Um quarto mais um vinte avos. E depois?
> A - Vezes 64.
> I - E depois? Como é que é? Vezes, menos?
> A (coro) - É vezes.
> I - Calculamos o quê? Somamos um quarto com a vintena e depois multiplicamos por 64 para calcular a parte do imposto que tínhamos que retirar. Então vamos lá fazer. [algumas vozes de protesto]
> Não se esqueçam que têm que adicionar o quarto e a vintena e têm que ter o quê? Parêntesis. (aula, 13/01/06)

Inês evidencia assim estar muito mais centrada nos resultados dos cálculos do que no processo de resolução, não manifestando, apesar disso, o cuidado de orientar os alunos para a avaliação da adequação da solução ao problema respectivo.

Conteúdo matemático

Em termos de conteúdo matemático, Inês nem sempre consegue orientar os alunos para percepção das ideias, conceitos e relações que pretende explorar com o problema, pois embora ponha perguntas aos alunos que poderiam favorecer essa percepção não aprofunda as respostas obtidas através de novas questões conducentes ao que se pretende. Em vez disso, é ela própria que dá respostas e informa os alunos. Atente-se nos extractos anteriores da exploração feita do problema *A venda do trigo*, em que questiona um aluno sobre o que está a fazer, pergunta-lhe o porquê, não espera pela resposta e lança, logo de seguida, outra pergunta à turma. Obtida a resposta, não a aprofunda. É a própria Inês que afirma que a razão de consequente 100 torna mais fácil a comparação, não questionando os alunos, nem explicitando o porquê dessa afirmação.

Ainda assim, Inês consegue aproveitar os diferentes processos de resolução dos alunos para estabelecer a ligação entre diferentes representações, das quebras das duas mercadorias.

I - O Nuno calculou a percentagem, mas também podia ter calculado o quê? Sofia, acho que foste tu que calculaste. Não calculaste a percentagem. O que é que tu fizeste? … Quando chegaste aqui … a esta razão ... a ti não te deu os 11%, não calculaste em percentagem.
Al - Deu só 11.
I - Deu quanto?
A - 11.
I - Não deu 11. Deu quanto?
A - Zero vírgula onze.
I - Zero vírgula onze. Calcularam o numeral decimal ... que é o mesmo. Podemos ter .. a razão, o numeral decimal ou a percentagem. Representam todos a mesma coisa. Com a percentagem torna-se mais fácil comparar.
Então qual foi maior a quebra sofrida? (aula, 05/05/06)

Consistente com a valorização que atribui ao cálculo em matemática, muito do apoio que dá aos alunos parece estar mais centralizado nas execução das operações adequadas do que na identificação e justificação da operações ou sequências de operações que permitem modelar um determinado problema. É o que acontece, por exemplo, no problema *O quarto e vintena*, em que os diálogos que estabelece com os alunos mostram bem a sobrevalorização dada à execução das operações, sem atender à necessidade de levar os alunos a identificar que operações devem efectuar e porquê.

Inês - O que é que tens de calcular primeiro?
A (aluno) - Não sei.
I - O que é que se está a calcular?
A - Sessenta e quatro avos
I - Estás a calcular quanto é o quê, um quarto de?
A - 64 quintais.
I - Então a operação é o quê?
A - Vezes.
I - Agora faz a conta. (aula, 13/01/06)

Refira-se ainda que Inês não mostra dar muita importância à economia, ao poder de síntese contido na actual escrita simbólica das unidades de medida, ainda que esse aspecto tenha sido discutido nas sessões de trabalho. Em duas das aulas, quando os alunos a questionam sobre se o quintal tem símbolo (em ambas, há alunos que chegam mesmo a escrever uma abreviatura), a resposta de Inês limita-se a ser meramente informativa, como podemos constatar nos dois excertos seguintes:

I - Quanto é que isso dá?

A -18,4.
I - 18,4, quê? […] E a unidade?
A - Quintais.
A - Como é que isso se representa?
I- Não se representa, não tem nenhum símbolo.
A - É o q.
I - Escrevemos quintais (aula, 13/01/06).

A Ana foi fazer esta, do ganhou ou perdeu dinheiro. Então ela escreveu 15 alqueires, mas não escreveu alqueires, escreveu alq ponto. (risos) Eu olhei e disse «não, alqueires não tem abreviatura, é alqueires» e ela assim a dizer «Oh que chatice, a palavra é tão grande.

(ST, 23/02/06)

Há que referir que Inês formula os conceitos de forma precisa, utilizando uma linguagem acessível aos alunos mas correcta, verificando sempre os registos feitos no caderno.

4.3.2.3. Reflexão sobre a prática de ensino

A reflexão que Inês faz sobre as suas aulas, embora quase sempre muito descritiva, centra-se essencialmente sobre as dificuldades dos alunos, mas revela também que reflecte sobre o próprio processo de ensino e o seu desempenho como professora e que retira daí ilações para a prática futura. Por exemplo, referindo-se à PP realizada no 1º CEB reconhece a existência de momentos de reflexão no final de cada dia e afirma: “A mim acontecia-me chegar a casa e pensar. Eu hoje fiz isto e isto, mas podia ter feito assim e, se calhar, tinha ficado melhor. Mas, depois, já está feito” (ENT1, 21/06/05). Embora o uso da conjunção adversativa possa sugerir algum conformismo, Inês também evidencia as implicações dessa reflexão para a forma como perspectiva o ensino da matemática “E aí, eu vi e pensei para mim, com os meus botões, naquele dia, que realmente é uma coisa que, às vezes, é necessária. De vez em quando retomar uma coisinha que já deram há algum tempo (…) Há sempre coisinhas que podemos apanhar, nem é preciso escrever, às vezes a falarmos com eles, isto e isto … recordamos coisas” (ET1, 21/06/05).

A dificuldade em cumprir os planos a curto prazo e mesmo os planos de aula é um dos aspectos que sobressai desde o início da prática de ensino no 2º CEB e que se prolonga até ao final do ano lectivo. Esta situação resulta do facto desta ser uma experiência de prática de ensino que se prolonga por um ano lectivo, em que Inês e a sua colega se vêem confrontadas com uma turma algo problemática em termos comportamentais e de aprendizagem, o que de certa forma condiciona o trabalho desenvolvido:

> Tem sido tudo tão … Eles não percebem isto ou aquilo e temos de alterar outra vez. Nós tínhamos as coisas programadas de uma maneira, mas todas as semanas temos mudado o que tínhamos programado (…) Nós nunca sabemos se vamos conseguir dar na aula a matéria toda (ST, 25/11/05).

> Eu não consigo gerir muito bem o tempo (…) Nunca consigo programar uma aula e fazer exactamente o que tenho programado. Ou me falta tempo ou me sobra tempo. Nunca consigo acertar com o tempo (ST, 11/05/06)

Referindo-se à experiência de exploração didáctica de tarefas de resolução de problemas históricos e, em particular, à primeira aula em que isso aconteceu, Inês mostra-se satisfeita: “Gostei. Foi diferente. Gostei. Senti-me bem” (ST, 19/01/06). Aliás, Inês reconhece que a selecção das tarefas propostas na aula é crucial para o ambiente criado e que os problemas históricos despertam o interesse dos alunos. Referindo-se à reacção dos alunos, em particular, no problema *O Quarto e Vintena* afirma: “Acho que eles gostaram e gostaram de ver as imagens e de relacionar com a história” (ST, 19/01/06). Na reflexão que faz sobre a exploração da tarefa *A venda do trigo*, se bem que admita algumas dificuldades por parte dos alunos, quer na interpretação, quer na resolução, Inês assume que, mesmo tratando-se da última tarefa proposta na aula, o interesse dos alunos manteve-se até ao final da aula (ST, 23/02/06). Esta atitude dos alunos contrasta vivamente com a atitude habitual, expressa numa reacção de Inês a um comentário da investigadora relativamente ao bom ambiente de uma das aulas observadas: “A professora não costuma lá estar nas aulas em que eles estão sempre a reclamar … 90 minutos. Nunca lá esteve numa aula assim, pois não? (…) Eles conseguem estar 90 minutos a refilar se não gostarem” (ST, 04/04/06). Este comentário torna-se particularmente relevante se atendermos a que, em todas as aulas em que propôs problemas históricos, os alunos mostram-se motivados e empenhados, situação que não será certamente alheia a uma planificação mais cuidada das aulas. (NC).

Nesse âmbito, e articulado com a sua concepção sobre a matemática, entende que o facto dos problemas traduzirem situações reais funciona como um agente motivador. Relativamente à atitude dos alunos perante a primeira das tarefas propostas, comenta:

> Tinha uma coisa boa, que era uma … não era uma situação forçada. Por exemplo, o Quarto e Vintena era real, não era um problema que se inventou por um livro. Pronto, acho que isso também ajuda um bocado, porque eles, se lêem um problema e dizem «isto é uma treta», o problema foi para se resolver e mais nada (Inês, ST, 23/02/06).

A necessidade de contextualizar os problemas históricos, surge como um aspecto marcante da reflexão que Inês faz sobre as suas aulas. Assim, referindo-se ao texto que incluiu, por sua livre iniciativa, na tarefa *A venda do trigo*, assume que considerou importante dar a conhecer aos alunos o alqueire como antiga unidade de volume.

> Inês - (…) depois propus este. Lemos o texto.
> Inv - Qual? Este texto introdutório?
> Inês - Sim. É só assim uma coisa .. é só para eles saberem, é mais por causa do alqueire.
> (ST, 23/02/06)

Porém, Inês reconhece que nem sempre é fácil fazê-lo: "A contextualização às vezes ... não sei…"(ST, 11/05/06). Referindo-se à aula em que explorou o problema *A quebra da mercadoria* salienta que procurou ligá-lo ao problema *O Quarto e Vintena*: "Eu peguei no problema do Quarto e Vintena porque tinha sido algo que eu tinha dado (…) E peguei um pouco por essa ideia das viagens, do pagamento de impostos e .. pronto, lembrei-me disso. Mas às vezes é um bocado complicado" (ST, 11/05/06).

Relativamente às dificuldades identificadas nos alunos, estas são quase sempre relacionadas com a interpretação da situação exposta que se reflecte numa certa tendência em começar a efectuar cálculos sem pensar primeiro sobre o problema (os dados e o que é pedido), seguindo, por vezes, processos de resolução análogos aos de outros problemas anteriores:

> Eles não conseguiram perceber que era dividir os 60 000 reais pelos 6. Eles dividiram, porque nós tínhamos feito um ... como no outro antes se tirava ¼ e depois daquele que sobrava tirava-se a vintena. Eles pensavam que era assim, tirava-se 1/3 .. então o último não levava quase nada.
> (…)
> Não perceberam que era os 60 000 a dividir. Um terço para um, um quarto para outro. E nós tínhamos feito outro, na 3ª feira, desse género também (ST, 19/01/06).

Porém, noutras situações, a natureza problemática das tarefas de resolução de problemas e a formulação inusual e pouco familiar aos alunos, são entendidas como obstáculos à compreensão e que exigem o seu apoio e orientação:

> Mandei-os ler o problema. Ao início tiveram um bocado de dificuldade na alínea (a), porque era a primeira, não é? Eles percebiam o que é que eu queria, mas não sabiam o que é que haviam de fazer. Porque era estranho. Então é cinco quartos daquele, é três quartos daquele? (…) Não sabiam … acho que era o português. A interpretação. Eles não conseguiram interpretar muito bem, porque nós tínhamos que ver … Eu tive que lhes explicar que tínhamos que ver quantas vezes é que o três quartos cabia naqueles quinze, porque eles não conseguiram perceber isso (Inês, ST, 23/02/06).

Outro aspecto que releva da reflexão é que as suas expectativas acerca do que os alunos conseguem executar condicionam o tipo de perguntas que põe aos alunos. Por exemplo, quando a investigadora observa que, para uma melhor compreensão do problema *A distribuição do dinheiro pelos pobres*, deveria ter perguntado aos alunos qual das fracções do dinheiro cabia ao pobre mais pobre, Inês responde peremptoriamente que os alunos não saberiam responder a essa questão, o que aliás é concordante com a posição adoptada na Exposição Interactiva, de não propor o segundo problema aos alunos que revelam mais dificuldades.

> Inv – Anotei que não explorou os dados do problema (…) Devia ter perguntado algo como:
> - que parte do dinheiro vos parece que vai receber aquele que é mais pobre.
> Inês – Não sabiam (ST, 19/01/06).

<u>Conexões</u>

Na reflexão que faz da sua prática de ensino no 1º CEB, transparece a ideia de que Inês tem consciência que promoveu um ensino fragmentado, sem ligações entre os conceitos e os tópicos abordados: "acontece muitas vezes, nós damos uma coisa e guardamos na prateleira. Já não é precisa e não voltamos a pegar e, se calhar, às vezes vale a pena pegarmos" (ET1, 21/06/05). Referindo-se a uma aula em que incluiu numa ficha de trabalho um exercício envolvendo o cálculo da área de um rectângulo, tópico abordado por uma das suas colegas de estágio, afirma: "E aí, eu vi e pensei para mim, com os meus botões, naquele dia, que realmente é uma coisa que, às vezes, é necessária. De vez em quando retomar uma coisinha que já deram há algum tempo" (ET1, 21/06/05). E reflecte: "Há sempre coisinhas que podemos apanhar, nem é preciso escrever, às vezes a falarmos com eles, isto e isto … recordamos coisas (ET1, 21/06/05). Não obstante, esse recordar de "coisas" está centrado em factos e fórmulas e não em verdadeiras ligações entre ideias matemáticas ou na integração de conteúdos: "Por exemplo, na última semana fiz uma ficha, eles já tinham dado as fórmulas das áreas do quadrado e do rectângulo há imenso tempo, na semana de estágio da Rute, e eu pus lá. E eles já não se lembravam. Muitos deles não se lembravam" (ET1, 21/06/06). Note-se a perplexidade com que Inês encara essa falta de lembrança, não a conseguindo associar à ausência de aprendizagem: "É uma coisa que para nós é tão simples e eles assimilaram tão bem, (…) que a área do rectângulo é comprimento vezes largura. (…) E …houve muitos deles que não foram capazes de fazer … para eles foi uma complicação, multiplicavam coisas que não eram" (ET2, 21/06/06). O excerto citado revela, mais uma vez, um ensino compartimentado e inconsistente da matemática, que se reflecte numa perspectiva de aprendizagem centrada na memorização de procedimentos e não na compreensão da ligação entre o conceito de área e a fórmula para o cálculo da área de um rectângulo.

Ancorada na visão da matemática que desenvolveu ao longo do seu percurso escolar em matemática, Inês acaba assim por se escudar num modelo de prática de ensino que a "desobriga" de abordar a matemática como um todo coerente, em que as ideias matemáticas surgem interligadas (quer entre as diferentes áreas da matemática, quer no interior de cada uma delas). De facto, a centralidade que Inês atribui aos conteúdos que "tem" de leccionar numa aula, parece actuar como um bloqueio à aceitação real e consciente de que um aspecto central na planificação das suas aulas deve atender à necessidade de estabelecer conexões.

Dimensão afectiva em relação ao ensino da matemática

Inês manifesta sentimentos ambivalentes relativamente às experiências de ensino que viveu no 1º e 2º CEB. Relativamente à primeira, reconhece que adorou trabalhar com a turma em que realizou o estágio, mas, por outro lado, admite a existência de muitas dificuldades em trabalhar com uma turma cujos alunos "sabiam muito (…) era prato de todos os dias, sentir que eles já sabiam alguma coisa. Podiam não saber exactamente o que era, mas tinham a noção do que era" (ET1, 21/06/06). Relativamente a uma das suas aulas, Inês afirma:

> Eu planeei a aula, pensado que eles não sabiam … tanto. (…) Assim que eu comecei … era um conteúdo novo, unidades de capacidade. Íamos começar a falar e eles já sabiam tudo (…) a parte da matemática correu muito mais depressa do que eu estava à espera e então tive de improvisar um bocado (…) estava um bocado nervosa (ET1, 21/06/07).

Esta situação relatada por Inês parece decorrer não somente de problemas/lacunas na sua planificação, mas também da própria organização das práticas pedagógicas na ESE. De facto, como Inês reconhece que os conteúdos que planeou ensinar numa das suas semanas[148] já tinham sido abordados pela professora cooperante[149]: "Eles já tinham dado

[148] De acordo com as indicações da própria Professora Cooperante, nos dias 9, 10 e 11 de Maio de 2005 a planificação relativa à matemática deveria permitir a realização das seguintes tarefas: (i) medir a capacidade de recipientes; (ii) relacionar as unidades de medida de capacidade (kl, hl, dal, l, dl, cl, ml); (iii) resolver situações problemáticas (NC).

aquilo com a professora cooperante (…) a relação entre o litro e o decímetro cúbico era uma coisa nova para eles (…) quando falámos no hectolitro … essa parte acho que eles ainda não tinham feito os exercícios" (ET1, 21/06/05). Aliás, o mesmo aconteceu com outras colegas do grupo de Inês"[150]. Em função do exposto não se pode estranhar que Inês afirme que a PP no 1º CEB lhe deu "uma primeira perspectiva, não muito real, do que é o ensino" (QT, 26/06/06).

Já no que respeita à Prática Pedagógica no 2ºCEB, se por um lado reconhece que gosta mais de ensinar matemática do que Ciências da Natureza, evidencia uma certa rejeição e falta de gosto pelo trabalho que desenvolve na turma, certamente associado às características da própria turma que possui dois alunos com atitudes e acções imprevisíveis, frequentemente desrespeitosas, quer para os colegas quer para as futuras professoras e que originam muitos problemas de natureza disciplinar. Para além disso, o aproveitamento global da turma é muito baixo e alguns alunos revelam desinteresse e falta de empenhamento na realização das tarefas propostas, limitando-se a copiar os registos feitos no quadro (NC).

> Nós estamos sempre a querer que seja a semana em que não damos matemática (…) A mim não me custa muito dar-lhes aulas, sinceramente não custa (…) mas gosto muito mais de dar à turma de ciências, embora eu goste mais de dar matemática. (ST, 25/11/05)

Por exemplo, ao referir-se à prática de ensino no 1º CEB afirma: "Eu gostei, porque eles também gostaram. Acho que nós estarmos a fazer algo e vermos que os alunos estão a gostar é óptimo. Motiva-nos imenso" (ET1, 21/06/05). O gosto e o empenhamento no processo de ensino da matemática, ainda que manifestamente relacionado com as características da turma, parece, porém, ter mais a ver com a confiança e a satisfação pessoal de Inês em envolver-se na realização de actividades que envolvam pensamento matemático: "a matemática é uma das áreas onde mais se aprende e que ajuda a desenvolver o raciocínio" (QT1, 11/06/05).

[149] Assim se entende que Inês ao propor aos alunos a resolução de exercícios do manual escolar diga aos alunos: *abram o vosso livro de matemática na página 122. Vocês já fizeram a 123, 124, 125, 126. Falta a 127* (NC, 10/05/06).
[150] Uma delas, Mariana, admite que certos conteúdos que lhe coube leccionar já tinham sido abordados no 1º semestre por outro grupo de estagiários.

4.3.3. Formação e profissão

4.3.3.1 Relacionamento com o curso e com a profissão de professora de matemática

A escolha da licenciatura em Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática/Ciências da Natureza, por parte de Inês, pode considerar-se casual. Como já referido, a frequência da licenciatura terá sido motivada por alguma inclinação pelo ensino nos primeiros anos, mas é marcada pela impossibilidade de entrar no curso para o qual se sentia efectivamente vocacionada, enfermagem.

Em termos de visão global do curso, nomeadamente das suas componentes de formação em matemática, didáctica da matemática e iniciação à prática profissional, Inês valoriza claramente, em várias ocasiões, a componente de iniciação à prática profissional. Faz, por exemplo, um balanço muito positivo da disciplina de Prática Pedagógica no 1º CEB na medida em que a considera muito "estimulante e gratificante (…) a prática é muito mais importante que a teoria (QT1,11/6/06). A parte que eu mais gosto do curso é mesmo a parte prática" (ENT1, 21/06/05). No final da Prática Pedagógica no 2º CEB mantém e precisa melhor essa opinião: "Aprendemos a "ensinar" na Prática Pedagógica, porque por mais teoria que tenhamos assimilado não há nada como o contacto com as crianças" (QT2, 21/06/06). Não é, pois, de estranhar que das componentes de formação em matemática e didáctica da matemática destaque claramente esta última, por "as aulas serem menos teóricas e mais viradas para a prática (QT1, 11/06/06)", isto é, pelo seu maior contributo para a preparação para a prática profissional: "Penso que ambas [as disciplinas de Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino] nos prepararam um pouquinho para a prática (QT1, 11/06/06). É também nesta componente que Inês obtém melhores resultados.

Referindo-se à componente de formação em matemática, na qual considera não ter ultrapassado o nível médio, Inês valoriza a inclusão da generalidade das disciplinas, num curso de formação de professores para o 1º e 2º CEB, mas considera como não adequadas as disciplinas de Análise Infinitesimal e Álgebra Linear. Aliás, a única reprovação de Inês em todo o seu percurso escolar surgiu precisamente na disciplina de Análise Infinitesimal, à qual não reconhece qualquer ligação com as restantes disciplinas curriculares:

> Eu não gostei muito de Análise. Tive imensa dificuldade em fazer a disciplina, porque eu não … achei piada nenhuma à disciplina. Pronto. Para mim foi um *bicho de sete cabeças*, foi a coisa mais difícil que tive cá para fazer. Para mim, aquilo foi uma disciplina que fiz e acabou (…) eu não gostei e, portanto, não via conexões com outras disciplinas.
>
> (ENT2, 27/06/06)

Como balanço final, Inês aponta como importante e desejável a existência de mais disciplinas relacionadas com a didáctica da matemática e também de disciplinas de matemática "mais direccionadas para o ensino dos conteúdos que nos compete leccionar na nossa prática" (QT2, 11/06/06).

Apesar de frequentar uma licenciatura que lhe confere habilitação profissional para o 1º e 2º ciclos, Inês tem uma inclinação muito forte para a docência no 1º CEB. Aponta como razões ser um nível em que as crianças são muitas receptivas à aprendizagem de coisas novas, o "adorar trabalhar com crianças" e ainda a possibilidade de estabelecer uma "relação mais estreita com as crianças", fruto de um período de tempo mais alargado de contacto com elas (QT1, 11/6/05; QT2, 20/06/06). Afirma, referindo-se à Prática Pedagógica no 1º CEB: "Gostei (…) primeiro porque é exactamente o ciclo que eu mais gosto (…) Poder ver que eles estão a aprender, que estão interessados, motivados. Para mim isso é muito bom" (ET1, 21/06/05).

Das três áreas que Inês leccionou no 1º CEB, a matemática é indicada como a que mais gostou e em que se sentiu mais à vontade: "A mais difícil para mim foi Língua Portuguesa (…) Sinceramente, foi na matemática que me senti melhor" (ET1, 21/06/05). Talvez porque, sendo-lhe pedido uma avaliação do seu nível de preparação para ser professora no 1º CEB, Inês admite sentir insuficiências ao nível de preparação didáctica para a leccionação da áreas de Estudo do Meio e Língua Portuguesa.

No que respeita à experiência de Prática Pedagógica no 2º CEB, Inês, apesar de considerar como bom o seu nível de preparação científico e didáctico para ser professora neste nível de ensino, admite que os tempos iniciais de prática foram muito complicados, a que certamente não foram alheias as dificuldades que sentiu em gerir os problemas surgidos na turma.

Inquirida sobre as suas expectativas em relação à profissão que escolheu, Inês considera-as muito pouco animadoras. A constatação das dificuldades que a esperam em termos de empregabilidade, levam-na a admitir como inevitável ter de procurar outra actividade que se adeqúe às suas habilitações profissionais (QT2, 21/06/06).

4.3.3.2. Percepção sobre o contributo do Percurso de Formação para a formação profissional

Inês revela desde o início uma atitude muito positiva relativamente à resolução de problemas históricos que lhe foram propostos, visível na forma como encara cada uma das tarefas propostas e transparece também nas opiniões manifestadas nas sessões de trabalho, entrevistas e questionários. Assim, a actividade de resolução de problemas históricos é considerada muito relevante para a sua formação (QT2, 20/06/06). Um dos aspectos que salienta, na entrevista realizada no final do primeiro ano do estudo, relaciona-se com o facto de os problemas envolverem antigas unidades, o que a "obrigou" a abstrair de relações e resultados já conhecidos e mecanizados (por exemplo, os que se relacionam com a conversão de unidades no sistema internacional):

> Eu acho que teve uma coisa importante para mim que foi (…) não nos centramos só naquelas unidades (…) no metro, no metro quadrado, … e assim temos de pensar de forma mais abstracta. É uma unidade que nós não conhecemos. (ET, 21/06/05)

Na segunda entrevista, realizada cerca de um ano depois, Inês mantém essa opinião e acrescenta que essa experiência de aprendizagem lhe permitiu o contacto com uma área desconhecida, isto é, com questões e problemas que estiveram na origem do sistema de unidades que hoje utilizamos. Nesse sentido, afirma: "permite-nos ver de onde veio, a origem, … o porquê" (ET, 27/6/06).

Um outro aspecto que merece destaque tem a ver com a forma como Inês vê a integração dos problemas históricos na disciplina de Geometria. Inicialmente, com alguma estranheza provocada por diferenças entre as abordagens de ensino seguidas na disciplina e nos Seminários: "Quando tive Geometria no 1º semestre achei que aquilo era tão complicado. Não percebia nada daquilo. Naqueles primeiros meses andei lá mesmo assim … e depois quando fizemos aqueles problemas eu pensei: «Isto é tão diferente, isto não tem nada a ver» (ET1, 21/06/05), mas também, pelo que de inovador representava – "Quando começámos a trabalhar eu não encontrei grande relação com aquilo que estávamos a fazer antes, mas depois, no fundo, … quer dizer, tem a ver com a formação que tínhamos de trás. Eu, por exemplo, nunca tinha resolvido problemas desse género.

Então, foi uma vertente diferente” (ET2, 27/06/06), para só depois da sua experiência de prática pedagógica lhe reconhecer sentido, “Agora já acho que sim, que tinha, porque nós damos as áreas, damos os volumes” (ET1, 21/06/05).

Outro aspecto que Inês salienta é a sensibilização, o contributo dessa formação para o reconhecimento da importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem: “Eu aprendi assim e também ensinei assim, no fundo” (ET2, 27/6/06).

Neste âmbito, Inês também considera relevante para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional o trabalho desenvolvido na organização e dinamização do módulo da grandeza Capacidade na Exposição Interactiva. Na sua opinião, a participação na Exposição deu-lhe “uma outra perspectiva da resolução de problemas” (QT2, 20/6/06) e de recursos que podem contribuir para a motivação dos alunos. Essa nova forma de encarar a resolução de problemas parece não só estar associada a uma maior motivação dos alunos, mas também a um enriquecimento pessoal propiciado por um trabalho inovador: “Eu acho que é importante para nós trabalharmos naquele contexto que é diferente. Não estamos habituadas e se calhar não vamos voltar a trabalhar tão cedo” (ET2, 27/06/06).

Em relação à integração de tarefas de resolução de problemas históricos na sala de aula, Inês salienta o interesse e a receptividade dos alunos às tarefas que lhe foram propostas. Na reflexão que faz sobre a aula em que propôs o problema *A venda do trigo* (integrado no módulo Volume da Exposição Interactiva), salienta positivamente o comportamento inusual do aluno mais problemático da turma que para além de ter dado resposta a tudo o que foi pedido, manifestou vontade de ir ao quadro resolver o problema histórico:

> Inês - O Sebastião na 3ª feira fez tudo. Até me disse: - Professora, deixe-me ir fazer ao quadro que eu hoje já fiz tudo».
> I (Inv) - Mas isso nem sempre acontece.
> Inês - Nunca acontece.
> (…)
> Inês - Portou-se muito bem e fez tudo. E quis ir ao quadro, eu é que não dei conta e não o mandei. Se tivesse dado conta, tinha-o mandado a ele. E até foi neste, no problema dos alqueires que ele queria ir. (ST, 23/02/06)

De forma a conciliar as actividades de Prática Pedagógica com as da Exposição, algumas das futuras professoras, durante o período em que a Exposição esteve exposta, colaboraram noutros módulos que não o seu. Um aspecto merecedor de destaque é que Inês admite que, aquando da Exposição, não se terá preocupado muito em compreender o problema *A venda do trigo* e que, por esse motivo, não se sentiu capaz de apoiar os alunos na sua resolução.

> Inês - Porque eu li. Eu li o problema
> Inv - E não o compreendeu?
> Inês - Não o compreendi, portanto quando tivemos que ir para lá disse à Mariana «vai para lá tu, porque eu … » (ST, 23/02/06)

Porém, integra-o, algum tempo depois, numa das suas aulas e o facto de o ter encarado enquanto objecto de ensino, deu-lhe uma outra perspectiva do mesmo. Não só o compreendeu como o achou fácil e adequado aos alunos. Os excertos seguintes, o primeiro referente a uma sessão de trabalho em que a investigadora sugere a integração do problema no âmbito da divisão de números racionais e o segundo relativo à reflexão sobre a aula em que o propõe, revelam a importância de envolver activamente as futuras professoras não só na resolução de problemas, como também na sua exploração didáctica:

> Inês - Hi, eu não percebi nada disto.
> Mariana - Eu explico-te.
> Inv - Então, explique lá Mariana. Porque a Mariana esteve na banca.
> Inês - Deixa-me ler primeiro.
> Inv - Então a Inês não percebeu esse problema?
> Inês - Oh, professora tenho de ler isto com muita atenção.
> Sabe que eu não li com muita atenção, por isso também não …(ST, 16/02/06)
> Inv - E agora não teve receio em propô-lo na aula.
> Inês - Agora não, porque eu já sabia como é que se resolvia. Não achei que fosse nada complicado.
> Inv - Sabia como se resolvia e não só. Acho que compreendeu o problema.
> Inês - Compreendi como é que era e o que é que se pretendia (ST, 23/02/06).

De todas as tarefas propostas nesta aula, Inês admite que a resolução do problema *A venda do trigo*, sendo a que deu mais trabalho aos alunos, foi bem recebida e motivou-os para a sua resolução: “Este deu-lhes mais trabalho. Mas eu acho que eles também gostaram” (ST, 23/02/06). Note-se que o problema, apesar de ter sido a última tarefa proposta na aula, conseguiu manter o interesse da turma até ao final (situação pouco frequente na turma, como já foi salientado[151]).

> Inês - Depois apareceu este ... Ficaram assim … Demorou um bocado, mas pronto.
> Inv – Em que momento da aula propôs o problema?
> Inês – Nos últimos 45 minutos.
> Inv - Conseguiu mantê-los atentos até ao final da aula?
> Inês- Sim. Excepto na última parte, quando passei os trabalhos de casa. (ST, 23/02/06)

[151] “Na última meia hora, nós nunca podemos fazer nem ficha de trabalho, nem correcção de nada” (Inês, ST, 25/11/05)

Ainda referindo-se à reacção dos alunos aos problemas históricos, Inês admite que estes são verdadeiros problemas para os alunos, pelo próprio vocabulário e terminologia usada, mas também pelo conteúdo matemático dos mesmos. Acrescenta, ainda, que o facto de os alunos terem visitado e resolvido os problemas da Exposição contribui para uma maior aceitação de problemas referentes ao passado histórico.

> Inv - Na vossa opinião, os alunos acham estranhos esses problemas envolvendo antigas unidades?
> Inês - A primeira vez, sim. Quando eu fiz … a Mariana tinha feito *O Olho de Horus*, mas quando eu fiz o primeiro, *O Quarto e Vintena*, eles tiveram um bocado de dificuldades. Tanto que eles queriam reduzir, fazer conversões para as unidades que conhecemos. Aí, sim. Agora vieram à Exposição, eram aquelas unidades. (ST, 23/02/06)

Na opinião de Inês, a história da matemática, ao permitir que o professor perceba a origem do estudo de certos conteúdos, proporciona-lhe também um meio de explicar aos alunos o porquê desses conteúdos e também tornar os conteúdos mais reais, mais próximos da actividade humana:

> O enquadramento histórico também é importante, porque permite-nos ver de onde é que veio a origem … o porquê (…) Permite-nos tornar a matemática mais real, porque teve uma origem natural tal como qualquer outra coisa. Não é assim nada de especial como as pessoas às vezes …
> Se houver um enquadramento [histórico], nós percebemos de onde é que surgiu, qual foi a necessidade que levou à criação daquele aspecto.
> (…)
> Eu acho que as crianças têm muita dificuldade … no meu caso eu também tinha, no início, em ver o porquê, a razão de ser assim. (ET, 27/06/06)

Na sua perspectiva, a história da matemática "pode ser uma mais valia para o ensino da matemática" (ET2, 27/06/06), cujas potencialidades estão relacionadas com a necessidade de dar a perceber aos alunos quais os aspectos que estiveram na origem dos conceitos que estudam. Referindo-se ao conceito de número fraccionário e à forma como foram introduzidos em aulas que observou, afirma:

> Nunca explicaram aos alunos porque é que havia números fraccionários. E porque é que eles surgiram? Porque houve uma necessidade. Mas porque é que surgiu essa necessidade? Nunca lhes explicaram isso. Para eles aquilo era um bicho-de-sete-cabeças de que não gostaram. Para eles foi uma seca tremenda andarem a trabalhar com números que eles não percebem porque é que existem, porque no dia-a-dia, a maior parte das vezes, não os usamos. (ET, 27/06/06).

Porém, quando reflecte sob o modo como ela própria integrou a história da matemática e sobre o sucesso dessa integração, admite que talvez não o tenha feito da melhor forma e reconhece a existência de um hiato entre as aulas em que propôs a resolução de problemas históricos e as aulas que se seguiram.

> Naquela aula … se calhar, naquela aula consegui. Mas depois na aula seguinte já não teve nada a ver (…) quando trabalhei outro conteúdo, não houve a explicação de por que é que havia necessidade (…) Fazemos um dia uma introdução histórica e depois no dia seguinte continuamos com problemas que, se calhar, nem são muito reais (ET2, 27/06/06).

Esta observação afigura-se pertinente, pois coloca a tónica no tipo de uso que é feito da história da matemática. Neste caso, pode-se dizer que Inês faz um uso local, em tópicos particulares, mas que as suas palavras sugerem uma maior identificação com um uso mais transversal ao currículo, isto é, em que a história da matemática surge como uma estratégia didáctica, um modo de ensinar matemática.

Como já foi referido, Inês reconhece a importância do estabelecimento de conexões, pois, na sua opinião, "perceber que as coisas estão relacionadas entre si (…) torna a compreensão mais fácil", e acrescenta que "as conexões são muito importantes numa disciplina como a matemática, porque tudo está interligado" (ET2, 27/06/06). Ainda que Inês sinta que o Percurso de Formação (PF) a ajudou nesse aspecto (QT2, 20/06/06), sente que persistem alguns obstáculos criados pelo próprio percurso escolar em matemática: "Eu acho que nós próprios na nossa própria formação … não sei (…) há sempre aqueles compartimentos estanques. Uma coisa é uma coisa, outra coisa é outra coisa e não se estabelecem conexões" (ET2, 27/06/06). Referindo-se à componente de formação matemática da licenciatura em ensino que frequenta, salienta a falta de ligações entre as várias disciplinas. Por exemplo, referindo-se à disciplina de Análise Infinitesimal afirma: "Para mim, aquilo foi uma disciplina que fiz e acabou. Sei que depois houve uma parte da matéria que ainda pegámos noutra disciplina qualquer… Penso que foi em Geometria, na parte final. Mas que ficou ali, porque eu não gostei e, portanto, não via conexões com outras disciplinas (ET2, 27/06/06).

Se para esta situação terá contribuído uma certa ausência de conexões ao longo do seu percurso escolar, a própria organização das práticas pedagógicas na instituição que frequenta parece criar também alguns obstáculos à concretização das conexões no processo de ensino. De facto, o esquema organizativo em vigor tem favorecido uma alternância semanal entre os vários elementos do grupo de estágio. Neste âmbito, como os grupos de estágio no 1º CEB (PP II) são constituídos no mínimo por 4 elementos, resulta que as intervenções de cada um são espaçadas no tempo e muito centradas nos conteúdos a abordar nas áreas de Estudo do Meio, Matemática e Língua Portuguesa. Na figura 4.19 podemos observar um esquema, elaborado de acordo com os guiões fornecidos pelas professoras cooperantes, semanalmente, às alunas em PP, como orientador da planificação de matemática de Inês.

Figura 4.19. Propostas para a planificação da prática de ensino da matemática

4, 5 e 6 de Abril	**9, 10 e 11 de Maio**	**1, 6 e 7 de Junho**
◦ Construir colectivamente o metro quadrado com quadrados de 1dm de lado feitos em papel quadriculado; ◦ Relacionar o m^2, o dm^2 e o cm^2.	◦ Medir a capacidade de recipientes; ◦ Relacionar as unidades de medida de capacidade: kl, hl, dal, l, dl, cl, ml. ◦ Resolver situações problemáticas.	◦ Desenhar figuras geométricas simples em superfícies curvas; ◦ Desenhar figuras geométricas simples com algumas regras.

Como se pode observar, trata-se de um modelo de prática de ensino que acaba por centrar os estagiários na abordagem de determinados tópicos, levando-os a focarem toda a sua atenção nas tarefas que devem propor, não conseguindo assim atender à necessidade de abordar a matemática como um todo, em que conteúdos, resolução de problemas, raciocínio e outros processos matemáticos devem surgir naturalmente interligados.

É com base nesse esquema organizativo que Inês encontra o principal argumento que sustenta a pouca importância que deu à interligação entre ideias matemáticas. "Nós temos sempre que nos cingir ao que nos dão [refere-se aos mapas de planificação semanal da responsabilidade da professora cooperante]. O importante é aquilo" (ET, 20/06/05).

Também no 2º CEB, Inês e a sua colega de grupo (Mariana) continuam a manter o mesmo esquema de alternância semanal na docência da matemática (e também de Ciências da Natureza). Neste caso, não porque o modelo tenha sido imposto externamente, mas porque as duas assim o desejaram e o modelo organizativo o permite. Numa das sessões de trabalho, a investigadora sugere-lhes que alterem essa prática, ao que ambas respondem negativamente, afirmando não verem vantagens na abordagem completa de uma unidade de ensino e reiterando a ideia de que "as coisas [os conteúdos] praticamente são distintos [de semana para semana]" (Inês, ST, 25/11/05).

4.3.4. Sumário

A Inês, ainda que ambicionasse seguir outra profissão, ingressa num curso de formação de professores por sentir vocação para o ensino no 1º CEB. O período em que ingressa na licenciatura corresponde ao momento em que se começa a verificar a recessão na procura de licenciados em ensino, o que se reflecte quer no número muito reduzido de alunas que frequentam o curso no quadriénio 2002-2006, quer na forma pouco auspiciosa como Inês encara o futuro em termos de empregabilidade e de exercício de actividade docente.

Faz uma apreciação globalmente positiva do curso. Considera-se particularmente preparada para a leccionação da matemática, ainda que reconheça como desejável um reforço da formação em didáctica da matemática e a inclusão de formação em matemática direccionada para o aprofundamento dos conteúdos curriculares do ensino básico. Já no que respeita à formação didáctica para a docência nas áreas curriculares de Estudo do Meio e Português, Inês admite algumas insuficiências de preparação.

No que respeita ao seu desempenho na resolução de problemas históricos na disciplina de Geometria, salienta-se o entendimento global do propósito das tarefas propostas, o raciocínio correcto sobre os dados, a compreensão e a manipulação mental e flexível de conceitos e ideias matemáticas e, ainda, a forma organizada como apresenta as resoluções. Embora nem sempre apresente justificações detalhadas do processos de resolução, evidencia possuir competências de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemática.

Em termos do desempenho na resolução manipulativa, este pode considerar-se indissociável do da sua colega de grupo, Mariana[152]. Não obstante, salienta-se a falta de criatividade na selecção/construção de materiais que apoiassem a resolução manipulativa da tarefa 2 do Módulo Capacidade (Anexo 5). Esta constatação é apoiada pelo reconhecimento das dificuldades das crianças em resolver o problema, acabando por decidir não o propor a todos os alunos. Deste modo, na resolução manipulativa prevalece o

[152] Mariana também foi acompanhada pela investigadora ao longo de todo o percurso de formação, porém alguns problemas na gravação de aulas na disciplina de prática pedagógica limitaram os dados recolhidos. Esse facto, aliado aos prazo imposto pelo Prodep tornaram inviável a realização de uma análise com a profundidade desejada e requerida por este trabalho.

seu papel de orientadora da actividade dos alunos, reorientando-os quando repetem mudanças de água entre os recipientes já anteriormente executadas.

Ainda que do discurso de Inês sobressaia uma visão da matemática muito ligada ao cálculo, em termos de tarefas de ensino e aprendizagem valoriza as aplicações da matemática no dia-a-dia, por um lado porque a matemática está presente no quotidiano e é indissociável dele e, por outro, porque os problemas que traduzem situações próximas do quotidiano dos alunos são os que têm mais potencialidade de envolver e motivar os alunos para a sua resolução. Até porque uma das suas preocupações prende-se com a necessidade de tornar visível para os alunos a importância de aprender matemática para fazer frente a múltiplas tarefas do dia-a-dia.

Consciente de que as conexões intra-matemáticas são uma característica da matemática, a forma como perspectiva a abordagem dos conteúdos ao longo da sua prática de ensino parece ser marcada pela visão oposta, isto é, por uma visão em que os vários conteúdos são encarados como peças isoladas do conhecimento matemático.

Relativamente à prática de ensino e, em particular, à exploração didáctica de problemas históricos, Inês procura criar a motivação para a sua resolução, seja através da exploração de imagens ou de textos alusivos à época dos problemas, seja estabelecendo ligações com problemas anteriores da mesma natureza, o que indicia a importância que atribui à contextualização dos problemas. Ainda que formule os conceitos de forma precisa, utilizando uma linguagem acessível aos alunos, manifesta algumas dificuldades em orientar os alunos para a percepção das ideias, conceitos e relações que pretende explorar com os problemas. Este aspecto parece estar relacionado com a forma como gere o discurso em sala de aula, em que se percebe a tendência para a formulação de perguntas de forma fechada e, ainda, o não dar tempo aos alunos para pensarem na pergunta ou reformulando-a, se necessário.

Na apreciação que faz do PF, Inês encara a actividade de resolução de problemas históricos como muito relevante para a sua formação. Salienta o facto de a resolução dos problemas a ter “obrigado” a abstrair de relações e resultados já conhecidos e mecanizados o que favorece o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio. O contacto com questões e problemas que estiveram na origem de conceitos e ideias matemáticas é também relevado na medida em que permite conhecer a sua origem e o porquê. Nesse sentido, valoriza a integração da componente histórica na formação de professores porque esta proporciona um meio de explicar aos alunos o porquê dos conteúdos curriculares e de aproximar a matemática da actividade humana.

A integração de problemas históricos na sala de aula é considerada muito relevante, pelo interesse e receptividade dos alunos mas também por os considerar verdadeiros problemas, quer pela linguagem e terminologia utilizada, quer em termos de conteúdo matemático. Reconhece, porém, a existência de um hiato entre as aulas em que propõe problemas históricos e as que se seguiram, em que admite não ter dado a compreender aos alunos o porquê por detrás dos conteúdos e em que propõe alguns problemas com contextos forçados, não reais.

No quadro 4.2 sintetiza-se, decorrente da análise feita com base nas dimensões de análise consideradas, os aspectos mais marcantes da Inês.

Tendo-lhe sido pedido que desse a sua opinião sobre a análise realizada pela investigadora (Anexo 10), Inês afirma: “Li o documento e não tenho nada a acrescentar ou comentar. Parece-me uma análise bastante real” (Anexo 10).

Quadro 4.2. (1) Síntese das características de Inês em relação às dimensões de análise

Dimensões/categorias		**Características**
Resolução de Problemas Desempenho global		Entendimento global das tarefas propostas; Mostra destreza na manipulação de conceitos e ideias matemáticas; Resoluções detalhadas e organizadas, sugerindo um delineamento prévio de um plano de resolução. Não verifica a solução nem a sua adequação ao problema.
Prática Pedagógica	Perspectivas de ensino e aprendizagem da matemática	A matemática está presente nas mais variadas situações do quotidiano e o ensino/aprendizagem deve valorizar a resolução de situações que transmitam essa visão aos alunos. Necessidade de desmistificar a ideia da matemática como uma disciplina difícil. Sobrevalorização do cálculo em detrimento de outros temas do currículo.
Prática Pedagógica	Prática de ensino	Bom relacionamento com alunos, que a aceitam como professora, cria um ambiente descontraído e propício ao trabalho. Motiva os alunos para a realização das tarefas propostas, acompanhando-os e supervisionando o que fazem. Estabelece, através dos problemas históricos, ligações com a disciplina de história e com o quotidiano passado. Atitude um tanto prescritiva na orientação da resolução dos problemas; quando não consegue obter de algum aluno as respostas esperadas, sugere de imediato o que fazer a seguir. É bem sucedida no momento de síntese da actividade desenvolvida, guiando os alunos para a sua apresentação em linguagem discursiva e em linguagem matemática. Os conteúdos são encarados como peças isoladas, o que conduz a escassas conexões intra-matemáticas.
	Reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem	Revela capacidade de reflexão e de estabelecimento de ilações para a prática futura. Encontra sempre uma justificação exterior para as suas acções (por exemplo, apontando que o esquema organizativo das práticas pedagógicas é a principal razão para um ensino em que as conexões intra-matemáticas estão quase ausentes).
Formação e profissão	Percurso de Formação	Sensibilização para a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem. A possibilidade de encarar os problemas históricos enquanto objecto de ensino deu-lhe outra perspectiva sobre a resolução de problemas e sobre a necessidade de os resolver antes de julgar sobre a sua adequabilidade aos alunos. O envolvimento na organização e a participação na Exposição deu-lhe uma outra perspectiva sobre a resolução de problemas.
Formação e profissão	Problemas históricos	Interessantes e motivadores para si e para os alunos do ensino básico, sobretudo os que traduzem situações da vida real. Valoriza a necessidade de, na resolução de problemas que envolvam antigos sistemas de unidades, se abstrair de resultados e relações mecanizadas, o que requer pensamento e raciocínio matemáticos. Contributo relevante para a percepção das questões e problemas dos antigos sistemas de unidades. São verdadeiros problemas para os alunos, pelo próprio vocabulário e terminologia usada, mas também pelo seu conteúdo matemático.

Quadro 4.2. (2) Síntese das características de Inês em relação às dimensões de análise (cont.)

Dimensões/categorias		Características
Formação e profissão	História da matemática	Recurso didáctico que permite dar a conhecer aos alunos os aspectos que estiveram na origem dos conceitos que estudam; fonte de explicações, de exemplos, de problemas aplicados ao quotidiano
	Conexões	Estabelecimento, através dos problemas históricos, de ligações com outras disciplinas e com o quotidiano.
	Relacionamento com o curso e com a profissão	Conclui o Curso, que não foi a sua primeira opção, com a convicção de que deseja ser professora do 1º CEB, mesmo admitindo sentir insuficiências ao nível de preparação pedagógico/didáctica para a leccionação das áreas de Estudo do Meio e Língua Portuguesa. Manifesta satisfação com o Curso, destaca a componente de iniciação à prática pedagógica e aponta a necessidade da existência de mais disciplinas relacionadas com a didáctica da matemática e outras mais direccionadas para o ensino dos conteúdos do ensino básico. Perspectivas muito pouco optimistas quanto à possibilidade de vir a exercer a profissão.

4.4. Beatriz

Alta, morena, cabelos escuros e compridos, sorriso fácil, Beatriz parece ter-se tornado mais solta, mais feliz à medida que realiza a sua primeira experiência de ensino. Se no início do Percurso de Formação (PF), Beatriz apresenta alguns sinais de timidez, reflectidos em escassas e curtas intervenções nos seminários de Geometria, estes foram-se esbatendo, sobretudo, a partir do momento em que inicia a disciplina de Prática Pedagógica (PP). De facto, sempre que se refere a questões relacionadas com a prática de ensino, sejam elas relativas à planificação ou a episódios ocorridos em sala de aula, a forma como se expressa revela entusiasmo, envolvimento e empenhamento naquilo que faz, ainda que seja de notar que, por vezes, apresenta algumas dificuldades em verbalizar o seu pensamento.

Natural e residente num concelho com poucas infra-estruturas de apoio, Beatriz viu-se obrigada a frequentar, no ensino secundário, uma escola distante do seu local de residência. Contudo, reconhece que apesar de ter que se "levantar muito cedo e chegar tarde a casa, ainda tinha tempo para estudar" (QT1, 11/06/05). Além disso, também "aproveitava os tempos livres da escola para fazer os trabalhos e estudar" (QT1, 11/06/05).

Considera-se, ao longo do ensino básico e secundário, uma aluna de nível global bom, mas reconhece que o seu nível a matemática baixou para suficiente na transição para o ensino secundário. Tal desnível deveu-se, em parte, como disse, ao professor que teve nos três primeiros anos em que frequentou o ensino secundário, pois este não só não explicava devidamente os conteúdos, como os tornava confusos e muito teóricos (QT1, 11/06/05). Porém, no ano em que repetiu a disciplina de matemática, no 12º ano, essa situação mudou. Recorda, desse período, o professor que explicava "clara e correctamente os conteúdos" e que resolvia problemas aplicados ao quotidiano. Admite que se tivesse tido este professor durante todo o ensino secundário, os seus conhecimentos seriam "mais profundos e claros" (QT1, 11/06/05).

4.4.1. Resolução de problemas históricos - Desempenho global

Como já foi referido, no âmbito dos seminários dinamizados na disciplina de Geometria foi proposto às futuras professoras a resolução de um conjunto de problemas históricos (Anexo 6) e, mais tarde, na disciplina de História e Metodologia da Matemática, estas foram desafiadas a planear e construir materiais didácticos para a resolução manipulativa de problemas históricos a integrar numa Exposição Interactiva centrada no problema da Medida. Procura-se, neste ponto, fazer uma breve análise do desempenho global de Beatriz na execução das tarefas propostas, se bem que se deva ter presente que Beatriz e as suas colegas adoptaram sempre uma metodologia de trabalho de grupo, com todas as vantagens que daí advêm de troca de ideias e pontos de vista, mas também de dificuldades de análise.

Resolução conceptual

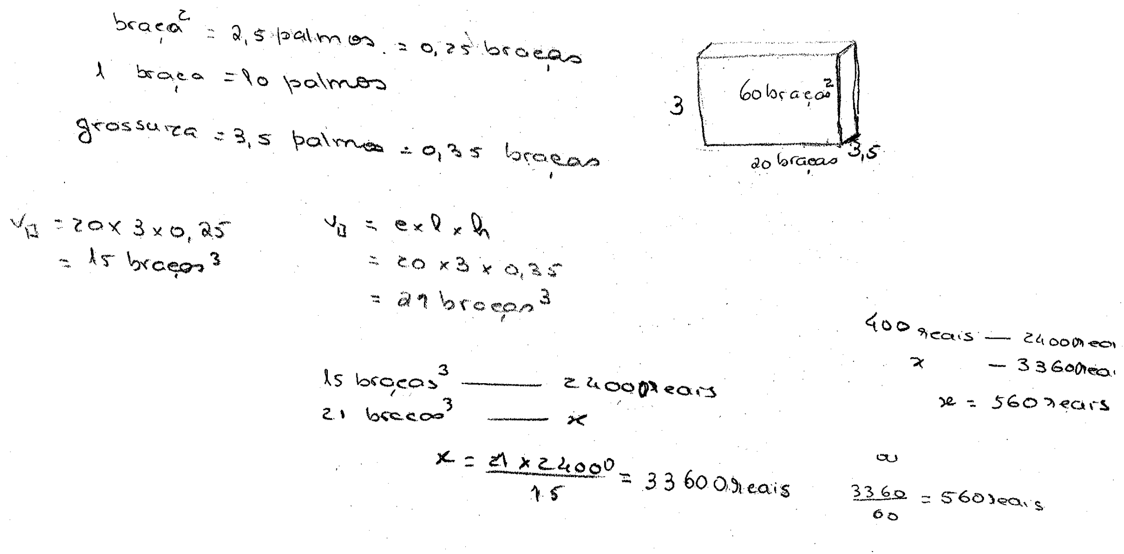
A análise do desempenho de Beatriz na resolução dos problemas históricos, propostos na disciplina de Geometria, é baseada na apresentação por escrito da resolução e da resposta aos problemas e, em particular, sobre o que esta sugere em termos de compreensão do problema, da estratégia adoptada, dos cálculos realizados e da justificação dos procedimentos adoptados. É pertinente notar, mais uma vez, que a análise recai sobre as resoluções tal como foram registadas por Beatriz na folha do problema.

É de começar por notar que as resoluções apresentadas por Beatriz não se diferenciam muito das apresentadas por outras colegas, o que é um reflexo da dimensão muito reduzida da turma[153] e da troca de ideias e de discussão, sempre incentivada pela investigadora. Beatriz resolve todos os problemas propostos e para todos eles apresenta uma solução. Nos problemas com maior predominância de cálculo, faz a indicação de todos os cálculos realizados, das unidades envolvidas e da relação entre elas. Porém, as justificações apresentadas são escassas e nunca verifica a solução encontrada. Verifica-se também uma separação clara entre os elementos do problema e a resolução que, em geral, é apresentada de forma organizada. A falta de justificação dos procedimentos adoptados, bem como a ausência de resposta escrita à questão do problema (que tem de ser depreendida dos cálculos apresentados) é um dos aspectos mais caracterizadores do trabalho de Beatriz[154] (figura 4.20).

[153] Esta foi a última turma que frequentou a licenciatura da ESE em Professores do Ensino Básico, Variante de Matemática/Ciências da Natureza. O Curso deixou de ter o número mínimo de candidatos, exigido para o seu funcionamento, a partir do ano lectivo 2003/04.

[154] Na apreciação que faz sobre esta leitura da investigadora, Beatriz justifica: “Muitas vezes não apresento justificações ou falta a resposta porque era uma resolução para mim, eu entendo e consigo tirar conclusões do

Figura 4.20. Resolução do problema *Ordenações para a construção de paredes*[155], apresentado por Beatriz



Tal como acontece com Joana, nas resoluções apresentadas sobressai o recurso à Regra de Três Simples sempre que é necessário fazer conversões entre as antigas unidades (com relações não decimais), o que aponta que também Beatriz sente algumas dificuldades na manipulação mental de relações fraccionárias com as quais possui escassa familiaridade.

No que respeita ao problema *O comércio de panos entre Portugal e Castela*, mostra compreender os dados e as condições do problema, pois identifica correctamente as relações entre as unidades de comprimento referidas no texto e também o aproveitamento que o mercador português faz da diversidade de unidades de comprimento usadas em Portugal e Castela. Podemos observar na figura 4.21 uma reprodução de parte da resolução de Beatriz, na qual referencia o *palmo*, o *côvado*, a *vara* de Portugal e a *vara* de Castela, exprime numericamente a relação entre as diferentes unidades (na parte direita do desenho observa-se uma a representação figurativa das varas de Portugal e de Castela, referenciadas ao palmo).

---

que escrevi. É claro que se for para outra pessoa ler e interpretar a resolução teria que ser exposta de outra forma, de modo a facilitar a compreensão a outro leitor" (Anexo 10).

[155] Já sabes que uma parede de 20 braças de comprido e 3 de altura a 400 reais a braça, tem 60 braças quadradas de área e custa-te 24 000 reais. Ora nesta parede, por ordenação desta cidade, a braça quadrada corresponde a dois palmos e meio de grossura. Acertou-se fazer a parede mais grossa 1 palmo, com 3 palmos e meio de grossura. Pergunto: quanto pagarei assim pelas 60 braças quadradas? (Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 94v).

Figura 4.21. Apresentação da relação entre antigas unidades de comprimento, apresentada por Beatriz

côvado — três palmos
vara ? — cinco palmos
Vara castelh... $\frac{1}{4}$
$\frac{4}{3}$ côvado = C = 4 palmos = $\frac{4}{5}$ vara portuguesa
vara Portuguesa
sexta castelhana - 1 palmo = $\frac{1}{4}$ vara castelhana.
Palmo

vara Portuguesa = vara castelhana + 1 palmo = 5/4
vara castelhana = 4/5

Como se referiu, Beatriz explicita, claramente, o uso feito pelo mercador português da diferença de comprimentos entre a *vara* de Portugal e a de Castela e o aproveitamento que faz do facto de, em Portugal, panos de tear e linho serem medidos com uma unidade diferente da usada para a seda. A sua resposta indica que compreendeu os elementos do problema e que percorreu todas as hipóteses de resposta ao problema (figura 4.22), porém a justificação que apresenta para os lucros de 25% e 33% está, manifestamente, incompleta:

Figura 4.22. Solução apresentada por Beatriz ao problema *Transacção de panos entre Portugal e Castela*

1080, a seda era comprada em castela e/a vara castelhana e vende e/ o côvado (3 palmos), o que significa que logo ganha nos tecidos que vende 33%.

compra em Portugal pela vara Portuguesa e vende em espanha pela vara castelhana, que é + pequena que a vara portuguesa, tem menos um palmo que a vara portuguesa, o que significa q temos um lucro de 25%.

Resolução manipulativa

O trabalho desenvolvido por Beatriz e a sua colega de grupo, Joana, na Exposição Interactiva centrou-se, como já referido, no módulo Comprimento (Anexo 5) e incluiu a construção de padrões das antigas unidades de comprimento, a selecção de panos para a medição de comprimentos, bem como o apoio e orientação das crianças na realização das actividades de medição e de resolução de problemas. Assim, na primeira tarefa pretendiam, através da medição de diferentes comprimentos, orientar os alunos para a percepção de que, em certas situações, é necessário subdividir a unidade de medida (côvado) num determinado número de partes iguais e também dar a perceber a relação entre os comprimentos obtidos e as antigas designações que lhes eram atribuídos: nomes como *meia*, *terça*, *quarta*, *sesma* e *oitava* são encarados como designações de partes do côvado resultantes da sua subdivisão, respectivamente, em duas, três, quatro, seis e oito partes iguais. Por outro lado, Beatriz e Joana decidiram também explorar o facto do côvado ser uma unidade antropométrica, levando os alunos a construir o seu próprio côvado em cordel (figura 4.23) e a reflectir sobre as desvantagens desse facto.

Figura 4.23. O *côvado* como unidade antropométrica

Na sessão de trabalho em que a investidora conversou com Joana e Beatriz relativamente a esta experiência formativa, Beatriz, de um modo geral, corrobora todas afirmações e opiniões de Joana relativamente à Exposição, em particular, no que respeita ao sentimento de surpresa pela reacção positiva dos alunos à Exposição e às tarefas propostas. Note-se, porém, que Beatriz é pouco eloquente, não precisando o sentido das suas respostas, como se pode constatar no excerto abaixo reproduzido, em que apenas confirma as baixas expectativas inicialmente sentidas quanto ao interesse e envolvimento dos alunos na realização das tarefas planeadas para a Exposição:

> I (Inv) - Globalmente, o que é que vocês acharam da Exposição?
> (…)
> B (Beatriz) - Eu acho que correu bem.
> I - Sentiram-se bem? Sentiram-se recompensadas, apesar do muito trabalho que tiveram?
> B - Bastante.
> (…).
> I - Correu melhor do que estavam à espera?
> (…)
> I- Porquê, tinha expectativas baixas?
> B - Um bocadinho.
> I - Expectativas em relação ao envolvimento dos alunos?
> Beatriz –Talvez (ST, 03/03/06).

Beatriz colaborou também, durante a Exposição, na dinamização do módulo relativo à grandeza massa (na figura 4.24 apresenta-se uma visão geral desse módulo).

Figura 4.24. Aspecto geral do módulo “Massa” da Exposição Interactiva

Questionada sobre a forma como os alunos reagiram às tarefas do módulo relativo à grandeza massa e sobre o seu papel, Beatriz admite que os alunos se envolveram muito na comparação das massas, bem como no cálculo da soma (Figura 4.25). Aliás, o gosto, a vontade de pesar das crianças era tanta que “mesmo quando foi para somar … quando tinham dúvidas, eles iam logo pesar. Às vezes até tinham tendência a ir buscar logo (risos) as massinhas. Então eu dizia-lhes: «então pensem lá um bocadinho, não é necessário estar sempre a colocar. Então se um *arrátel* é igual a dois *meio-arrátel*, quantos arráteis é que são?" (ST, 03/03/06).

Figura 4.25. Comparação de massas na Exposição Interactiva

No que respeita ao problema proposto na segunda tarefa do módulo "Massa", Beatriz também reconhece que a sua ajuda foi importante, na medida em que a resolução da tarefa exigia a orientação dos alunos para o registo escrito dos dados e para a utilização da relação entre a onça e o arrátel, determinada na tarefa anterior: "Sim, depois punham a relação das onças que eles tinham, que duma para a outra era o dobro. Então em arráteis também tinha ... Eles faziam logo a conta ao lado" (Beatriz, ST, 03/03/06).

Em síntese, o desempenho de Beatriz na resolução manipulativa dos problemas da Exposição não é distinto do que foi dito em relação a Joana, até porque a investigadora teve ocasião de constatar que as duas constituíam uma equipa de trabalho bastante coesa (NC). Ainda que tenha intervido no módulo "Massa", só o fez ao nível da orientação dos alunos e, como a própria admitiu, seguindo as orientações dadas pelas colegas responsáveis pelo módulo, isto é, não saiu do planificado por estas (NC).

4.4.2. Prática pedagógica

4.4.2.1. Perspectivas sobre o ensino e aprendizagem da matemática

Beatriz reconhece que manteve com a matemática, ao longo do seu percurso escolar, uma relação de afectividade que se conservou em períodos de maiores dificuldades, como o do ensino secundário. As dificuldades vividas reflectiram-se num baixo nível de aproveitamento e culminaram com a reprovação em matemática no 12º ano. Embora admita não ser capaz de explicar a razão, a origem desse gosto - “a matemática foi sempre uma área que eu gostei, não sei explicar o verdadeiro motivo” (QT1, 10/06/05) - atribui-o a uma certa propensão para a compreensão dos assuntos: “talvez fosse aquela [disciplina] em que sem grande esforço percebia e entendia a matéria” (QT1, 10/06/05).

Do percurso escolar no ensino básico recorda a matemática como uma disciplina em que “se sentia à vontade e percebia rapidamente e sem dificuldades os problemas” que lhe eram colocados e os resolvia “com alguma facilidade” (QT2, 20/06/06). Porém, outras razões perpassam o discurso de Beatriz: “gosto de resolver exercícios que englobem números e de os perceber” (QT1, 10/06/05). Esta aparente afinidade com os números e o cálculo, reflecte-se também na hierarquização das suas preferências enquanto aluna, no ensino básico, no qual esse tema surge em primeiro lugar, seguido de Estatística e Probabilidades e de Álgebra.

Inquirida sobre o seu percurso escolar no ensino não superior, Beatriz recorda algumas das características positivas e negativas dos seus professores de matemática, a partir das quais parece poder inferir-se que Beatriz perspectiva um ensino da matemática que deve atender à articulação entre a teoria e a prática, sendo que a compreensão conceptual é considerada fundamental para a prática. O contraste que estabelece entre as aulas de dois dos seus professores do secundário é bem revelador desse ponto de vista:

> Recordo no meu segundo ano do 12º (…) um professor que explicava claramente e correctamente os conteúdos, resolvendo e aplicando problemas de uso corrente. Esse professor se fosse dos meus três anos do ensino secundário, acho que os meus conhecimento de matemática eram muito mais profundos e claros (…) Não gostei do meu professor (…) do 11º ano (…) limitava-se a colocar exercícios no quadro para resolver sem explicar os conteúdos (QT1, 11/06/05).

Deste modo, a introdução de conteúdos novos é a parte da aula que merece mais atenção, aquando da planificação. A reflexão que faz sobre a experiência de prática pedagógica no 1º CEB denuncia essa preocupação: “Tentava orientar [a planificação] de maneira que houvesse matéria nova todos os dias” (ENT, 21/06/05). Por esse motivo, e dada a valorização que Beatriz atribui à motivação dos alunos, a introdução dos conteúdos é encarada como um momento crucial da planificação e da aula. Assim, na sua opinião, importa envolver os alunos em actividades práticas dirigidas ao conteúdo que se pretende explorar e, simultaneamente, procurar orientar a atenção dos alunos para o conteúdo:

I (Inv) - No caso da matemática, o que é que gostou mais de fazer em sala de aula? Introduzir conteúdos novos, resolver problemas, …?
B (Beatriz) - Introduzir os conteúdos novos.
I - Foi o que mais gostou? E como é que fazia essa introdução?
B - Também envolvendo actividades práticas. Levando instrumentos com que eles gostassem de medir, usar, manusear. Por exemplo, quando utilizámos o metro, o litro. Eles adoraram medir o litro. Medir a capacidade, quanto é que tinha. Se tinha maior ou menor capacidade. Se um recipiente tinha um litro ou não.
I - Então quando preparava as aulas a sua principal preocupação era a introdução dos conteúdos? Ou estou a extrapolar demasiado?
B (Beatriz) - (risos) Não. Depois também, porque a seguir também tinha que ir, não é? De maneira que eles se apercebessem, conforme iam fazendo, ia introduzindo esses conteúdos, para cortar um bocado. Depois também tinha que escrever no quadro, para eles escreverem. Porque só assim … manusearem … não ficava lá nada. Chegar ao quadro e escrever, o que é que era o litro, o que é que era o metro… (ENT1,21/06/05)

Em nenhum momento da prática pedagógica nesse ciclo de ensino Beatriz refere a resolução de problemas como o eixo orientador da sua planificação. "Se fosse já matéria repetida, eles … (risos). Era uma desordem, porque já conheciam e diziam: «Ah, eu já sei isso». Perdiam o interesse" (ENT1, 21/06/05).

Inquirida sobre o grau de envolvimento dos alunos de 3º ano de escolaridade nas diferentes experiências de aprendizagem proporcionadas, refere claramente os exercícios de aplicação dos conteúdos como aqueles que mais envolvem e motivam os alunos:

I (Inv) - E das actividades que fez com eles, que os levou a desenvolver, em quais é que sentiu que os alunos se envolveram mais? Que tipo de actividades é que interessaram mais aos alunos? Os problemas, as situações problemáticas, se as resolveu; as actividades práticas, os exercícios, …?
B (Beatriz) - Eu acho que eles se motivavam muito pela resolução de exercícios. (…) Eles todos queriam participar e queriam ir. (…) Eles gostam muito da matemática, então resolver e ir resolver exercícios ao quadro, motiva-os muito. Portanto é uma das aulas em que nós conseguimos mantê-los calados e atentos. Porque eles gostam muito. Em geral.
(…)
I - Então está a falar de exercícios ou de problemas?
B - De exercícios e de problemas. Tanto uma coisa como a outra. Tanto podíamos lançar problemas, como exercícios.
I - Os problemas também os envolviam? Mais ou ao mesmo nível do que os exercícios?
B- Mais ou menos. Quando às vezes era mesmo problemas que havia várias resoluções. Um apresentava uma resolução diferente e depois todos queriam apresentar. «Mas eu não tenho assim, mas dá-me o mesmo resultado». Ah. Eles gostavam muito. Depois iam-me mostrar o resultado, depois para comparar.
I - Quando isso acontecia, como é que procedia com as várias resoluções diferentes?
B - Eram todas colocadas no quadro. Pronto, para eles conhecerem as várias formas. Caso exista uma diferente da nossa. Pronto, para eles conhecerem as diferentes estratégias.
(ENT1, 21/06/05)

Assim, os problemas são encarados, a par com os exercícios, como momentos de aplicação dos conteúdos leccionados e nunca como uma estratégia para a introdução de novos conteúdos. Note-se que, embora mostre reconhecer a diferença entre exercício e problema, evidencia uma visão de problema associada à existência de diferentes processos de resolução, característica esta manifestamente insuficiente para diferenciar os dois tipos de tarefas. Por outro lado, ao reconhecer o interesse e o grande envolvimento dos alunos na resolução de problemas, parece contrariar a afirmação de que os alunos perdem o interesse em aulas em que não são introduzidos novos conteúdos. Ainda que esteja implícita a importância atribuída à resolução de problemas, esta experiência de aprendizagem não foi encarada como o cerne da actividade matemática a proporcionar aos alunos de 3º ano de escolaridade.

Resolução de problemas

Durante o período em que decorre a Prática Pedagógica (PP) realizada numa turma de 6º ano escolaridade, no 2º CEB, Beatriz revela-se muito receptiva à planificação dos problemas históricos delineados no Percurso de Formação. Note-se que, no âmbito desta disciplina de PP, realiza o estágio integrada num grupo de três elementos, do qual faz também parte Joana, outra das futuras professoras do nosso estudo. De acordo com o planeado entre a professora cooperante e o grupo de estágio, cada uma das futuras professoras lecciona, alternadamente, pequenas unidades didácticas centradas sobre um ou dois tópicos dos vários temas programáticos. Assim, ressalte-se que, apesar de Beatriz estar presente nas sessões de trabalho desenvolvidas com Joana no âmbito dos tópicos Multiplicação e Divisão de Números Racionais, foi acompanhada mais em pormenor pela investigadora na planificação do tema Proporcionalidade Directa.

Beatriz propõe-se integrar os problemas históricos fazendo-os surgir a par com outros problemas de aplicação ao quotidiano, mencionando que, para além dela própria gostar dos problemas históricos, também a professora cooperante considera muito positiva a reacção dos alunos[156]. Curiosamente, na sessão de trabalho que se segue à aula em que explora o problema *Baratar Mercadorias*, pede à investigadora que lhe sugira outros problemas históricos. Esta atitude revela não só interesse por parte de Beatriz como também da sua professora cooperante que, inicialmente, não terá sido tão receptiva aos

[156] Refere-se aos problemas propostos, anteriormente, pela sua colega de grupo, Joana.

problemas históricos (o problema *O Quarto e Vintena* só foi integrado na prática de ensino concretizada pela colega de grupo, Joana, após alguma insistência da investigadora):

> B - Vou utilizá-los todos. Se tiver mais algum pode fornecer-mo.
> I - Então porquê?
> B - Porque estamos a gostar.
> I - Estamos, quem?
> B - Eu ... e a professora [cooperante] também está a achar que eles estão a aderir bem.
> I - Eu achei que lhe tinha proposto demasiados problemas e que a Beatriz só escolheria um ou dois.
> B - Professora, tenho planeado todos. Mas eu já lhe digo, é só orientar-me aqui nas minhas folhas. (ST, 21/04/06)

Beatriz planeia usar o problema *Baratar mercadorias* como aplicação do conceito de proporção, os problemas *Quebra de mercadorias* e *O comércio de panos entre Portugal e Castela* como aplicações do conceito de percentagem e pondera utilizar o problema *Companhia de Mercadores* para introduzir o conceito de proporcionalidade directa, embora ponha a hipótese de o utilizar como um problema de aplicação desse conceito.

Referindo-se ao problema *Quebra de mercadorias* afirma que, uma vez que já introduziu o conceito de percentagem, pretende orientar os alunos para o uso de uma proporção em que um dos extremos seja 100, pois esse é, em sua opinião, o processo de resolução mais simples para os alunos. Embora esta decisão possa indiciar que Beatriz não é receptiva a resoluções alternativas, pode também justificar-se pelo facto da questão do problema ter uma formulação aberta que obriga a uma cuidadosa orientação dos alunos[157].

> B - Vou. Vou fazer um problema de percentagens … que é este, *Quebra das mercadorias*. Vou fazer este e vou fazer este. Depois vou utilizar outros problemas de proporcionalidade e outros em que esta não exista.
> I - Mas vai introduzir o conceito de proporcionalidade directa?
> B- Sim, sim.
> I - A partir de uma outra situação que não esta da quebra das mercadorias.
> B - Não, vou introduzir a partir desta [refere-se ao problema *Companhia de mercadores*]. Acha muito complicado, professora?
> (…)
> Caso não o utilize para introduzir a proporcionalidade, vou dá-lo como aplicação. E também vou dar este aqui, antes de dar este. Já se introduziu a percentagem, para dar mais um problema de percentagem vou utilizar este [refere-se ao problema Quebra de Mercadoria].
> (…)

[157] Planeou-se propor o problema com a seguinte formulação: Uma nau carregou na Índia 400 quintais de gengibre e 300 quintais de pimenta. Dos 400 quintais de gengibre chegaram a Portugal 360 quintais e dos 300 quintais de pimenta foram descarregados apenas 267 quintais. a) Calcula a quebra sofrida em cada uma das mercadorias; b) Compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual deles sofreu a maior quebra.

> Depois então na próxima 5ª feira vou utilizar o problema dos panos. Ham … vou utilizar estes problemas, depois vou utilizar outros problemas envolvendo proporcionalidade e escalas. (ST, 21/04/06)

Numa reunião posterior, Beatriz partilha com a investigadora algumas dúvidas relativamente à possibilidade do problema *O comércio de panos entre Portugal e Castela* ser difícil para certos alunos da turma. Das suas palavras e silêncios, sendo aluna estagiária, transparece a ideia que não tem, ainda, uma percepção clara de como pode orientar a resolução do problema.

> I - Vamos lá Beatriz, qual é sua questão relativamente a este problema do comércio de panos entre Portugal e Castela?
> B - Aqui, a unidade usada em Portugal para medir a seda ... pronto, acho que era o côvado, não era?
> Aqui não sei se eles terão alguma dificuldade para chegar lá, em chegar a estes 33%. Não?
> I - Como é que a Beatriz acha que eles poderão chegar a essa percentagem?
> B - …
> I - Vamos olhar para o problema como um todo. Porque é que a Beatriz acha que eles vão ter dificuldade?
> B - Não sei (risos). Se calhar não. Quer dizer tendo ... quando eles vendem, colocando eles as ... pronto, vendo logo que o côvado ... quantos palmos tem ou … pronto fazendo assim a… fazendo tipo assim, eles vêem logo que ... um ganha 25% e o outro ganha 33%.
> I - Então se a Beatriz acha que eles têm dificuldade porque é que quer propor o problema?
> B - …
> I - Já vi que lhe fiz uma pergunta difícil.
> B -Hum. Digo que terão alguns, assim aqueles mais … os outros não sei … (ST, 01/05/06)

Por outro lado, o plano de aula que apresenta à investigadora afigura-se extenso pois Beatriz planeia propor vários problemas (alguns sugeridos pela professora cooperante), pelo que revela sentimentos ambivalentes relativamente à sua integração, pois reconhece que ainda não o incluiu na planificação, mas, ao mesmo tempo, considera que este representa uma oportunidade de recordar o conceito de percentagem. Perante as dúvidas de Beatriz o problema acabou por não ser incluído na planificação.

> B - Porque esse aí também era …era tipo para "acabar" a proporcionalidade e dar os gráficos de percentagem e esse era tipo para recordar um bocadinho as percentagens. Era esse o objectivo.
> I - Mas este problema demora algum tempo a explorar. Eu não tenho nada contra que utilize o problema, aliás até fui eu que lho propus. Acho é que tem aqui problemas a mais.
> B - Para uma aula. Ainda por cima 5ª feira à tarde.
> I - Ainda por cima uma 5ª feira à tarde e este problema demora algum tempo a explorar. Ainda não o incluiu na sua planificação?
> B - Não, não.
> I - Tem estado indecisa?
> B – [não responde (ST, 01/05/06).

Em síntese, a planificação delineada por Beatriz para a abordagem do tema está centrada na resolução de problemas. Todos os problemas históricos explorados são problemas de aplicação que exigem a familiarização dos alunos com a situação e em que os conceitos utilizados são motivados pela própria situação exposta no problema. Saliente-se que Beatriz, seguindo uma sugestão da investigadora na primeira aula do tema, recorreu a vários exemplos do quotidiano envolvendo o uso de razões (rótulos de alimentos, mapas, …) para introduzir o conceito de razão e, a partir deste, apresentar a percentagem como uma representação de uma razão de consequente 100 e a escala também como um tipo especial de razão que exprime a relação entre comprimentos no desenho e na realidade, o que conduziu à possibilidade de centrar as aulas seguintes em problemas que permitem reintroduzir e aprofundar esses conceitos:

> I - Deixe-me situar. Na 3ª feira foi a sua primeira aula? Deu o conceito de razão ..
> B - Dei percentagem e escalas. Dei vários exemplos de razões.
> I - Que era o que tinha planeado.
> B- Sim e introduzi também a proporção. Fizemos proporções, mas sem terem o conceito da identidade fundamental das proporções. Ontem é que através daquelas proporções que eles tinham resolvido, foram ver multiplicando … fazendo o produto dos extremos e o produto dos meios. (ST, 21/04/05)

<u>Papel do aluno e do professor</u>

Fruto da sua experiência enquanto aluna, Beatriz está bem ciente da importância que o professor assume na motivação dos alunos, mas sobretudo na promoção da aprendizagem. Referindo-se ao seu último professor de matemática do ensino secundário (ano em que repete a disciplina) diz: “esse professor se fosse dos meus três anos do ensino secundário, acho que os meus conhecimentos seriam muito mais profundos e claros” (ENT1, 11/06/05). Nesse sentido, a formação para a profissão parece reforçar essa convicção, “penso que temos um papel fundamental na aprendizagem dos alunos” (QT2, 20/06/06), e apontar para a necessidade de o professor pôr em prática um ensino da matemática motivador, que faça uso de estratégias que despertem o interesse dos alunos: “Temos que implementar um ensino motivador e interessante, com aplicações do dia-a-dia, para assim [os alunos] obterem sucesso escolar” (QT2, 20/06/06). Sobressai, deste modo, a ideia de que Beatriz entende o ensino e aprendizagem da matemática como um processo que deve atender à necessidade de motivar os alunos para as tarefas propostas nas aulas, recorrendo a aplicações da matemática que salientem o seu papel no quotidiano e desse modo promover a sua aprendizagem.

4.4.2.2. Prática de ensino

A análise da prática de ensino de Beatriz incide sobre a abordagem de três tarefas de resolução de problemas históricos: *Quebra de mercadorias*, *Baratar mercadorias* e *Companhia de mercadores*, todos eles integrados no tópico curricular Proporcionalidade Directa.

Ambiente de sala de aula

Beatriz desenvolve a sua prática pedagógica na mesma turma de 6º ano de escolaridade de Joana. Como já referido, trata-se de uma turma em que alguns alunos, sistematicamente, criam situações de perturbação do ambiente de sala de aula e cujas vozes se sobrepõem, muitas vezes às dos colegas e da própria professora, contribuindo para a criação de um ruído de fundo constante e para o desgaste de Beatriz, que assume o *stress* provado pela situação: "Depois nós queremos que as coisas corram cada vez melhor. Cada vez melhor e depois aparecem, assim, esses problemas. Ai, Jesus. E depois eu fico logo stressada" (ST, 21/04/06). Este desabafo de Beatriz ocorre a seguir a uma aula em que dois alunos tiveram comportamentos particularmente perturbadores, o que a levou a pedir-lhes que saíssem da aula: "eu queria dar as coisas e explicar e não me deixavam. Estavam lá dois meninos (…) Mandei os dois para a rua (…) estavam de uma maneira … Eu não sei o que é que tinham" (ST, 21/04/06). Como resultado dessa tomada de posição de Beatriz, os dois alunos, aproveitando as condições físicas da escola, "deram a volta e foram para a janela a fazer macacadas, para os que estavam na sala se rirem", culminando com uma tomada de posição da professora cooperante que "os levou ao Conselho Directivo" (ST, 21/04/06).

Apesar disso, o ambiente criado nas aulas por Beatriz é propício ao trabalho autónomo dos alunos, favorável à troca de ideias, à exposição de dificuldades e dúvidas. No período em que os alunos resolvem os problemas, Beatriz circula entre eles, observa o que fazem e responde às suas perguntas, notando-se que estes mantêm uma boa relação com a professora e se sentem à vontade para expor as suas dúvidas:

B (Beatriz) –Já fizeste a actividade, Nuno?
A (aluno) - Professora, não estou a perceber.
B - Então são dois mercadores, não era? Que era o que nos dizia. Como nós vimos, antigamente muitas pessoas em vez de pagarem, trocavam as mercadorias. Neste caso, eram duas pessoas, o André e o Joane e eles iam trocar o ferro pelo chumbo. Só que o ferro custava … a dinheiro, o preço a dinheiro, era de 3 cruzados e no baratar era mais elevado. Custava 4 cruzados e sabemos que o Joane também tinha o quê? Chumbo. O chumbo custava, em dinheiro, 6 cruzados e nós queremos saber a quanto era no baratar, que era a troca de mercadorias, quanto é que custava.
A - Mas assim vai ter que ser mais caro.
B - Vai ter que ser mais caro. Porquê? Porque no baratar era … quê? Mais elevado. Os produtos tinham preços mais elevados.
A - Só que aqui diz para ser igual.
B - O que é que tem que ser igual? O que é que tem que ser igual? Não é o dinheiro. O que é que tem que ser igual? (aula, 20/04/06)

Percebe-se também a existência de normas na sala de aula, nomeadamente nas idas ao quadro para resolver os problemas. No excerto seguinte percebe-se que os alunos estão habituados a ir ao quadro rotativamente, alertando Beatriz quando isso não acontece:

B (Beatriz) - Inês já fizeste? Queres lá ir fazer?
A (aluno)- Já lá fui, stora.
B -Já lá foste? Então vai outro. Já fizeste?
A - Eu ainda não fui ao quadro.
(…)
A - Oh stora, posso ir ao quadro?
B- Vai lá fazer, Anabela. (aula, 20/04/06)

<u>Exploração do contexto dos problemas</u>

Em todas as tarefas de resolução de problemas históricos propostas nas aulas, Beatriz revela uma notória preocupação com a forma como as tarefas são apresentadas aos alunos, bem como em termos da exploração do contexto histórico do problema.

Logo na primeira tarefa, a estratégia adoptada parece contribuir para despertar o interesse dos alunos, na medida em que é apresentada na forma de um desdobrável fechado com um fio de lã, que os alunos deverão abrir "sem rasgar ou desatar o nó" (aula, 20/04/06). Na folha de "rosto" do mesmo, Beatriz inclui a reprodução de uma imagem alusiva à época histórica do problema e um texto no qual se pode ler: "No interior deste desdobrável vais encontrar alguns desafios interessantes e motivadores de aprendizagem em matemática" (aula, 20/04/06). Também na aula em que propõe o problema *Quebra de mercadorias*, opta por distribuir aos alunos um pequeno texto introdutório, alusivo à época histórica do problema, apresentado sob a forma de um pequeno rolo que depois de desenrolado tem a forma de um marcador de livros. Esta ideia de Beatriz é globalmente bem recebida, se bem que haja alguma reacção inicial, de um ou dois alunos, ao facto se tratar de informação histórica, que parece ser rapidamente ultrapassada, pois a participação dos alunos na discussão do texto sugere interesse e entendimento daquilo que se está a discutir:

B (Beatriz) - Hoje vamos fazer, ouçam lá … Rui! … uma pequena actividade.
A (Aluno) - E eu pensei que era para utilizar como marcador.
B - E é para utilizarem. É para ler e serve como marcador.
A - É da História, não é professora?
B - Primeiro vamos ler um bocadinho da história.
A - História! História não.
B - Então leiam lá. Estão a ler aquilo que eu vos dei?
Já leram? João lê lá.
A - Beatriz! Francisco! Lê lá João. (aula, 27/04/06)

Assim, todos os problemas históricos propostos são precedidos da leitura de um texto curto no qual Beatriz integra aspectos históricos directamente relacionados com o problema e importantes para a sua compreensão, à qual se seguem algumas questões aos alunos, incidindo sobre o que acabaram de ler.

Orientação da actividade de resolução de problemas

Nos dois excertos seguintes, um deles relativo à aula em que Beatriz propõe o problema *Companhia de mercadores* (Figura 4.26) e o outro ao problema *Baratar mercadorias*, pode observar-se como conduz os alunos a traduzir por palavras suas o que acabaram de ler e os orienta para o problema que vai propor a seguir:

B (Beatriz) - Anabela começa lá a ler. (…).
A (Aluno) -No período áureo dos descobrimentos, era frequente dois ou mais indivíduos associarem-se de forma a poderem concretizar certos negócios. Formavam então a chamada Companhia, para a qual cada indivíduo entrava com uma determinada quantia de dinheiro …
[Beatriz tem de intervir para interpelar alunos distraídos]
(…)
A - Muitos desses negócios eram ocasionais e, uma vez terminados, era necessário dividir os lucros ou as perdas entre os companheiros. Ora, nem sempre os parceiros entravam com quantias iguais e por isso o cálculo do lucro ou das perdas de cada um era muito importante.
B - Então quem é que explica aquilo que a Anabela acabou de ler? Inês és capaz de explicar?
A - Eram pessoas que se juntavam e reuniam uma quantidade de dinheiro para formar um negócio.
B - Para formarem um negócio. Então e … o que é que acontecia?
A - As pessoas, cada pessoa entrava com quantias diferentes…

B - E depois no final, o que é que acontecia? …
Se entravam com quantias diferentes será que depois no final dividiam igual… ou o que é que acontecia?
A - Alguns ficavam com menos e outros com mais.
B - Quem é que ficava com menos e quem é que ficava com mais? Diz lá.
A - Quem levasse mais dinheiro
B - Quem entrasse com mais dinheiro também tinha direito, quê? A receber…
A - Mais dinheiro.
Lídia começa … lê lá agora o problema. (aula, 04/05/06)

Figura 4.26. O problema *Companhia de mercadores*

Dois mercadores Pedro e Luys fizeram uma companhia na qual Pedro pôs 20 cruzados e Luys 30. Os dois ganharam 35 cruzados. Pergunto: quanto caberá a cada um destes companheiros?

Nota: tem em conta que acabada a sociedade o contrato estabelecia que o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital com que cada um entrou na Companhia.

(Adaptado de Guiral e Pacheco,in Almeida,1994a, p. 263)

O mesmo acontece no problema *Baratar mercadorias* (Figura 4.27):

B - A igualdade do negócio. Quem é que me explica aquilo que estivemos a ler? O que era baratar as mercadorias, Filipa? (…)
B - Então antigamente o que é que faziam em vez de pagar as mercadorias? Inês.
A - Trocavam os produtos uns pelos outros.
B - Trocavam os produtos uns pelos outros. Então e onde é que eram os preços dos produtos mais elevados, quando trocavam os produtos ou quando pagavam a dinheiro?
A- Quando pagavam a dinheiro.
B - Quando pagavam a dinheiro? Vê lá.
A - Quando trocavam os produtos. (…)
B - Filipa começa lá a ler o primeiro problema. (aula, 20/04/06)

Figura 4.27. O problema *Baratar mercadorias*

Dois mercadores, André e Joane, querem baratar ferro por chumbo. André tem o ferro e o quintal do ferro vale, a dinheiro contado, 3 cruzados e, no barato, André põe-o a 4 cruzados. Joane tem o chumbo e o quintal de chumbo vale, a dinheiro contado 6 cruzados. Pergunto: a quanto deve Joane meter o chumbo no barato para que o barato seja igual e nenhum vá enganado?

(Adaptado Bento Fernandes, in de Almeida, 1994b, p.137).

Deste modo, Beatriz apenas propõe problemas históricos aos alunos uma vez exposta e clarificada a situação real do passado histórico que é focada em cada problema, o que lhe permite realçar, ainda que não directamente, o papel da matemática na resolução de problemas concretos do quotidiano de uma época histórica estudada pelos alunos. Essa leitura, seguida de questionamento sobre o que se acabou de ler, parece ser bem sucedida em termos de entendimento da situação exposta.

Após o período de contextualização histórica, Beatriz orienta os alunos para uma leitura atenta e em silêncio do enunciado do problema ou para uma leitura em voz alta do mesmo:

B (Beatriz) - (…) Vamos então resolver um problema …Aquilo que eu vos dei vocês, agora, podem usar como marcador.
[Beatriz distribui o problema]
B - Hugo estás a ler a actividade? Em vez de estares na conversa …[ruído de fundo]
(…)
B - Já toda a gente leu a actividade? Ainda não? Então vá, eu espero mais um bocadinho. Rui já leste a actividade? Olha que eu vou-te perguntar. (aula, 27/04/06)

Lido o enunciado do problema, Beatriz interpela os alunos de modo a certificar-se da compreensão do mesmo, pedindo, por exemplo, que o expliquem por palavras suas. Note-se que, em geral, as intervenções de Beatriz reduzem-se a curtas anuências, como é ilustrado pelo seguinte excerto relativo ao problema do *Baratar mercadorias*:

B (Beatriz) - Filipa começa lá a ler o primeiro problema.
A (aluno) - Dois mercadores, André e Joane, querem baratar ferro por chumbo. André tem o ferro e o quintal do ferro vale a dinheiro contado 3 cruzados e no barato André põe-o a 4 cruzados. Joane tem o chumbo e o quintal de chumbo vale a dinheiro contado 6 cruzados. Pergunto: a quanto deve Joane meter o chumbo no barato para que o barato seja igual e nenhum vá enganado?
B - Então o que é que nos diz … quem é que entendeu o problema? … Diz lá Ana. Então o que eu tinha? Eram dois mercadores …
A - Sim, o André tinha ferro e o Joane tinha chumbo.
B - Sim.
A - Queriam baratar os produtos.
B - Sim.
A - Então a dinheiro o ferro custava 3 cruzados
B - Sim.
A - E no barato custava 4 cruzados.
B - Ou seja, neste caso o ferro quando era a ... a quê?
A - A dinheiro…
B - A dinheiro custava 3 cruzados e à troca, os produtos já eram mais caros, já eram a quê? Já eram a 4 …
A - Cruzados..
B - Cruzados. E depois?
A - Joane tinha chumbo e …

B - Joane tinha chumbo
A - A dinheiro custava 6 cruzados.
B - Sim.
A - Mas nós queremos saber ..
B - Saber quê? Quanto é que valia
A - Quanto é que custava em baratar.
B - Em baratar.
A- Para que não vá enganado. (aula, 20/04/06)

Também no problema da *Companhia de mercadores*, Beatriz pede aos alunos que traduzam o problema por palavras suas, para a partir daí os conduzir à identificação dos elementos do problema, o que inclui a clarificação das condições dadas. Assim, começa por interpelar os alunos sobre o que é um contrato, seguindo-se a discussão das condições estabelecidas no contrato.

B - Quem é que explica o enunciado do problema? …Quem é que me explica o enunciado do problema? Diz lá, Patrícia.
A -Pedro e Luís fizeram uma companhia.
B - Sim.
A - Depois o Pedro entrou com 20 e o Luís com 30 e os dois ganharam a mesma quantia, 35.
B - 35. E agora o que é que temos de fazer?
Sim? Diz lá!
(…)
B - Então o que é que é um contrato? Alguém me sabe dizer o que é um contrato? …
Quem é que me sabe dizer o que é um contrato? …
Diz lá, Inês.
A - É um acordo…
B - É um acordo que os dois fizeram. Muito bem!
E o que é … como é … (…) Então, como é que o contrato era estabelecido? Carina, como é que o contrato era estabelecido? (aula, 04/05/06)

Porém, nem sempre Beatriz consegue orientar os alunos para a clarificação das condições dadas. Da análise da orientação da resolução do problema *Baratar mercadorias* depreende-se que, apesar de a maioria da turma ter percebido o que se pretende, há alunos que não conseguem traçar um plano de resolução por insuficiente compreensão e que Beatriz não parece ser capaz de reformular o seu discurso e as questões que faz. O diálogo seguinte é ilustrativo da dificuldade de Beatriz em conduzir o aluno para a apreensão do significado da expressão "para que o barato seja igual", sendo notória a incapacidade de reformular o discurso e as questões. Apesar de outro aluno que participa no diálogo apontar para uma igualdade entre razões, Beatriz não consegue explorar o porquê dessa tradução, nem o significado da razão entre o preço a dinheiro e no barato:

B (Beatriz) - Já fizeste a actividade, Nuno?

A(aluno)- Professora, não estou a perceber.
B -Então são dois mercadores, não era? Que era o que nos dizia. Como nós vimos, antigamente muitas pessoas em vez de pagarem trocavam as mercadorias. Neste caso, eram duas pessoas, o André e o Joane, e eles iam trocar o ferro pelo chumbo. Só que o ferro custava … a dinheiro, o preço a dinheiro, era de 3 cruzados e no baratar era mais elevado. Custava 4 cruzados e sabemos que o Joane também tinha o quê? Chumbo. O chumbo custava, em dinheiro, 6 cruzados e nós queremos saber a quanto era no baratar, que era a troca de mercadorias, quanto é que custava .
A - Mas assim vai ter que ser mais caro.
B - Vai ter que ser mais caro. Porquê? Porque no baratar era ... quê? Mais elevado. Os produtos tinham preços mais elevados.
A - Só que aqui diz para ser igual.
B - O que é que tem que ser igual? O que é que tem que ser igual? Não é o dinheiro. O que é que tem que ser igual?
A - As razões [resposta dada por outro aluno].
B - As razões. Muito bem.(…) Tem que ser igual de maneira que … o quê? Que nem um nem o outro vá enganado. Tem que se … aquilo que ele tem de pagar, tem de ser … tem de ser de ... igual ao ... ao … André, de modo que quê? De modo que nenhum fique enganado. É isso que quer dizer, não é que seja mais caro ou … (aula, 20/04/06)

Perante as dificuldades identificadas durante a resolução dos problemas, uma das estratégias usadas por Beatriz na orientação passa por fazer analogias com outras situações já trabalhadas nas aulas ou mais familiares aos alunos. Assim, por exemplo, no problema *Companhia de mercadores*, recorre a uma analogia com uma aposta no totoloto para clarificar os termos do contrato estabelecido:

A (aluno) - É para os dois ficarem com a mesma coisa?
B (Beatriz) - Não. Então o que é que o contrato estabelecia? O que é que o contrato estabelecia?
A - Oh, stora não percebo.
B - Então, por exemplo, eu vou jogar no totoloto ali com a Carolina. A Carolina tem menos dinheiro e então quer investir menos dinheiro no totoloto. Eu entro com 3 euros, ela entra com 2 euros e, depois, podíamos dizer o quê? No final, se ganharmos o totoloto podemos dividir ao meio, mas também podíamos chegar à conclusão que …? Ah, não. É melhor não. Eu entrei com mais dinheiro, também tenho direito a receber quê?…
A- Mais.
B - Mais dinheiro. É a mesma coisa aqui, com o Pedro e com Luís. Então o contrato estabelecia que o quê? Que quando se investia com mais capital, também tinha direito a receber mais dinheiro.
A - A stora recebia mais…
B - Eu iria receber mais. Então como é que iria… é o mesmo caso que … entre o Pedro e o Luís. Como é que ia ser repartido o lucro? Irias … diz lá, Ricardo! Iria ser repartido conforme quê…? (aula, 04/05/06)

Esta estratégia, que parece ter sido bem sucedida neste problema, nem sempre é bem conseguida, pois nos problemas históricos, *Baratar mercadorias* e *Quebra de mercadorias*, Beatriz tenta recorrer a analogias, mas não consegue explorá-las com êxito. Refira-se, como ilustração dessa situação, no segundo problema, a tentativa de orientar a atenção dos alunos para o uso corrente de razões de consequente 100, através da referência a informações nutricionais dos rótulos de produtos alimentares (situação já explorada em aula anterior), mas acaba por não conseguir concretizar a ideia que tem em mente, baralhando as situações e os termos:

> Beatriz - Então o que é que nós podemos ir fazer? Podemos comparar aquela quantidade com o quê? …Nós já estivemos a ver nos rótulos, por exemplo a quebra em quanto? … Por exemplo, em cada 100.
> [Há algumas intervenções dos alunos, pouco audíveis, que Beatriz não explora]
> B- Esta foi a quê? Fomos relacionar o quê? Fomos comparar o quê? Duas quantidades. A quebra e o total inicial. Isto é do gengibre. E da pimenta como é que ia ficar? Qual é que foi a quebra? (aula, 27/04/06)

A resolução de qualquer dos problemas históricos culmina com a ida de um aluno ao quadro, normalmente um aluno cuja resolução individual do problema já foi verificada. É de ressaltar o cuidado que Beatriz põe, neste momento, quer ao nível da apresentação da resolução, quer dos dados.

> B - Coloca …Tens que colocar os dados todos. [Beatriz dirige-se à aluna que está no quadro. Enquanto a aluna regista o seu processo de resolução, Beatriz circula pela sala e verifica o que os alunos fizeram]
> A- Oh stora, eu posso fazer assim?
> B - Mas isso … tinhas que colocar o quê? Tinhas que …?
> B - Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste? [dirige-se à aluna que está no quadro]
> B - Sim, mas tens que … tens que fazer ao contrário. [retoma o diálogo com a aluna no lugar]
> (…)
> Explica lá aos teus colegas, Anabela. Explica lá como é que tu fizeste. Francisco! Explica lá.
> [não é perceptível a resposta da aluna]
> B- (…) Sim. O André tinha quê? O André tinha ferro, não é?
> A - Sim.
> B -Então ... como é que tu podias colocar …? Tu colocaste logo aqui o resultado, podias quê? Então? Tínhamos o quê? A dinheiro, o preço do quê? Do ferro e do chumbo … Quanto é que custava o ferro em dinheiro?
> A - Três.
> B - Três. E no baratar?
> A - Quatro.
> B -E quanto é que custava o chumbo em dinheiro?
> A- Seis.
> B - Queríamos saber o quê? Quanto é que custava … o quê? No baratar. Quando quê? Quando trocavam. Aqui tinhas que colocar primeiro um ponto de interrogação, depois é que ias calcular. [Beatriz reformula a resolução escrita pela aluna que se limita à apresentação dos cálculos, sem indicação de uma igualdade entre razões]
> Porque é que tu fizeste assim? Porque é que tu resolveste assim?
> A -Eu fiz o seis vezes quatro, porque o seis era o preço do …
> B - Sim, mas porque é que tu multiplicaste assim?
> [não é perceptível a resposta da aluna]

B - Dá oito. E pudeste fazer assim, porquê? Porque existe quê? (…) Porque há uma relação existente entre quê? … Entre o preço, quê? Em dinheiro e à troca. Porquê? Porque tem de existir uma igualdade entre duas razões. Por isso é que fomos calcular o produto dos meios, que sabemos que é igual ao produto dos ... extremos.
Podes-te ir sentar.
O segundo problema é para resolver em casa (aula, 20/04/06).

Embora promova o uso de representações matemáticas adequadas em termos de terminologia e de símbolos, pode-se constatar como a resolução do problema termina abruptamente, com a informação de que o segundo problema constante do desdobrável, também ele relativo a uma situação de baratar mercadoria[158], é para resolver em casa. Apesar de alguns alunos referirem já o ter resolvido, o que indicia o interesse dos alunos pelo problema (histórico) e de chamarem Beatriz para que esta verifique a resolução, esta não altera a sua planificação e distribui o enunciado de outro problema envolvendo o conceito de escala. Leia-se o excerto seguinte, relativo à apreciação que faz da resolução apresentada por um aluno e note-se que, em vez de promover a apreciação crítica do processo de resolução, dá de imediato sugestões concretas de resolução do problema.

B – (…) O segundo problema é para resolver em casa.
A - Oh, stora. Vá lá, eu já fiz isto.
A - Está certo?
[Vários alunos chamam Beatriz, perguntando se era assim que se resolvia)
Al Era assim stora? Era assim?
B - Não sei. Acho que sim.
Não, não era assim.
Não, aqui tens que fazer a diferença. Não era assim. Era 10 e 5 e aqui era 12, porque o quê? Aqui é um 3. Aqui é um 3, não é? Porque aqui já é a diferença e aqui também tens de fazer a diferença do 15 com o 10.
Eu já cá venho ter contigo. Vou só distribuir a folha aos teus colegas .
[Beatriz distribui um novo problema]
B - Não é para resolver aqui. O segundo problema que eu vos dei é para fazer em casa.
[Há, neste momento, bastante ruído de fundo]
B - Estão a fazer a actividade? [Beatriz dirige-se à turma e de seguida retoma o diálogo com um aluno sobre o problema]
B - O que é que nos diz aqui? Que … Que no baratar ele custava mais 3 cruzados do que custava em dinheiro. Então temos que ir ver aqui no baratar, quanto é que custa a mais do que aqui em dinheiro. Porque no baratar custava 15 e em dinheiro custava 10. Quanto é que vai a mais aqui no baratar? Vai mais 5. Por isso é que temos que fazer a diferença de 15 por 10 que é para colocar assim, porque aqui não nos dizem quanto é que custa no baratar. Só nos dizem que no baratar custa mais … mais 3 cruzados do que a dinheiro. Então temos que saber aqui no baratar quanto é que custa a mais do que em dinheiro, que é para …

[158] Os mesmos André e Joane, fizeram outra barata. André tinha cera e o quintal dela valia a dinheiro 10 cruzados e na barata meteu-o a 15. Joane tinha açúcar e pôs o quintal, na dita barata, a 3 cruzados mais do que valia a dinheiro. E assim foi a barata boa e sem engano algum. Pergunta-se, agora: quanto valia, segundo isto, o quintal do açúcar de Joane e a como foi metido na barata?

A – Multiplicamos o 10 pelo 3 …
B - Não tens que fazer aqui a … Pronto, está correcto. E agora tens que fazer a di ... porque aqui o 3, era o quê? Era quanto valia a mais do que … Por exemplo, tu tinhas ... vendias a 3 e no baratar custava 6. Ou seja, custava mais 3 e aqui … eu não te digo ... eu só te digo que custa mais 3, tu vendes a 3 e eu digo que vendo … a 3 a mais que tu . Eu não te vou dizer que vendo a 3, tu é que vais concluir que eu vendo a ... 6 cruzados. Eu vendo a mais 3 cruzados do que tu. Mas aqui ele não nos diz a quanto é que vale a mais, diz só que eu vendo a 15 cruzados. Nós é que temos que fazer a diferença, para ver quanto é que eu vendia a mais no baratar do que no dinheiro (aula, 20/04/06).

Note-se que Beatriz, certamente pressionada pelo plano de aula elaborado e que previa a passagem para um problema envolvendo o conceito de escala, não dá oportunidade ao aluno de apresentar e justificar o seu processo de resolução, de modo a poder identificar e perceber o que é que eventualmente falhou no raciocínio deste. Em vez disso produz um discurso confuso no qual inclui uma tentativa de simplificação do problema, mas que resulta nalgumas imprecisões.

A estas dificuldades não será alheio o facto de Beatriz estar a realizar estágio e possuir pouca experiência profissional. Note-se que Beatriz realizou estágio no 1º CEB num grupo de quatro elementos e o de 2º CEB num grupo de três elementos, o que limita consideravelmente o número e o tempo de intervenção em sala de aula, de cada um dos elementos do grupo.

Ainda em termos da actividade de orientação da resolução de problemas há que notar uma evolução positiva de Beatriz na forma como orienta os alunos para a apreciação do processo de resolução. No último problema proposto, *Companhia de mercadores*, Beatriz aproveita o facto de uma aluna ter resolvido o problema por um processo diferente do seguido pela generalidade dos alunos, para confrontar os dois processos, chamando a atenção para os conceitos matemáticos usados em cada caso:

B - Não, então como é que nós fazemos? Diz lá.
A - Vamos dividir 50 por 35.
B - Sim…
A - Depois o resultado … é multiplicado por 20 e por 30.
B - Por exemplo, por exemplo. Pode ser. Porquê? Fomos ver, quê? Qual é que era aqui a constante, porque se já nos estão a dizer que é proporcional, fomos ver aqui qual é o valor de … qual é que é o valor da razão destas duas grandezas …, depois podemos logo multiplicar pelo capital com que o Pedro entrou, para saber qual é que era o lucro.
(…)
Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste, Anabela. Explica lá. Como é que tu fizeste?
A - Dividi o lucro pelo total.
B - Para veres o quê? O que é que é aquele 0,7? Diz lá, Maria.
A - É o valor do lucro dividido pelo capital …

B - E isso é o quê?
A - É o 35 a dividir por 50.
B - Sim, mas … como é que se chama aquele valor? …
A - Constante.
B - Constante. É a constante de proporcionalidade, porque dizem-nos que o lucro é proporcional ao capital, então podemos logo multiplicar aquele valor, aquela constante, pelos 20 cruzados que foi o capital que o Pedro entrou e depois pelos 30 que foi o capital com que o Luís entrou.
Mas a Inês resolveu de outra maneira. Anda cá …
Podes-te ir sentar.
Anda cá resolver, Inês.
(…)
B - Eu não consigo ouvir a Inês.
Para lá, Inês. Enquanto os teus colegas não se calarem, tu não explicas.
Shiu! Explica lá, Inês.
A - Eu fui multiplicar aquilo com que o Luís entrou pelos 35 e depois fui dividir pelos capitais que eles tinham.
B - A Inês foi resolver através de uma proporção. Porque nós sabemos que, o quê? Que as duas grandezas (…) são directamente proporcionais. Então a Inês foi resolver através de uma proporção. Se o …Nós sabemos o quê? Sabemos aqui qual é que foi o lucro e tínhamos o capital inicial. Se o Luís tinha entrado com 30 cruzados, ela queria saber qual tinha sido o lucro do Pedro, ... Através de uma proporção, … sabendo que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, vamos ver qual foi o lucro que o Pedro e o Luís tiveram (aula, 04/05/06).

Conteúdo matemático

Beatriz revela, por vezes, alguma dificuldade em canalizar a atenção dos alunos para o cerne dos conceitos matemáticos implícitos nos problemas. Isso é bem notório no problema *Quebra de mercadorias* que, talvez, por ter uma formulação mais aberta, é aquele cuja exploração é menos bem conseguida (aspecto também reconhecido na reflexão sobre a aula). Uma vez calculadas as quebras absolutas de pimenta e de gengibre, Beatriz, ao não dar tempo aos alunos para reflectirem sobre o significado, no contexto do problema, da razão entre a quebra e a massa inicial, não consegue fazer a ponte para a questão principal do problema. Assim, a escrita da razão entre a quebra e a massa inicial surge como algo que é sugerido por Beatriz e não como resultado da compreensão da necessidade de referenciar a quebra ao total inicial. Observe-se, no excerto seguinte, a transição algo abrupta entre o cálculo da quebra de cada um dos produtos e a passagem para a expressão da quebra relativa.

B (Beatriz) - Então o que é que vamos fazer? O que é que nos pede? Lídia. Inês o que é que nos pede?
A (Aluno) - Vamos calcular a quantidade de pimenta que se estragou.
B - E quanto é que tínhamos inicialmente?

A - 400 quintais.
B - E depois quando chegou a Portugal? Quanto é que tínhamos?
A - 360.
B - 360. Então o que é que temos de fazer para comparar as quebras? Diz lá Inês .
A- Temos que fazer a diferença.
B -Temos que fazer a diferença entre o quê? Entre a massa inicial que temos e a massa final com que chegou a Portugal.
A - Assim?
B- Assim. Muito bem. Vai lá fazer Nuno [pede a um aluno que resolva no quadro]. Eu quero sempre os dados ao lado.
(…)
B - Está correcto. Dá 33, Nuno.
B - Então qual é que foi a quebra que o gengibre sofreu? [Beatriz dirige-se à turma].
A - 40.
B - E de pimenta?
A- Ai, de pimenta, 33 quintais.
B- Trinta e três quintais. Podes-te ir sentar Nuno.
Maria, lê lá a segunda.
A - Compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual deles sofreu a maior quebra.
B - Então o que é que temos de fazer? …
Então o que é que acontece aqui? Nós não podemos quê? Comparar quantidades que quê? Com totais diferentes. Então, o que é que temos de fazer?
A - Temos de …
B- Temos de ir relacionar o quê? (pausa) a quebra sofrida com o quê? (pausa)
Quanto é que tínhamos inicialmente?
A - 400.
B - Então temos de ir relacionar a quebra sofrida com 400 e quê?
A - E a quebra sofrida com 300.
B -Só que mesmo assim ainda ficamos com quê? Com consequentes iguais ou diferentes?
A - Diferentes.
B- Diferentes. Então o que é que temos de fazer para ficarem com o mesmo consequente?
A- Através de uma proporção.
B - Através de uma proporção. Muito bem. E qual é que é o consequente? Qual é o consequente que a gente …Qual é que vai ser o consequente que nós queremos arranjar para depois ficarem com …? (aula, 27/04/06)

Apesar de orientar os alunos para a escrita da razão para representar a quebra relativa dos carregamentos de pimenta e gengibre, não salienta de forma clara o significado de cada uma das razões de modo a tornar clara a necessidade de, em cada caso, escrever razões equivalentes, mas com o mesmo consequente.

B - Ouçam lá. O que é que temos de fazer? Ele sofreu uma quebra de quanto? De 40 quintais. Em quantos?
A – Em 400.
B - Em 400, então temos que fazer o quê? Temos que ir relacionar o quê? Então temos de ir relacionar as duas quantidades, que é 40 sobre ...?
A - 400.
B - Sobre os 400, não é? Ele não perdeu 40 em 400?
A - Sim.
B - E quê? E ..

A - 33.
B - 33 em 300. Então façam lá. Só que depois o que é que acontece? O que é que nós temos ali? Temos o quê? Não temos o mesmo … (aula, 27/04/06)

Uma discussão mais orientada da situação poderia permitir que os alunos sugerissem a escrita de razões equivalentes e a partir do confronto entre as diferentes respostas ser discutida a vantagem do consequente 100. Assim, parece que nem todos compreendem a necessidade da escolha do consequente 100 para referenciar as duas quebras. Quando um aluno questiona directamente Beatriz sobre o porquê deste valor, esta não consegue dar uma resposta que justifique efectivamente essa escolha e a conecte com o uso de um sistema de numeração de base dez.

B (Beatriz) - O que é que tivemos de ir fazer? Tivemos de ir arranjar um padrão comum. Neste caso foi o 100.
A (Aluno) - Porque é que é 100?
B - Porque é que é 100? Vimos que a quebra que sofreu é no total que vinha, tinham totais diferentes. Não era? Gengibre e pimenta têm totais diferentes. Um tem 400, outro tem 300 e fomos tentar arranjar uma razão equivalente em que elas tivessem o mesmo consequente, para podermos comparar. Porque tinham consequentes diferentes.
(aula, 27/04/06)

Obtidas as razões com consequente 100, Beatriz pede a uma aluna que explique aos colegas como chegou aos valores dos antecedentes. Em resposta, a aluna descreve os cálculos realizados e Beatriz repete os procedimentos enunciados sem atender a aspectos conceptuais e de raciocínio:

B - Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste Inês. Porque é que tu fizeste assim. Ouçam o que a Inês vai explicar.
A - Fiz 40 vezes 100
B - Sim.
A- A dividir por 400.
B - A dividir por 400, porquê? O que é que nós aprendemos através da identidade fundamental das proporções? Que nós chegámos a ver através daquela tabela? Como é que era?
A - Era uma igualdade.
B - Uma igualdade. O produto dos …
A - Extremos
B - O produto dos extremos era igual ao produto de quê?
A - Dos meios.
B - Dos meios. Então foi o que a Inês fez aqui. Foi multiplicar os extremos e foi multiplicar o quê?
A - Os meios. [resposta da turma]
B -Os meios. Por isso é que aparece aqui 40 vezes 100 igual a 400 vezes aquilo que não sabemos. (…) E depois para sabermos quanto é que é este valor, ela foi dividir os 4000 pelos 400 e deu 10. Agora se vocês quiserem verificar realmente se dá o mesmo resultado, colocam 40 vezes 100 que dava 4000 e se multiplicarem agora, outra vez,

> 400 vezes 10, vai dar o mesmo resultado. Porquê? Porque o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. E a mesma coisa com a pimenta.
> Agora já podemos saber qual é que sofreu maior quebra. Qual é que foi? (aula, 27/04/06)

Note-se que, neste problema, Beatriz chama a atenção para a verificação da solução encontrada. Embora não concretize por escrito essa verificação, e a referência seja rápida, esta é uma etapa da resolução de problemas que apenas considerou neste problema e que as restantes alunas futuras professoras do estudo não têm em conta nos problemas históricos explorados.

Ainda que as conexões não estejam muito presentes na exploração didáctica que faz dos problemas históricos, tem o cuidado de chamar a atenção para as grandezas envolvidas em cada problema e para as relações que se pretendem estabelecer. Por exemplo, no problema *Quebra de mercadorias*, chama explicitamente a atenção dos alunos para o estabelecimento de relações entre diferentes massas:

> B (Beatriz)- (…) Então o que é que temos de fazer para comparar as quebras? Diz lá, Inês.
> A (aluno) - Temos que fazer a diferença.
> B -Temos que fazer a diferença entre o quê? Entre a massa inicial que temos e a massa final com que chegou a Portugal.
> A - Assim?
> B - Assim. Muito bem. (aula, 27/04/06)

Ou então no problema *Companhia de mercadores*, em que com a ajuda dos alunos se torna claro que as quantias de dinheiro referidas no enunciado são de diferentes naturezas.

> B (Beatriz)- Então, quais é que são as grandezas aqui envolvidas? [ruído de fundo] Diz lá. … As grandezas, quais são as grandezas? O que é que nós entendemos por grandezas? … O que é que nós entendemos por grandezas? … Então, nos outros problemas que nós fizemos, quais é que eram as grandezas?
> [comentário: ouvem-se alguns alunos, provavelmente a responder, mas não é perceptível o que dizem]
> B - Ham, diz lá.
> [não se percebe a intervenção do aluno]
> B - Sim, e agora nesta situação?
> [não se percebe a intervenção do aluno]
> B - Neste caso é quê? … O capital com que cada um entrou e depois … e o quê?
> A (aluno) - E o que ganhou.
> B - E o lucro, o que ganhou. Então, o que é que vamos comparar? Vamos comparar o quê, neste caso?
> A - O lucro e o que deu.
> B - O que ganhou que é o lucro e o que … e o capital inicial que foi o que cada um deu.
> (aula, 04/05/06)

Em termos de conteúdo matemático e porque todos os problemas históricos explorados por Beatriz se inserem no tópico Proporcionalidade Directa, é de referir que, no problema da *Companhia de mercadores*, Beatriz sugere aos alunos a representação dos dados na forma de tabela. Nota-se porém alguma dificuldade em expressar, de forma clara, essa ideia: "façam … uma grelhazinha e depois colocam o capital inicial, o que cada um deu … fazem … fazem, tipo o quê? … Podem fazer assim, o Pedro e o Luys, depois colocam o capital com que cada um entrou e depois o lucro" (aula, 04/05/06). Porém, aquando da resolução no quadro orienta explicitamente o aluno para essa representação, que acaba por se tornar muito sugestiva para os alunos.

É de referir a propósito que esse problema inclui uma questão em que se pede aos alunos que expliquem como é que os lucros devem ser repartidos. Beatriz conduz relativamente bem a discussão, tornando claras as condições do contrato, mas no que respeita ao conceito de proporcionalidade directa revela alguma dificuldade em explicá-lo aos alunos. Quando um aluno a questiona sobre o significado do termo constante, aplicado a uma razão, Beatriz estabelece uma analogia com uma outra tarefa proposta no início da aula, todavia não se certifica se o aluno realmente esclareceu a sua dúvida. Embora não se possa dizer que expresse o conceito de forma incorrecta, é de notar que a resposta não se centra no problema que os alunos estão a resolver e como tal não consegue explicar o significado da razão entre o capital inicial e o lucro.

B (Beatriz) - Neste caso o quê? Então diz assim «o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital», então o lucro tem de ser proporcional ao capital, o que é que queremos dizer com proporcional?
Diz o que é que ias a dizer, Inês.
A (aluno) - Penso que proporcional … [não se percebe em virtude da existência de ruído de fundo]
B - Ou seja, a grandeza … vamos comparar as duas grandezas, o capital inicial e o quê…?
A – O lucro.
B - E o lucro. A razão entre essas duas … o que é que tem de acontecer? … entre essas grandezas, o que é que tem de ser?
A- Proporcional.
B – As grandezas têm de ser directamente proporcionais… ou seja a razão tem de ser quê?
A - Directamente proporcional.
B - Sim, têm que ser directamente proporcional e tem de ser quê? … Con…
A - Constante.
B - Tem que ser constante. Então façam lá então, agora a actividade.
Diz…
A - Não sei o que é constante.
B - Um valor, um valor … ouve lá. Aquilo que estivemos a ver…
(…)
A - O que é constante?

B - O que é constante? É um valor …é … Como é que eu hei-de explicar? A razão … Então ouve lá. Nós tínhamos quê? Duas grandezas. Há pouco tínhamos o quê? O preço e o quilograma, nós fomos, nós fomos fazer o quê? Comparar aquelas duas grandezas … fomos ver o quê? A razão entre elas e deu quê? Sempre o mesmo …
A – Valor.
B - Valor. Que é constante, aquele valor …aquele quociente entre aquelas duas grandezas é sempre constante … o valor é sempre o mesmo. (aula, 04/05/06)

É curioso referir a reacção de estranheza dos alunos quando se dão conta que a resposta à primeira questão da tarefa se resume a explicar os termos do contrato e que não inclui quaisquer cálculos, o que revela que os alunos não estão habituados a expressar por escrito, ideias matemáticas. Beatriz tem, no entanto, o cuidado de não deixar a resposta apenas a um nível oral e pede a um aluno que a registe no quadro.

A - Stora, nós não fizemos a primeira.
B - Então, não é isso que estamos a fazer?
A - Não stora. Então e a resposta?
B - Não há contas. É só para responder assim. É só para interpretar.
(…)
B - Vai lá escrever então ao quadro, Ricardo (aula, 04/05/06).

Ainda que Beatriz revele algumas dificuldades para a percepção dos conceitos e relações matemáticas que pretende explorar com os problemas históricos, estas podem ser encaradas como um reflexo do facto de estar em período de estágio.

4.4.2.3. Reflexão sobre a prática de ensino

A reflexão sobre a prática de ensino é entendida por Beatriz como um momento importante da sua prática pedagógica: "É através da reflexão que a gente vê, que consegue planear também melhor … para que as próximas aulas corram melhor" (ENT3, 27/06/06). Assim, assume que "é nos momentos de reflexão que "reflicto" sobre os aspectos bons e sobre aqueles que deveriam ser melhores" (QT2, 20/06/06).

Na reflexão global que faz sobre a prática de ensino no 1º CEB, Beatriz parece associá-la sobretudo à atitude e à reacção dos alunos perante as tarefas propostas. Assim, no caso da área de matemática considera que esta decorreu de acordo com o planeado, não destacando qualquer aspecto positivo, ou menos positivo. Como se pode perceber do excerto a seguir reproduzido, não parece sentir necessidade de reflectir sobre a sua prática de ensino, quando a atitude dos alunos revela interesse e entusiasmo pela realização das actividades propostas.

I (Inv) - Não se lembra de nenhum episódio de aula que ache que lhe tenha corrido menos bem?
B (Beatriz) - Não. Bem, em todas pode haver falhas. É normal.
I - Sim, mas refiro-me a algo que a tenha levado a pensar: «não me correu muito bem. Devia ter feito de outra maneira». Ou, em contrapartida, chegar ao final da aula e dizer: «Correu mesmo bem. Correu até melhor do que eu estava à espera».
B - Não. Correu-me normalmente assim como planeei, … nem melhor, nem pior. Claro que a gente, às vezes, quer sempre ter o melhor. Mas assim … negativamente, negativamente acho que nunca aconteceu. Em certas disciplinas, sem ser matemática, pensei: «não me correu nada bem isto», mas na matemática, como é uma área que eles gostavam e gostavam de participar, não houve assim nenhuma … (ENT1, 21/06/05)

É de notar, a propósito da prática pedagógica no 1º CEB, que, tal como colegas de outros núcleos de estágio (por exemplo, Inês), refere que alguns dos guiões orientadores da planificação em matemática (distribuídos às futuras professoras em estágio no âmbito da disciplina de Prática Pedagógica II) incluíam tópicos já abordados na turma por outros grupos de estágio ou pela própria professora cooperante. “Às vezes, acabava por acontecer que alguma matéria que nos era dada, já tinha sido dada ou pela professora [professora cooperante] ou por outro grupo de estágio” (ENT1, 21/06/05). Ora, essa situação surge como um factor de perturbação na sua prática de ensino, na medida em que admite: “Nós era, tipo, … revermos. Só que, às vezes, criava um certo barulho na sala. A turma já era um bocadinho barulhenta e então …” (ENT1, 21/06/05). Como transparece destas palavras e decorre da forma como Beatriz perspectiva o ensino da matemática, tais aulas acabam por ser aulas em que nada de novo é proposto aos alunos. Isto é, em que a ausência de um conteúdo novo para ensinar aos alunos, parece ser um obstáculo à concretização de outras experiências de ensino e aprendizagem enriquecedoras do conhecimento matemático dos alunos, como, por exemplo, a resolução de problemas. Não é por isso de estranhar que Beatriz não valorize, no 1º CEB, explicitamente, a resolução de problemas como estratégia de ensino e aprendizagem.

Inv - E das actividades que fez com eles, que os levou a desenvolver, em quais é que sentiu que os alunos se envolveram mais? Que tipo de actividades é que interessavam mais aos alunos? Os problemas, as situações problemáticas, se as resolveu; as actividades práticas, os exercícios, … ?
Beatriz - Eu acho que eles se motivavam muito pela resolução de exercícios. (…) Eles gostam muito da matemática, então resolver e ir resolver exercícios ao quadro, motiva-os muito. Portanto é uma das aulas em que nós conseguimos mantê-los calados e atentos. Porque eles gostam muito. (ENT1, 21/06/05)

Questionada sobre se quando refere exercícios também inclui nessa designação os problemas, Beatriz confirma que se refere a ambos.

I - Então está a falar de exercícios ou de problemas?
B - De exercícios e de problemas. Tanto uma coisa como a outra. Tanto podíamos lançar problemas, como exercícios.
I - Os problemas também os envolviam? Mais ou ao mesmo nível do que os exercícios?
B - Mais ou menos. Quando às vezes era mesmo problemas, em que havia várias resoluções … Um apresentava uma resolução diferente e depois todos queriam apresentar (ENT1, 21/06/05).

Porém quando inquirida sobre o que entende ser uma aula de matemática no 1º CEB, depreende-se das suas palavras que se refere a exercícios que traduzam situações do quotidiano, enquadrados por muitos autores na categoria de problemas de palavras.

I - Então neste momento de final de PP, o que é, para si, uma aula de matemática para o 1º CEB?
B (risos) - Uma aula de matemática … tem de envolver também actividades práticas, para eles verem. (…) Dando exemplos, mesmo da nossa vida real e depois resoluções de exercícios não só teóricos, mas também práticos onde … tipo: um tanque com água, qual é que é a capacidade do tanque. Ou tinha tantos litros … e gastaram-se … Tipo situações que envolvam o quotidiano (ENT1, 21/06/05).

Ainda sobre o processo de ensino e aprendizagem, Beatriz mostra a importância que atribui à confrontação de diferentes processos de resolução, incentivando os alunos a registarem no quadro diferentes resoluções. Das suas palavras transparece também o reconhecimento do interesse dos alunos pela resolução de problemas.

B - Mais ou menos. Quando às vezes era mesmo problemas, que havia várias resoluções. Um apresentava uma resolução diferente e depois todos queriam apresentar. «Mas eu não tenho assim, mas dá-me o mesmo resultado». Ah. Eles gostavam muito. Depois iam-me mostrar o resultado, depois para comparar.
I - Quando isso acontecia, como é que procedia com as várias resoluções diferentes?
B - Eram todas colocadas no quadro. Pronto, para eles conhecerem as várias formas. Caso exista uma diferente da nossa. Pronto, para eles conhecerem as diferentes estratégias. (ENT1,21/06/05)

Os problemas de natureza pedagógica surgidos, sobretudo, na prática de ensino no 2º ciclo são uma fonte de angústia e stresse para Beatriz, na medida em que reconhece a repercussão negativa que as atitudes e acções de alguns alunos têm sobre a turma: “Eu queria dar as coisas, explicar as coisas e não me deixavam …conseguem perturbar os que querem participar” (ST, 21/04/06) e também sobre si própria e, consequentemente, sobre a sua própria prestação: “nós queremos que as coisas corram cada vez melhor (…) depois aparecem assim esses problemas (…) E depois eu fico logo stressada” (ST21/04/06). De facto, na reflexão sobre a orientação da resolução do problema *Baratar mercadorias*, reconhece que os acontecimentos iniciais da aula, relacionados com o comportamento de dois alunos, tiveram implicação na forma como orientou os alunos, levando-a a esquecer-se, por exemplo, de promover a confrontação de diferentes processos de resolução do problema. Referindo-se a uma aluna que seguiu um processo de resolução diferente do dos colegas, Beatriz declara:

> Depois esqueci-me, com aquele stress todo. (…) Pensei «ainda bem que ela resolveu assim». Era para pôr as duas resoluções no quadro, depois acabei por me esquecer, porque a maior parte resolveu da outra maneira. Ela chegou lá por esse raciocínio, mas fez também pelo produto dos extremos. Mas não cheguei a falar nisso à turma toda (ST21/04/06).

No que se refere às aulas em que planeou e propôs aos alunos a resolução de problemas históricos, a reflexão de Beatriz revela alguma capacidade de análise crítica quer das tarefas propostas quer da forma como orientou os alunos. Relativamente ao primeiro dos problemas propostos, *Baratar mercadorias*, reconhece que a estratégia delineada foi eficaz, que se sentiu à vontade e que os alunos reagiram bem ao problema, não registando dificuldades de maior na sua resolução.

> I (Inv) - E os alunos reagiram bem ao problema?
> B (Beatriz) - Sim, sim. Sim, eles, por acaso … e resolveram logo através da ... pronto, já tínhamos descoberto aqui a identidade fundamental [refere-se a uma tarefa anterior proposta na mesma aula].
> I - Mas eles identificaram-no como um problema resolúvel através duma proporção?
> B - Identificaram.
> I - Ou foi a Beatriz que os orientou nesse sentido?
> B - Não, eles identificaram.
> I - E justificaram porquê?
> B - Sim. … Estavam a comparar as relações.
> I - Eles leram este pequenino texto?
> B - Leram e explicaram por palavras suas, porque eu depois perguntei (ST, 21/04/06).

Nesse sentido, referindo-se à forma como ajudou os alunos a compreender o problema como uma situação resolúvel através de uma proporção, salienta como aspecto positivo o facto de ter levado os alunos a organizar os dados sob a forma de tabela.

> O problema deles em entender o problema era ... qual foi o preço… Qual era o preço e depois qual era ... o preço à troca. Então eles estavam a confundir os valores. Só que depois organizamos no quadro, assim tipo uma tabela e depois eles através daquela tabela como tinha sido registado o preço do ferro e do chumbo em dinheiro e depois à troca. Eles automaticamente viam que à troca faltava o preço do chumbo … ham ... podiam ir através de uma proporção. (…) Eu acho que nesse aí, eles ... acho que, pronto, organizando assim, eles chegaram lá facilmente (ST, 22/05/06).

Porém, no segundo problema proposto, *Quebra de mercadorias*, Beatriz afirma que os alunos tiveram alguma dificuldade em perceber que, para dar resposta à questão de saber qual das mercadorias sofrera uma maior quebra, é necessário relacionar a quebra e o carregamento inicial e, depois disso, obter uma representação que permita fazer uma comparação directa. Só que depois tinham dificuldade em … Pronto, tinham que comparar a quebra com o capital inicial … eles aí … não entendiam muito bem porque é que tinham que comparar com a carga inicial (ST, 22/05/06). Deste modo, admite que, ao ver-se confrontada com a necessidade de orientar os alunos, sentiu algumas dificuldades em fazê-lo, mas que o facto de verificar que alguns conseguiram contornar o obstáculo e dar resposta à questão a tranquilizou e lhe deu maior confiança.

I - O que é que a Beatriz sentiu? Que eles não perceberam a situação?
B - No início tiveram… A primeira alínea foi logo. Essa chegaram logo lá, a segunda é que tiveram um bocadinho mais de dificuldade. Pronto, tinham que ver .. tinham de arranjar o mesmo consequente, nesse caso 100 ou então dividir os termos. Porque eles diziam logo que aquilo era a quebra, o 30 e o 40. Depois teve que ser com alguma ajuda ... que tinham que comparar a quebra com o total inicial. Depois neste caso ainda não podiam comparar porque não tinham o mesmo consequente. Mas depois chegaram lá.
I - E a Beatriz sentiu muita dificuldade em orientá-los para chegarem onde pretendia?
B- No início senti alguma, mas depois … vi que alguns ... os outros assim mais fracos não, mas aqueles que tinham maior capacidades começaram logo a lá chegar e depois a gente fica, assim, com um bocadinho mais de confiança (ST, 01/05/06).

Questionada sobre a razão das dificuldades identificadas, Beatriz admite que estas possam estar associadas à formulação do problema, pelo que considera que as poderia ter ultrapassado chamando, desde o início, a atenção dos alunos para a necessidade de referenciar as quebras a totais iguais:

I - Não sentiu que o problema foi difícil para eles? Ou melhor a alínea b porque foi essa que causou mais problemas.
B - Sim, sim.
I - Achou-a difícil ao nível da formulação?
B - Não sei, talvez.
I - Se fosse agora como é que formularia a questão?
B - … Sei lá … talvez chamando-lhes logo a atenção que tinham que comparar a ... que neste caso tinham totais diferentes, teriam que ficar com o mesmo … teriam que ter totais iguais neste caso, como é que eles poderiam ficar com o mesmo consequente.
(ST, 01/05/06)

4.4.3. Formação e Profissão

Apesar da sua primeira opção na candidatura ao ensino superior ter sido enfermagem, aponta como motivo principal para a candidatura ao curso que frequenta sempre ter gostado de Matemática e Ciências da Natureza. A sua “paixão” pelas ciências está associada à necessidade de saber o porquê das coisas e dos factos (QT1, 11/06/06), à motivação que sempre sentiu pela descoberta (QT2, 20/06/06). Quanto à matemática, apesar das dificuldades e alguma desorientação sentida no início do ensino secundário, recorda que desde muito jovem se sentiu motivada para a matemática: “Desde criança que a área de matemática sempre me motivou, não sei se pelo facto de resolver com alguma facilidade as situações que me eram colocadas “ (QT2, 20/06/06). Na sua memória, guarda também o desejo de ser professora de matemática: “Lembro-me que já nesse tempo [criança] dizia que queria ser professora de matemática, apesar de haver uma altura em que dizia que não, mais propriamente no 10º ano” (QT2, 20/06/06). No momento em que termina o curso sente reforçada a certeza de que gosta de ser professora e que “trabalhando com crianças sente-se realizada” (QT2, 20/06/06).

4.4.3.1. Relacionamento com o curso e com a profissão de professora de matemática

Relativamente ao percurso escolar na Escola Superior de Educação, no qual assinala a ausência de qualquer reprovação, Beatriz considera que a dedicação e o interesse que pôs na realização das tarefas propostas lhe permitiu atingir um bom nível de desempenho em todas as disciplinas: “Sou uma aluna que tenho as minhas limitações (…) Contudo sou (…) aplicada em tudo o que me empenho e é graças a isso que consigo obter o sucesso que tenho neste momento” (QT2, 20/06/06).

No que respeita à formação em matemática e em didáctica da matemática, realça o facto da formação lhe permitir “aprofundar diferentes domínios do conhecimento matemático” (QT2, 20/06/06) e destaca, especialmente, as disciplinas relacionadas com a didáctica e a história da matemática como aquelas com que mais se identificou, na medida em sente que as tarefas propostas contribuíram para a sua formação profissional.

> Fiquei com bastantes conhecimentos de matemática, assim como de metodologias de ensino para poder aplicar na minha prática.
> (…)
> Penso que a didáctica da matemática e a história da matemática foram as disciplinas com as quais mais me identifiquei, pois nelas enfrentámos desafios que nos permitiram ser melhores professores (QT2, 20/06/06).

Por outro lado, sendo de opinião que a formação na área de matemática proporcionou “um conhecimento bastante razoável, para além dos conhecimentos que são necessários para a docência no 1º e 2º ciclos” (QT1, 11/06/05), Beatriz reconhece, após a experiência de prática pedagógica no 1º CEB, como uma lacuna da formação, o facto de nem sempre serem revisitados os conteúdos mais elementares. Embora os exemplos que dá respeitem às áreas de português e ciências, é de salientar que Beatriz teve o apoio da investigadora ao longo da PP no 1º CEB e que, como a própria reconhece, este teve reflexo na sua prática de ensino.

Em termos de preparação didáctica, considera ter alcançado um bom nível, quer para a docência em todas as áreas no 1º ciclo quer, em particular, para a docência da matemática no 1º e 2º ciclos do EB (QT1, 11/06/05; QT2, 20/06/06). Beatriz destaca como pontos positivos da formação o sentir que consegue transmitir os conteúdos aos alunos, bem como seleccionar estratégias diferentes, motivadoras e facilitadoras da participação dos alunos. Embora admita que tem ainda muitos aspectos a melhorar, sente que o exercício futuro da profissão lhe dará a oportunidade de os ultrapassar "de forma a ser uma boa profissional" (QT2, 20/06/06). Nesse sentido, faz um balanço muito favorável da experiência de prática pedagógica que, em sua opinião, proporciona a oportunidade de pôr em prática os conhecimentos teóricos adquiridos durante a formação como, por exemplo, a planificação das aulas, a selecção de estratégias de ensino motivadoras, bem como outros aspectos relacionados com a maneira de estar e lidar com uma turma ou, mesmo, com a colocação correcta da voz. (QT1, 11/06/05; QT2, 20/06/06). Um outro aspecto que sobressai da experiência de prática pedagógica relaciona-se com a necessidade que sentiu de revisitar "conteúdos simples", um pouco esquecidos e que, até essa altura, lhe passavam despercebidos (QT2, 11/06/05).

Questionada sobre os seus interesses em termos de nível de ensino em que gostaria de vir a exercer a profissão, Beatriz mostra não sentir quaisquer dúvidas sobre a existência de uma maior afinidade relativamente ao 2º ciclo do EB. De entre as razões apontadas, destaca-se o facto de isso lhe permitir um trabalho mais relacionado com as duas áreas com que mais se identifica e que mais gosta de leccionar, a matemática e as ciências. Porém, é com a matemática que mais se identifica: "adoro explicar matemática, é a área que eu gosto mais, sinto-me motivada, empenhada" (QT1, 11/06/05). Outra das razões que a leva a preferir o 2º ciclo prende-se com a idade dos alunos, pois acredita que a sua maior maturidade permitirá que estes não se distraiam tão facilmente como no 1º ciclo (QT1, 11/06/05), além de que considera que esse nível de ensino lhe proporciona mais oportunidades de implementação de estratégias e metodologias mais diversificadas e motivadoras (QT2, 20/06/06).

Apesar de consciente dos momentos difíceis que a esperam, Beatriz mantém as expectativas em relação à profissão que escolheu e fará tudo o que for necessário para a poder vir a exercer: “Eu tenho boas expectativas, apesar da situação a nível do ensino não ser fácil (…) Neste momento posso não encontrar trabalho, mas (…) o importante é não desistir e lutar por aquilo que nós queremos e se for preciso fazer mais formação vou fazê-la” (QT2, 20/06/06).

4.4.3.2. Percepção sobre o contributo do Percurso de Formação para a formação profissional

Beatriz encara o trabalho desenvolvido no Percurso de Formação (PF) como muito relevante, na medida em que sente que este a ajudou a “explorar, usar e analisar mais correctamente diversos materiais como manuais e documentos curriculares” e também a “explorar situações problemáticas” (QT2, 20/06/06). Assim, em sua opinião, o PF favoreceu “uma melhor prática pedagógica e uma melhor formação como docente” (QT2, 20/06/06). Por exemplo, no final da prática pedagógica no 1º CEB, destaca o contributo positivo do trabalho desenvolvido em termos de formação didáctica que se fez notar no processo de ensino e aprendizagem e na imagem da matemática transmitida aos alunos de 3º ano de escolaridade:

> I (Inv) - Centremo-nos em Geometria I e II e também nas reuniões que fomos tendo ao longo da prática. O nosso trabalho serviu para alguma coisa em termos de prática de ensino no 1º ciclo?
> B (Beatriz) - Acho que ajudou bastante (…) Termos ido ao Instituto Português da Qualidade, acho que nos ajudou termos uma ideia do metro, como é que apareceu. Acho que nos ajudou bastante neste semestre de Prática Pedagógica, porque nós fizemos os teatros do metro e do litro, guiando-nos por aquilo que aprendemos lá e ouvimos no IPQ e acho que nos ajudou bastante em relação a isso.
> I - E os pequeninos, como é que reagiram, em sua opinião, a essas dramatizações?
> B - Eles gostaram, eles ficavam … (…) quando se fazia uma dramatização, quer do litro, quer fosse do metro, quer fosse do que fosse, eles ficavam sempre calados. «Já acabou?», perguntavam quando acabava.
> I - E depois, acha que ficou alguma coisa nas cabeças deles relativamente à mensagem que vocês pretendiam passar?
> B - Eu acho que sim, pelo menos … não ficaram a saber uma data, quando é que começou o metro, mas ficaram com aquela ideia de que o metro não começou logo a ser utilizado. Utilizavam-se antigamente outras medidas. Acho que eles ficaram com essa ideia. Não propriamente como é que se chamavam ou o que eram, mas ficaram com ideia que houve várias evoluções, até chegarmos ao metro e a mesma coisa para o litro.
> (ENT1, 11/06/05)

Porém, embora Beatriz releve a componente de formação em história da matemática para a sua prática de ensino, não parece ter inicialmente uma predisposição favorável a outra forma de integração da história da matemática em sala de aula que não através de dramatizações. Por exemplo, questionada sobre se tinha integrado na sua prática de ensino algum dos problemas históricos resolvidos em Geometria, assume que além de não lhe ter ocorrido essa ideia, os considera um "bocadinho complicados" (ENT1, 11/06/05).

Referindo-se às sessões de trabalho com a investigadora, Beatriz considera-as muito relevantes por terem contribuído para a planificação e implementação de "estratégias e actividades sempre diversificadas e diferentes " (QT2, 20/06/06). Releva também o contributo da formação ao nível de uma maior consciencialização de que as estratégias de ensino são determinantes para a aprendizagem e, consequentemente da necessidade, do professor ser capaz de enfrentar com flexibilidade os problemas didácticos surgidos em sala de aula: "A maneira como se ensina é importante e o facto de saber como se ensina, de saber mudar de metodologias sempre que necessário é fundamental e acho que nos proporcionou um pouco isso". (QT2, 20/06/06)

Igualmente na entrevista final, Beatriz retoma e reforça a ideia de que o trabalho desenvolvido no PF "proporcionou sempre que possível e sempre que os alunos não estavam a compreender, saber como alterar as estratégias" (ENT3, 27/06/06).

História da matemática /Resolução de problemas históricos /Conexões

No último questionário aplicado, bem como na entrevista final, em que a investigadora procurou clarificar algumas das respostas dadas ao questionário, Beatriz assume que a sua participação no Percurso de Formação alterou radicalmente a sua visão sobre a história da matemática, quer em termos de formação para a profissão quer enquanto recurso de ensino.

Assim, Beatriz considera que conhecer aspectos do desenvolvimento da matemática a enriqueceu culturalmente, lhe deu uma melhor visão da matemática e uma melhor preparação para enfrentar a profissão: "Eu penso que é fundamental estudar a história da matemática, visão que anteriormente não tinha. Conhecendo como as coisas acontecem e foram em tempos, permite-nos ter uma melhor visão e uma maior cultura e facilidade para "enfrentar" o mundo e a carreira como docente" (QT2, 20/06/06).

A este propósito, salienta como positivo a percepção da história da matemática como um recurso didáctico que permite alargar os problemas relativos a aplicações da matemática ao dia-a-dia, a situações do quotidiano passado. Aspecto que, em sua opinião, pode repercutir-se na forma como os alunos encaram a matemática: "Também acabamos por … ver a importância da história para que os alunos também entendessem, sem ser só as coisas do dia-a-dia" (ENT3, 27/06/06). A própria Beatriz admite que o conhecimento histórico contribuiu em termos pessoais para um novo olhar sobre a matemática e para um incremento do gosto pela disciplina:

> I (Inv) - A Beatriz não tinha tido contacto com aspectos da história da matemática?
> B (Beatriz) - Não.
> I - Nunca?
> B - Pouco.
> I - Pensa que a história permite uma mudança na forma como nós vemos a matemática? Acha que mudou a ideia que faz da matemática?
> B - Um pouco, porque acabava por ver a matemática como só coisas actuais e nem sequer, por vezes, há coisas passadas que nos passavam ao lado.
> I - E acha que lhe permitiu, por exemplo, gostar mais de matemática?
> B - Sim.
> I - Mais do que já gostava?
> B - Mais do que já gostava (ENT3, 27/06/06).

O trabalho didáctico desenvolvido na Exposição Interactiva, é também entendido como muito positivo. Por um lado, destaca que a reacção das crianças às tarefas excedeu as expectativas criadas relativamente ao envolvimento na sua realização (ST, 03/03/06) e, por outro, reconhece que: "Foi um projecto (…) que no fim foi compensado por todas as crianças que vieram e se mostraram motivadas e interessadas" (QT2, 20/06/06). Em termos pessoais, foi confrontada com as potencialidades didácticas dos espaços de educação não formal: "sem se aperceberem aprenderam aspectos importantes do seu país envolvendo situações de matemática" (QT2, 20/06/06). E acrescenta: "Este trabalho possibilitou-nos ter uma melhor noção de como a matemática é divertida e de que temos de passar isso aos nossos alunos, organizando futuramente exposições deste tipo" (QT2, 20/06/06).

Assim, um aspecto que interessa relevar é que Beatriz assume que a participação no PF a sensibilizou relativamente às potencialidades didácticas da história da matemática e que, a não ser por isso, talvez não a considerasse tanto como um recurso de ensino: "Há coisas na matemática, por exemplo, partes da história que a gente não (ri)… Se calhar se não fosse …com a aplicação de …por causa da professora … talvez nunca o fizéssemos … Em certos aspectos não aplicávamos tanto, como aplicámos" (ENT3, 27/06/06).

Beatriz encara a integração e exploração de problemas históricos, quer em sala de aula quer na Exposição Interactiva de forma muito positiva: "Esta experiência que tive com os problemas foi muito gratificante, como futura professora" (QT2, 20/06/06), por sentir que os alunos se mostraram interessados e motivados para a resolução dos mesmos. Referindo-se às tarefas de resolução de problemas delineadas no PF e exploradas em sala de aula, Beatriz afirma: "Com estas situações conseguimos obter uma turma mais participativa e motivada para as situações que lhe são propostas" (QT2, 20/06/06).

Para além disso, Beatriz salienta que a resolução de problemas históricos propostos nas suas aulas teve reflexo nas aprendizagens dos alunos, na medida em que estes permitem aplicar a matemática a situações reais (do quotidiano passado) e, simultaneamente, enriquecer o conhecimento histórico dos alunos. As conexões da matemática com a história de Portugal propiciadas pelos problemas históricos surgem assim como um aspecto positivo da prática de ensino de Beatriz: "Penso que os alunos ficaram a conhecer factos históricos do seu país e aplicam, ao mesmo tempo, a matemática a situações reais" (QT, 20/06/06). Referindo-se ao primeiro problema histórico que propõe, *Baratar mercadorias*, reitera a atitude de entusiasmo identificada nos alunos: "De resto, aqueles que estavam com atenção na aula, quando lhes dei o problema, eles estavam todos entusiasmados. Eles entenderam logo, chegaram aqui utilizando as proporções" (ST, 21/04/06).

Inquirida sobre a forma como perspectiva a integração de problemas históricos em sala de aula, Beatriz coloca-os ao mesmo nível de outros problemas, argumentando que não apresentam dificuldades novas para os alunos, embora os alunos o possam sentir devido ao próprio contexto histórico.

I -A minha sensação é que quando distribui os enunciados das "tarefas" de resolução de problemas históricos, os alunos já sabem que vão resolver um problema de natureza diferente.
B - Sim, normalmente quando vêem assim ... pelo título às vezes eles começam ... depois tinha um bocadinho de história que era, tipo, para introduzir …
I - Mas a Beatriz considera-os problemas no mesmo patamar dos outros?
B - Igualmente.
I - E considera que este tipo de problemas apresentam dificuldades novas?

B - Acho que não. Eu acho que ... eles têm uma ideia errada da história e depois eles pensam que aquilo [os problemas históricos] é diferente daquilo que têm andado a resolver habitualmente.
I - Mas acha que os alunos os associam mais à história do que à matemática?
B -Às vezes sim, professora (risos). Por causa de terem um bocadinho de história.
I - Mas depois sentem-nos como problemas matemáticos?
B - Sim. E acho que nesse problema, o da *Companhia de mercadores*, aquele exemplo do totoloto acho que … principalmente para aqueles alunos que estavam a ouvir e interessados, acho que ajudou a interpretar o problema (ST, 22/05/06).

Baseada na experiência adquirida sugere que um obstáculo à introdução de problemas históricos nas aulas de matemática tem a ver a atitude dos alunos perante a disciplina curricular de história. Referindo-se à turma em que realizou o estágio, afirma ter sentido alguma reacção negativa por parte dos alunos, decorrente, em sua opinião, de uma atitude negativa em relação à disciplina de história.

B - Depois nos problemas vi que .. pronto ... eles no início tiveram alguma dificuldade. Eles também não gostam muito de história e depois têm sempre aquela coisa: «Ai história, história, história».Eles não gostam muito da professora de história, então qualquer coisinha andam sempre: «Ai a história».
I - No início da aula em que propõe o problema da Companhia de Mercadores há um aluno que pergunta algo como «outra vez?». Ele referia-se ao facto de ser um problema histórico ou a outra coisa? … A Beatriz andava a distribuir o problema.
B - Não sei.
I - Já não se recorda, pois não?
Portanto, na sua opinião, eles reagem mal aos problemas históricos?
B - Não. De início até não. De início eles até aderiram bem. Só que às vezes … se se fala de história ficam ... assim um bocado ... por causa de (risos) das aulas de história. E depois parece que tudo o que vêm é sempre … história (ST, 22/05/06).

Esta forma de encarar a história da matemática e, em particular, os problemas históricos representa uma profunda evolução no pensamento de Beatriz relativamente às opiniões manifestadas na entrevista realizada no final do primeiro ano do estudo, algum tempo após os seminários de Geometria e concluída a PP no 1º CEB. Ainda que, nessa altura, denote alguma simpatia pelos problemas históricos e reconheça, por exemplo, que a sua resolução a ajudou a compreender a ideia de relação entre unidades de medida, o aspecto mais marcante que se depreende das suas palavras é o enriquecimento cultural que o trabalho desenvolvido lhe proporcionou. Como tal, parece ser pouco receptiva à ideia de propor problemas históricos aos alunos. Isto é, nesse momento do PF, Beatriz não perspectivava formas de integrar a história da matemática que não através de dramatizações, como as realizadas na sua prática de ensino, ou como relato de curiosidades do passado.

I (Inv) - Em relação aos problemas que resolvemos em Geometria envolvendo antigas unidades, o que é que achou deles?
B (Beatriz) -(risos) Acho que servem como cultura geral para nós, porque praticamente nós nunca mais vamos pegar naquilo. É mais para cultura. Para cultura porque nós no dia-a-dia acho, penso eu, nunca mais vamos utilizar aquelas medidas. Acho que sim, como cultura. Para dizer um dia às crianças como é que se utilizava, tipo fazer os passos.
(…)
I - Propôs algum [problema histórico] aos meninos, na Prática Pedagógica?
B - Não.
I - Não se lembrou disso ou acha que não são adequados?
B - Nem me lembrei disso. É tanta coisa que a gente, às vezes … às vezes temos coisas à mão que devíamos utilizar e não utilizamos.
I - Mas acha-os adequados para os meninos?

B- Acho que eram um bocadinho complicados (ENT1, 21/06/05).

Atente-se, porém, que no primeiro problema histórico que propõe à turma de 6ºano de escolaridade em que realiza a sua PP no 2º CEB (apresentado, como já referido, na forma de um desdobrável) pode ler-se na folha de "rosto" do mesmo: "No interior deste desdobrável vais encontrar alguns desafios interessantes e motivadores de aprendizagem em matemática" (aula, 20/04/06). Esta frase da autoria de Beatriz, que parece sintetizar bem a sua profunda mudança de atitude relativamente às potencialidades didácticas dos problemas históricos, é acompanhada pela receptividade plena à planificação e à exploração em sala de aula de várias das tarefas delineadas no PF:

I (Inv) - E o que é que vai fazer para a semana? Só tem uma aula, não é verdade?
B (Beatriz) - Sim. Professora, vou dar um ou dois problemas históricos.
I - Ah sim?
B - Vou utilizá-los todos. Se tiver mais algum pode fornecer-mo.
I - Então porquê?
B - Porque estamos a gostar.
I - Estamos, quem?
B - Eu … E a professora [cooperante] também está a achar que eles [os alunos] estão a aderir bem.
I - Eu achei que lhe tinha proposto demasiados problemas e que a Beatriz só escolheria um ou dois.
B- Professora, tenho planeado todos (ST, 21/04/06).

Na última sessão de trabalho com a investigadora, Beatriz reforça esta posição e afirma que, enquanto professora, o contacto com aspectos da história da matemática foi muito positivo e refere que, na reflexão sobre a PP que redigiu para a professora supervisora, incluiu uma citação com que muito se identifica e se coaduna com a forma como procurou integrar a história da matemática na sua prática de ensino.

I - Destaca algum aspecto nos problemas históricos?
B - Eu destaquei.

I - Para si, enquanto professora.

B - Sim. Eu até fui buscar uma citação do Prof. Jaime Carvalho e Silva. Eu acho que ajuda dar um bocadinho da história do nosso país e ver que hoje em dia nós recorremos muita vez … Naquele dia que a professora Supervisora foi observar a minha aula, eu sempre dei aquele problema e fomos lá fora. Dei um bocadinho de história sobre o método de Thales, em que ele esperou por uma altura do dia em que ... a sombra ficasse igual à altura da vara e então determinou a altura da pirâmide. Depois fomos lá fora. Para espanto nosso foram calmíssimos. Eu lá dentro expliquei o que é que era para fazer, disse-lhe logo quais os alunos que iam fazer as medições, os outros que era para ficarem à volta. Depois cá dentro a aluna veio logo colocar os dados no quadro e eles sentaram-se. Foram lá fora, vieram e (risos) calmíssimos. Fiquei ... (risos).

(…)

Eu disse-lhes para levarem uma folha para registarem os dados. Ham … nessa aula disse que hoje em dia ainda utilizamos esse método que o Sr. Thales utilizou, tal foi a importância que ele ..

I - Estou a ver que a Beatriz é uma grande adepta da história. Não teve, nesta unidade, nenhuma aula, em que não introduzisse um pouco de história da matemática. Excepto a primeira, não foi?

B - Só a primeira e na 5ª feira que propus problemas e fiz um pequeno jogo onde havia problemas com razão, com escala, proporção, meios, …

(…)

I - Então qual é a citação que tem aí?

B - Ham … "Se o professor realizar actividades com uma perspectiva histórica, esta humaniza o estudo da disciplina, mostrando a matemática como ciência em construção. O uso da história da matemática é muito importante porque satisfaz o desejo de saber como se organizam e desenvolvem os assuntos da matemática, os episódios históricos criam mais motivação e interesse e permitem nas crianças uma melhor imagem daquilo a que nós queremos que eles cheguem».

I - Citou-o porque se identifica com o que diz?

B - Sim. Acho que sim (risos).

I - Acha que se coaduna com aquilo que fez?

B- Sim (ST, 22/05/06).

4.4.4. Sumário

Beatriz guarda na memória o sonho antigo de ser professora e o seu esmorecimento fruto de dificuldades no ensino secundário. Concorre, em primeira opção, para um curso na área da saúde, mas ingressa num curso de formação de professores. As experiências de prática pedagógica correspondem a momentos de realização pessoal e profissional e dão-lhe alento para enfrentar os obstáculos que sabe vir a ter de enfrentar. Quanto ao curso, destaca como pontos positivos da formação o sentir que consegue transmitir os conteúdos aos alunos, bem como seleccionar estratégias diferentes, motivadoras e facilitadoras da participação dos alunos. Sente que a formação é apenas um ponto de partida e que com a prática e o aprofundamento da formação conseguirá ultrapassar os aspectos menos bons.

Enquanto resolvedora de problemas, destaca-se a forma organizada que dá à resolução, distinguindo bem os dados do problema dos cálculos realizados. A falta de justificação dos procedimentos adoptados, a ausência de resposta escrita à questão do problema, bem como de certificação de que a solução obtida é efectivamente solução do problema, são aspectos que caracterizam o trabalho de Beatriz.

Relativamente ao ensino da matemática, valoriza especialmente a motivação dos alunos, o que se reflecte na forma como planeia detalhada e cuidadosamente a introdução de novos conteúdos e as estratégias a implementar. No que respeita aos problemas históricos, recorre sempre a formas diferentes de os apresentar aos alunos, fazendo-os acompanhar de um pequeno texto de carácter histórico que serve para contextualizar o problema na época e explicar a situação exposta no problema. Esta forma de proceder serve para despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, mas simultaneamente surge como um indicador que vão resolver uma tarefa de natureza diferente.

Em termos de prática de ensino, revela uma boa relação com os alunos, privilegia a resolução de problemas, quer como forma de introduzir novos conteúdos quer como aplicação de conceitos já abordados, dá particular atenção à exploração do contexto dos problemas históricos e ao entendimento da situação exposta, nomeadamente dando a palavra aos alunos para que a expliquem por palavras suas. Esta postura assumida no 2º CEB representa uma profunda evolução à prática de ensino no 1º CEB em que Beatriz raramente propõe problemas aos alunos e manifesta dúvidas quanto à adequabilidade de problemas históricos a crianças desse nível de ensino.

Embora tente implementar um modelo de ensino focado no aluno, em que a actividade de resolução de problemas surge como o contexto para a aprendizagem da matemática, manifesta dificuldades em reformular o discurso e as questões colocadas aos alunos e, por vezes, em centrar a atenção dos alunos no cerne dos conceitos e relações matemáticas que se pretendem explorar com os problemas. As dificuldades manifestadas a esse nível e no estabelecimento de conexões intra-matemáticas, aliadas à necessidade de planificar em detalhe as aulas, parece revelar alguma insegurança e que não se sente completamente à vontade nos conteúdos que ensina. No documento de validação da análise feita pela investigadora, salienta que a consciência de estar em estágio, sob avaliação e observação permanente e pressionada pelo tempo, contribui para algum nervosismo e inquietação. Em sua opinião, a conjugação de todos esses aspectos condiciona a prestação em sala de aula e explica uma certa falta de flexibilidade em relação ao planificado.

A exploração que faz, em sala de aula, dos problemas históricos parte sempre de uma contextualização dos mesmos no tempo histórico a que dizem respeito (todos os problemas que propõe são problemas aplicados ao quotidiano passado), o que contribui para que a aula de matemática seja um espaço de interdisciplinaridade e em que se mostra que a matemática permite dar resposta a diferentes problemas do Homem.

No que se refere à reflexão sobre a sua prática de ensino, Beatriz revela alguma capacidade de análise crítica da forma como orientou os alunos no processo de resolução de problemas, identifica eventuais razões para o que correu menos bem e, por vezes, sugere e incorpora alterações na prática de ensino.

A participação no PF e, em particular, a exploração didáctica de problemas históricos (em sala de aula e em ambiente não formal) alterou radicalmente a forma como encara a história da matemática e a sua integração no processo de ensino e aprendizagem. Um indicador dessa mudança de perspectiva é a atitude de perplexidade suscitada pela reacção positiva das crianças (do 3º ao 6º anos de escolaridade) às tarefas propostas na Exposição. Essa surpresa terá, certamente, influenciado a sua grande receptividade à integração de problemas históricos em sala de aula. Relativamente a essa experiência, destaca o interesse e a motivação despertados nos alunos, ainda que alguns mostrassem pouca receptividade ao estabelecimento de ligações com a disciplina de história (atitude aparentemente relacionada com a falta de interesse por essa disciplina).

Relativamente ao papel desempenhado pela integração da história da matemática na sua formação, destaca o enriquecimento cultural, a aquisição de uma outra visão da matemática, o incremento do gosto pela disciplina e uma melhor preparação para enfrentar a profissão.

No quadro 4.3 sintetizam-se as principais características de Beatriz relativamente as dimensões de análise consideradas.

Refira-se, para finalizar, que Beatriz validou a análise feita pela investigadora, concordando, em termos globais, com a mesma. Faz, no entanto, questão de salientar que o nervosismo associado à sua situação de estagiária pode ter condicionado a sua prática de ensino (Anexo 10).

Quadro 4.3. Síntese das características de Beatriz em relação às dimensões de análise

Dimensões/categorias		Características
Resolução de Problemas	Desempenho global	Apresentação organizada, com separação clara entre os elementos do problema e a resolução; Ausência de justificação dos procedimentos adoptados. Não verifica a solução nem a sua adequação ao problema.
Prática Pedagógica	Perspectivas de ensino e aprendizagem da matemática	Releva o papel da motivação para a aprendizagem. Necessidade de planear com detalhe as estratégias de ensino e as tarefas.
	Prática de ensino	Tenta implementar um ensino com foco na resolução de problemas, mas, no que respeita à exploração do conhecimento matemático presente nos problemas, revela dificuldades em reformular o discurso e as questões que dirige aos alunos, assim como em conectar ideias matemáticas; Na orientação da actividade de resolução de problemas dá especial atenção à sua contextualização, às suas ligações com o quotidiano passado e à fase de compreensão do problema. Não orienta os alunos para o estabelecimento de um plano e, obtida a solução, nem sempre os conduz para a avaliação da sua razoabilidade ou para a verificação da mesma. A resolução dos problemas termina de forma repentina, após a obtenção da solução, sem qualquer reflexão sobre a mesma.
	Reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem	Revela capacidade de análise crítica das suas acções, identificando aspectos positivos e negativos e, por vezes, sugere possíveis alterações.
Formação e profissão	Percurso de Formação	Contributo importante para a formação didáctica, nomeadamente ao nível da análise e utilização de materiais como manuais e documentos curriculares; Apoio à planificação e à implementação de estratégias e actividades inovadoras.
	Problemas históricos	Motivadores e interessantes para os alunos do ensino básico; Promovem a aprendizagem da matemática e, em simultâneo, de aspectos da história da matemática em Portugal.
	História da matemática	Contributo importante para a construção de cultura matemática; O conhecimento histórico permite um novo olhar sobre a matemática uma melhor preparação para enfrentar a profissão e repercute-se nas imagens passadas em sala de aula; Recurso didáctico importante, em particular se integrada através de dramatizações e problemas históricos.
	Conexões	Os problemas históricos favorecem as ligações da matemática com outras disciplinas e com o quotidiano passado.
	Relacionamento com o curso e com a profissão	Conclui uma licenciatura que, não sendo a sua primeira opção, concretiza o sonho de ser professora de matemática. Considera-se bem preparada para exercer a profissão no 1º ou no 2º CEB, mas sente-se mais vocacionada para o 2º CEB e, neste, em particular para a docência da matemática. Destaca as disciplinas de Didáctica, História e Metodologia da matemática e Prática Pedagógica como aquelas cujas tarefas mais contribuíram para a sua formação profissional. Consciente das dificuldades no mercado de trabalho mantém a esperança de vir a ser professora.

4.5. Opinião dos professores cooperantes

Durante o tempo em que a investigadora acompanhou a PP das futuras professoras, quer no 1º CEB (2ºsemestre de 2004/05) quer no 2º CEB (ano lectivo 2005/06), tornou-se claro que o posicionamento dos professores cooperantes relativamente às abordagens de ensino desenvolvidas no PF foi determinante para a adesão das futuras professoras. Embora estes não tenham sido envolvidos de forma directa no estudo, até porque a investigadora intencionalmente assumiu, nesta fase, um papel de observadora não participante, tornou-se evidente que as futuras professoras, estando envolvidas num período de estágio do qual resulta uma nota final determinante para o seu futuro, são muito sensíveis às orientações do professor cooperante. Torna-se, por isso, imprescindível analisar a opinião dos professores cooperantes sobre as estratégias de ensino implementadas pelas futuras professoras no âmbito do PF, e, em particular, sobre o valor da integração da história da matemática no processo de ensino/aprendizagem da matemática no ensino básico.

As futuras professoras participantes no estudo integram dois grupos distintos, cujo estágio no 2º CEB decorre em escolas também diferentes. Inês faz parte de um grupo que realiza a prática pedagógica de matemática numa turma de 6º ano de escolaridade, numa escola EB 2/3 da cidade em que situa a instituição de ensino superior que frequentam. Manuel, professor responsável pela turma, desempenha a função de Professor Cooperante da ESE desde 1989, ano em que se inicia a sua colaboração na formação inicial de professores de matemática. Manuel é professor do 4º grupo do 2º CEB e lecciona, há muitos anos, apenas a disciplina de matemática. No momento em que decorre o estudo já completou 30 anos de serviço docente. Joana e Beatriz realizam a prática pedagógica também numa turma de 6º ano de escolaridade numa escola EB 2/3 situada numa vila a cerca de 15 km da ESE. Fernanda, a professora responsável pela turma, lecciona há mais de 25 anos a disciplina de matemática e, mais recentemente, também Ciências da Natureza. Iniciou a sua colaboração com a ESE poucos anos depois de Manuel. Ambos são professores com muita experiência docente e de orientação de estágios, muitos dedicados à profissão, aos seus alunos e aos estagiários.

4.5.1. Prática pedagógica

Questionado sobre a repercussão do acompanhamento feito pela investigadora às futuras professoras, Inês e Mariana, conquanto Manuel responda no plural incluindo referências ao papel da professora supervisora, declara que, apesar da investigadora não assumir um papel interveniente, este foi muito marcante, na medida que considera que o trabalho desenvolvido com as futuras professoras foi um trabalho integrado que lhes valorizou a prática pedagógica.

> I – Outra questão que lhe quero colocar tem a ver com o trabalho que eu desenvolvi com Inês e a Mariana. Acha que o acompanhamento que lhe proporcionei teve algum eco na prática pedagógica?
>
> Manuel – Teve, teve e foi marcante. Acho que vocês como retaguarda, tu e a professora supervisora foram uma retaguarda importante e marcante na prática pedagógica. Enfim, aparentemente não foram intervenientes activos, mas na realidade foram … vá lá .. pequenos motores ou grandes motores que as obrigaram a .. digamos .. um trabalho que não é um trabalho extra, que é um trabalho integrado que, às tantas, é valorizado e lhes valorizou as aprendizagens. Portanto, vamos lá ver. E que é capaz de lhes ter dado também outra perspectiva … (ENT, 30/06/06)

Fernanda admite, igualmente, que o trabalho desenvolvido teve eco na prática pedagógica de Joana e Beatriz, reconhecendo também que, em termos pessoais, o facto de ser uma das intervenientes na investigação foi "extremamente gratificante", argumentando que a inovação introduzida nas práticas através dos problemas históricos seria dificilmente conseguida sem o estímulo e a pesquisa da investigadora:

> Geralmente as estratégias que utilizo não são tanto assim. São geralmente situações problemáticas, mas não problemas desta natureza (…) Nunca teria ido por aí se alguém não mos tivesse sugerido. Depois de nos apresentarem as coisas feitas até parece que nós também chegaríamos lá, mas não. Aqui houve um caminho e um percurso a que nunca chegaria (Fernanda, 29/06/06).

Assim, Fernanda valoriza o intercâmbio entre a formação e a investigação que foi proporcionado pelo estudo e que considera salutar e muito vantajoso para os professores que estão no terreno.

> Inv – Então acha que houve algum eco do meu apoio na prática de ensino de ambos?
>
> Fernanda – Houve, eu já tive oportunidade de falar, ainda há dias, com a professora supervisora que eu acho que é isso que falta… esta ligação entre a formação e a investigação. É um trabalho de investigação. A investigação e a prática, as práticas das escolas e que eu acho importante e que a nós professores nos fazia imenso bem que tivemos mais eco da investigação (ENT, 29/06/06).

Inês

Em relação à prática de ensino de Inês, Manuel considera que esta evoluiu significativamente ao longo da prática pedagógica, revelando um bom nível de preparação pedagógico-didáctica para a docência da matemática no 2º CEB, ainda que, com algumas dificuldades em termos de conhecimento matemático. Na opinião de Manuel, Inês mostra gostar de ensinar matemática, ser muito empenhada, atenta e cuidadosa nas planificações, ser afectuosa com os alunos e, ao mesmo tempo, supervisionar o trabalho dos alunos. Assim, a característica marcante da prática de ensino de Inês é "o procurar dar as aulas com os alunos, ouvir os alunos" (Manuel, 30/06/06). Embora ressalve a condição de estagiária de Inês, ainda com muito para aprender, e afirme que não se salientaram pontos notoriamente fracos, Manuel destaca como aspectos a melhorar os que se relacionam com o conhecimento matemático, nomeadamente ao nível da formulação e representação de ideias e conceitos:

> Bem vamos lá ver. Pontos fracos, notoriamente fracos não tem. Tem de aperfeiçoar a linguagem científica, a questão dos conceitos, ter um pouquinho mais de cuidado na forma como … enfim, o cuidado que tem de haver nalguns registos, isto é, quando ela tem que … pronto … se pede ao aluno para fazer um registo, tem de haver o cuidado do professor ler e elaborar … e aperfeiçoar, no fim de contas. Se há uma situação … uma coisa é a questão dita oralmente, outra coisa é o que fica escrito. De facto ela ainda tem de ter um bocadinho mais de cuidado naquilo que vai ficar escrito …que é o rosto, a fotografia da aula. (Manuel, ENT, 30/06/06)

Relacionado com este aspecto, mas não se referindo em particular a Inês, mas sim ao grupo de estagiárias com que trabalhou em 2005/06, Manuel salienta que uma das falhas da formação/percurso escolar das futuras professoras é a falta de cultura matemática e de saber matemático, condição indispensável para um bom ensino. Além disso coloca uma grande ênfase na necessidade de uma cuidada formação contínua que necessariamente tem que acompanhar o percurso profissional dos professores:

> Considero que lhes falta um pouco aquilo que chamamos nós cultura matemática … e saberes diversificados da matemática. Eu acho que …, se calhar é defeito nosso, como escola, é que às tantas … elas têm que aprender muita coisa. Pronto, acho que elas não têm uma cultura matemática geral. Em que … funciona um pouco como retaguarda do professor, quando está a querer ensinar qualquer coisa. Acho que lhes faz falta … isso se calhar vai só conseguir-se depois de muitos anos de trabalho e se elas não descurarem de facto aquilo que não podem descurar que é a sua formação contínua. Se elas … se calhar nós estamos a querer que elas tenham já os saberes acumulados ao fim de … mas elas têm agora só 23 anos (Manuel, 30/06/06).

Sendo-lhe pedido, relativamente a uma aula que a investigadora não pôde observar e que, por imprevistos, também não foi registada em áudio/vídeo, uma apreciação da forma como Inês orientou a resolução do problema da *Venda do trigo*, Manuel salienta a forma como Inês explora o contexto do problema e estabelece a ligação com a actividade desenvolvida na Exposição:

> O problema foi bem explorado, ela [Inês] apelou à motivação remota dos alunos, eles conseguiram repor a situação, recordaram-se da mesa de trabalho, da forma como compararam as medidas… explorou a relatividade das unidades ao longo do tempo, o facto de existirem alqueires diferentes (o alqueire de Castelo Branco ser diferente do alqueire de Mação, por exemplo) (NC, 21/02/06).

Releva também o interesse dos alunos, bem como a forma como o aluno que resolve o problema no quadro consegue expor à turma o seu processo de resolução: "usou os termos correctamente, referiu-se correctamente ao alqueire pequeno e ao alqueire grande e conseguiu explicar o seu raciocínio e forma como resolveu o problema. Partiu das mesmas quantidades e percebeu e conseguiu explicar o que se tinha passado, a essência do problema… até com uma estruturação no quadro razoável" (NC, 21/02/06). Em jeito de síntese, Manuel afirma que Inês evidenciou poder "vir a ser uma boa professora" (ENT, 30/06/06). Salienta, porém, a sua desilusão com o sistema que investe milhares de euros na formação de professores e, não lhes dando qualquer ocupação posterior, corre o risco de tornar jovens professoras promissoras, incapazes de voltar ao sistema, três a quatro anos depois de concluída a formação.

Joana e Beatriz

Embora Fernanda situe Joana e Beatriz num nível didáctico muito próximo do bom, defende que as características pessoais de cada uma permitem uma diferenciação significativa entre ambas. Assim, é, sobretudo, ao nível das capacidades de comunicação oral e de ultrapassar situações imprevistas o que as diferencia.

Beatriz, pela sua maneira de ser e de interagir com os alunos é, das duas, a que mostra maiores dificuldades em termos de concretização das planificações. Resguarda-se numa planificação cuidada que apresenta atempadamente à professora cooperante, "para que tudo pudesse correr bem" (Fernanda, ENT, 29/06/06). Essa organização é, na opinião de Fernanda, indispensável para Beatriz, que revela, em sala de aula, dificuldades em fazer uma exploração diferente da planeada:

> Fernanda – Eu acho que (…) [a Joana] resolvia melhor as situações que surgiam … Era mais espontânea … Quando surgia alguma coisa, contornava melhor a situação e resolvia-a de uma forma mais satisfatória. Enquanto que a Beatriz era assim mais organizada e mais …
> Inv – Com tudo muito planeado.
> Fernanda – Sim, precisava e precisa daquela organização. (ENT, 29/06/06)

Do mesmo modo, Fernanda considera que Beatriz evidencia também, durante a implementação do processo de ensino, dificuldades em finalizar as tarefas, em promover a interligação entre a tarefa e a actividade desenvolvida, ainda que esse aspecto tivesse sido planeado.

> Fernanda – (…) isso notou-se muito numa aula em que a professora supervisora esteve presente …que era sobre proporções.
> Inv – Foi aquela aula em que a Beatriz levou os alunos para a rua?
> Fernanda – Sim, sim, mas tinha partido da história da matemática, mas depois não voltava lá. Era aquela história em que … através da sombra….
> (…)
> Fernanda – Não voltava lá. Foi preciso … apesar de ter planificado isso, mas isso estava pensado em termos de planificação. Tentar demonstrar e aquilo que havia de comum entre aquilo que eles tinham feito e aquilo que… e a experiência que o Thales fez e que tinha sido mais genial porque ele esteve a escolher exactamente aquela altura em que a razão era 1. Pronto … ham …o voltar às coisas, o interligar … (ENT, 29/06/06)

Em relação aos problemas históricos, Fernanda considera que ambas se envolveram bastante na sua planificação, que gostavam deles e que os exploraram de forma adequada, embora destaque em Beatriz a falta a vivacidade, traço muito próprio de Joana. Afirma a este propósito: “Eu no início até estava com algum receio (…) e elas próprias também estavam com algum receio de pôr as situações. Parecia que os miúdos não iam chegar lá, ou que não os iria motivar, mas depois acabaram por se entusiasmar imenso, com as situações que levaram”.

Relativamente a Joana, Fernanda destaca também a maneira de ser, a vivacidade que põe em tudo o que faz, a dicção agradável, a capacidade de voltar aos assuntos que estão a ser discutidos e de promover a interligação entre as coisas. Aliada a estas características, como já referido, demonstra possuir a capacidade de ultrapassar os imprevistos de uma forma satisfatória.

> Inv – E relativamente à Joana, que pontos fortes e fracos destaca na sua prática?
> Fernanda – A Joana … já tinha mais … acho que já tem mais essa capacidade de voltar às coisas, de as interligar.
> Inv - Esse já não é um ponto fraco da Joana?
> Fernanda - Não tão fraco. Pronto é dentro da formação inicial, não é? Estarem pela primeira vez numa situação … embora tenham tido a experiência no 1º ciclo, mas acho que é

diferente. Ahm … pronto, não considero isso um ponto fraco, fraco. Assim em relação à Joana pontos fracos, fracos … ela tinha uma boa presença, era muito agradável ... ham (…)
Inv - Geria bem os conflitos com os meninos?
Fernanda – Sim … dentro do possível. Nós tínhamos realmente alguns … foi complicado. Aliás no final do ano houve um menino que foi suspenso. Mas aceitou muito bem e modificou-se. (…) E todo o ano foi aquilo que se viu. Uma instabilidade emocional enorme.
(…)
Inv – Então e na Joana destaca algum ponto forte?
Fernanda – Eu acho que …assim forte … aquela vivacidade. Resolvia melhor as situações que surgiam … Era mais espontânea … Quando surgia alguma coisa, contornava melhor a situação e resolvia-a de uma forma mais satisfatória (ENT, 29/06/06).

4.5.2. Percurso de Formação

<u>Resolução de problemas históricos</u>

Inquirido sobre a adequação ao currículo (conteúdos, competências, atitudes) dos problemas históricos explorados nas aulas de 6º ano de escolaridade pelas suas estagiárias, Manuel assume uma posição muito favorável em que sobressai a boa aceitação que sentiu por parte dos alunos da turma. Manuel salienta o papel que a visita da turma à Exposição Interactiva pode ter desempenhado no incremento dessa boa receptividade (note-se que o problema *Quarto e Vintena* foi proposto num momento anterior à exposição). Em sua opinião, a oportunidade de manipular antigas unidades e resolver problemas que as envolvem, foi um contributo muito importante para a aceitação dos problemas propostos nas aulas.

Manuel - (…) houve uma aceitação por parte das turmas…
Inv - Dos alunos.
Manuel - Dos alunos, sim. (ENT, 30/06/06)

Fernanda assume uma posição também muito receptiva relativamente aos problemas históricos, na qual se destaca a importância que atribui à sua utilização em sala de aula, pelo potencial motivacional que encerram e pelo contributo para a aprendizagem dos conteúdos curriculares. Referindo-se aos problemas explorados na sua turma no âmbito da Multiplicação e Divisão de Números Racionais (por Joana) e da Proporcionalidade Directa (por Beatriz) afirma:

Agora aproveito também para dizer que foi importante que elas [refere-se a Joana e Beatriz] levassem aquelas situações problema, porque foi uma maneira de tornar aqueles conteúdos ... aprendíveis e até ... foram motivadores” (ENT, 30/06/06).

Apesar de Fernanda admitir que, de início, teve algum receio relativamente à reacção dos alunos, quer em termos de atitudes, quer da capacidade de resolução de situações de natureza diferente do habitual e com uma linguagem inusual (receio esse também partilhado pelas estagiárias), reconhece que, pelo contrário, os alunos mostraram interesse e gosto na resolução dos problemas históricos.

> No início quando li … e até sem ler as sugestões que apareciam, as sugestões de exploração … ham … pensei que eles fossem ter alguma dificuldade e que fôssemos demorar mais tempo… depois acho que até correu bem. Talvez até por hábito de … ler … situações dessas, não é? E era a linguagem também que era necessário …, mas depois achei até muito … e acho que mesmo os alunos todos acabaram por se envolver e achavam graça e estavam à espera de mais. Ou foi por eu também gostar (risos) que depois achei que eles próprios estavam a gostar, mas achei que eles reagiram bem. (Fernanda, ENT, 29/06/06)

Fernanda explicita melhor o interesse didáctico que atribui aos problemas históricos quando assume que traduzem situações cheias de beleza e interesse e admite vir a propô-los futuramente aos seus alunos. Fernanda ressalta também a importância da investigação nesta área, pois como afirma não é fácil um professor aceder a este tipo de problemas ou mesmo dar-se conta das suas potencialidades.

> Fernanda - Não é qualquer um que tem acesso a esse tipo de problemas. Eles não estão assim tão divulgados, eu, por exemplo, não sei onde é que iria encontrá-los. Teria que ter muito trabalho para ir à procura deles ou então era capaz de olhar para eles e nem sequer ver a beleza que está dentro daqueles problemas, porque são interessantíssimos (…)
> Inv - Coloco-lhe agora uma pergunta que não está no meu guião. Imagina-se a propor algum daqueles problemas, agora sem o estágio.
> Fernanda - Ah, sim. E acho que até vou ter curiosidade em ir à procura (risos)
> (ENT, 29/06/06)

História da matemática

Embora Manuel releve a integração de aspectos da história da matemática através da resolução de problemas históricos, em sua opinião, devem também ser tidas em conta outras fontes como, por exemplo, referência a curiosidades matemáticas, a biografias, a matemáticos marcantes, … Assim, se por um lado reconhece que a existência de uma certa pressão para dar os conteúdos pode funcionar como um obstáculo à utilização da história da matemática como um recurso de ensino, por outro lado admite a possibilidade da sua utilização criar uma maior motivação dos alunos e uma aprendizagem, nas suas próprias palavras, “mais viva e eficiente”.

Inv - Já falámos da integração da história ser feita através dos problemas. Embora tenha considerado isso como relevante também afirmou que, por exemplo, as curiosidades matemáticas também são importantes.

Manuel - Sim, são importantes. São momentos de aprendizagem. As curiosidades matemáticas, as biografias dos matemáticos são actividades que, se calhar, pelo facto de termos 4 horas ou 5 horas … para lidar com os alunos, temos uma certa pressão de dar os conteúdos que nos são …

Inv - Por isso é que eu lhe coloquei a questão da relevância dos problemas históricos.

Manuel - Estas questões … a falta de uma certa paragem, de um certo ... tempo para respirar outras coisas e outras ... outras motivações parece-me importante. E nós estamos às vezes a descurar isso e que, se às tantas, parássemos um bocadinho para pensar e pronto … de aliviar o ambiente de números e de x's e de y's .. às tantas, era capaz de os resultados serem outros e pronto as aprendizagens serem … mais vivas e eficientes. Mas pronto, temos de pensar todos (ENT, 29/06/06)

Por seu lado, Fernanda, embora receptiva a outra formas de integrar a história da matemática em sala de aula, parece não ter dúvidas que o recurso a problemas históricos "é a melhor via para se mostrar como é que se resolviam as questões e como é que a matemática intervinha nesses … na resolução dos problemas" (Fernanda, ENT, 29/06/06).

Referindo-se ao tipo de contacto com aspectos da história da matemática propiciado pela visita das crianças à Exposição Interactiva, Manuel mostra-se muito entusiasmado com as potencialidades didácticas que identificou. Para além de destacar a motivação despertada nos alunos para a resolução de problemas históricos em sala de aula, Manuel refere, como particularmente importante, a possibilidade de imersão dos alunos num determinado ambiente histórico que lhes permite assumir um duplo papel: de espectador e de actuante. Ou seja, o aluno, tornando-se testemunha do seu passado histórico, consegue assumir também um papel bastante activo nesse passado:

> Porque vamos lá a ver … transfere-se no fim de contas os miúdos para o momento histórico que queremos … que eles sejam espectadores e actuantes, e actores … ham … E, às tantas, eles têm que mexer com as unidades da época; têm que … pronto … O momento histórico é aquele e eles têm que resolver ... digamos um problema dessa época.
>
> (Manuel, ENT, 30/06/06)

Deste modo, o recurso a ambientes de aprendizagem não formal e a modelos como o da exposição é encarado por Manuel como uma forma eficaz de integrar e motivar a exploração de aspectos de história da matemática no processo de ensino e aprendizagem.

Conexões

No que respeita às conexões, Manuel nota que os problemas históricos, pelo contexto histórico que lhes está associado, criam muitas oportunidades para a interdisciplinaridade, sobretudo quando o problema é acompanhado de uma exploração do seu contexto, situação que reconhece ter acontecido na prática de ensino das futuras professoras.

> Inv - Sente que os problemas históricos explorados contribuíram de alguma maneira para estabelecer conexões dentro e fora da matemática?»
>
> Manuel -Sim. Vamos lá ver, sendo um problema histórico, sendo um problema que faz a transferência assim digamos para um século ou dois atrás é sempre interdisciplinar, quer com a história, quer com a linguagem que se utiliza… leva-os a outro ambiente, sobretudo quando se introduz o problema como foi feito, se faz uma resenha … digamos … enfim …ham … procurar enquadrar social e culturalmente o problema no espaço, tempo, actividade, em que ele é, digamos a realidade. É importante porque cria sempre focos de interdisciplinaridade. Isso é evidente. (ENT, 30/06/06)

Por sua vez, Fernanda relembra que a idade dos alunos (10 e 11 anos), o seu nível cultural e, essencialmente, o facto de possuírem uma visão da matemática muito ligada ao cálculo é um obstáculo à concretização de conexões. Nesse sentido, admite que as conexões entre ideias matemáticas não tenham sido muito consideradas.

> Eu às vezes costumo fazer isso, pedir que eles explicitem … ham …e critiquem os resultados …e falem. Talvez não tenhamos feito muito isso. Ver para além da questão matemática…não … Talvez não tenha sido tão bem explorada como deveria ou como poderia.
>
> Mas também depende um bocadinho do nível cultural dos alunos e há alguns que chegavam lá mais facilmente, viam mais isso do que outros. E da idade também deles. Era uma turma onde as crianças eram bastante novinhas e … alguns teriam mais dificuldade em… sair da representação que eles têm, ao final de contas da matemática, que é um pouco fazer o cálculo e não ir muito além disso. (Fernanda, ENT, 29/06/06)

Porém, referindo-se à reacção aos problemas históricos, cita as palavras de um aluno que indiciam as enormes potencialidades da exploração de problemas históricos nestas idades, tanto em termos de interdisciplinaridade como do desenvolvimento de uma visão mais abrangente da matemática e da actividade matemática:

> Mas eu lembro-me de comentários de um miúdo que dizia «Ai, aqui aprendemos tanta coisa». Eles ficavam …notava-se que ele estava a …alargar os horizontes dele, que não estava à espera de aprender ali coisas que não tinham a ver com …directamente com a matemática (Fernanda, ENT, 29/06/06)

É também de referir que Fernanda afirma ter sentido necessidade de trocar impressões com um professor de história da sua escola, com o qual discutiu algumas situações focadas nos problemas. Esse professor, também com investigação realizada na área da história foi, por exemplo, muito crítico relativamente ao enunciado do problema do *Quarto e Vintena*. Apesar disso, esta postura de Fernanda mostra como o professor de matemática pode colaborar com os colegas de história e vice-versa, isto é, aponta uma via para a concretização de interdisciplinaridade.

Fernanda - (…) Por acaso nós tínhamos um colega de história que fez muita investigação (…) Ele é uma pessoa que tem livros escritos e que trabalhou no Brasil e cá na investigação. E então quando eu tinha alguma questão destas, conversava com ele. Quando tinha alguma dúvida conversava com ele. Mas habitualmente não se encontram assim pessoas muito despertas para esse tipo de coisas, porque …mas com ele … e, por acaso, foi muito engraçado, porque ele num problema que era aquele da *Casa da Índia* e que o imposto ficava para o rei.
I - Sim.
Fernanda - Ele criticou no sentido … «para o rei, não. Porque é que as pessoas … isto não era para o rei, isto era para a Casa Real. Porque a Casa Real é um conjunto de pessoas muito grande. Isto é uma deturpação, o que é que uma pessoa fica a entender ao ler este problema? Que o rei é que ficava com tudo, mas não, estes impostos eram para a Casa Real e isto servia para um conjunto muito alargado»
Inv - Mas os problemas originais diziam para sua Majestade.
Fernanda - Pronto, mas ele foi crítico.
Inv - É um aspecto curioso.
Fernanda - É uma personalidade curiosa que sabe muito destas coisas. Mas não conhecia aquele imposto … como é que se chamava o imposto?
Inv - Quarto e vintena.
Fernanda - Não conhecia nesses termos, mas disse «Hei-de ir ver» … Conhecia era a quintalada. Acho que era qualquer coisa sobre a pimenta. Pimenta era aquele, não era?
Inv - Aquele imposto era aplicado a tudo o que entrava, a todas as mercadorias.
Fernanda - Era qualquer coisa do Brasil, eu já me lembro (ENT, 29/06/06).

4.6. Sumário

Durante o período em que decorreu o Percurso de Formação, as futuras professoras foram confrontadas com uma face da matemática que mostra que esta é uma parte integrante da cultura humana. Aliás, essa aproximação cultural à matemática propiciada pela história da matemática, em geral, e pela resolução de problemas históricos, em particular, foi bastante valorizada por todas as participantes no estudo.

Na disciplina de Geometria, salienta-se o interesse revelado pelos problemas históricos e pela sua resolução que se manifestou pelas reacções aos problemas propostos e no ambiente de trabalho criado, em que sobressaiu a troca de impressões e opiniões a propósito dos problemas e do seu contexto. Recorde-se a propósito do problema *O comércio de panos entre Portugal e Castela*, a aceitação, por todas as alunas, da “esperteza” do mercador português, isto é, do uso matemático que ele faz para seu próprio benefício da diferença existente entre as unidades. Esse interesse foi corroborado pelas opiniões manifestadas pelas participantes no estudo[159], quer nas entrevistas, quer nos questionários. De entre as várias razões apontadas para a valorização positiva atribuída aos problemas, destaca-se a natureza fora do habitual e problemática das tarefas propostas, o prazer da descoberta e o desenvolvimento do raciocínio. A vertente cultural proporcionada pela resolução de problemas foi também acentuada. As opiniões manifestadas sugerem que os problemas históricos propostos, pelo simples facto de envolverem sistemas de unidades desconhecidos e com uma imensa diversidade de relações, podem ser encarados como problemas verdadeiramente novos que permitem ao futuro professor revisitar e reflectir sobre conceitos e processos relacionados com a Medida e o Número, muitos deles considerados rotineiros quando se trabalha no Sistema Internacional de Unidades.

O desafio lançado na disciplina de História e Metodologia da Matemática de exploração didáctica de alguns problemas para uma exposição interactiva destinada a alunos do 3º ao 6º ano de escolaridade e que envolvia a construção de materiais manipulativos que apoiassem a sua resolução foi unanimemente reconhecido como uma experiência formativa muito enriquecedora. Como já foi salientado, aquando do planeamento dos módulos, Beatriz e Joana, desenvolveram expectativas muito baixas quanto ao interesse das crianças pelos problemas históricos. Foi, por isso, com surpresa, que constataram que estavam erradas. Parece que, nesta fase do estudo, estas futuras professoras não tinham muita confiança nas potencialidades da integração da história da matemática no processo educativo. Atitude que, no final do percurso de formação, se altera radicalmente. Para além da percepção que os problemas históricos podem ser motivadores para as crianças, Inês reconhece que o planeamento, a construção de materiais e a orientação das crianças lhe proporcionou uma nova visão sobre a resolução de problemas e sobre o papel dos materiais nesse processo.

Ainda a nível desta experiência formativa há que destacar, como aspecto menos positivo, a constatação de uma excessiva centralização das futuras professoras no módulo que lhes foi atribuído. Apesar de algumas delas (Beatriz e Inês) terem dado apoio noutros módulos que não aquele por que eram responsáveis, não revelaram muito interesse pela resolução dos problemas dos outros módulos e/ou pela compreensão das estratégias delineadas pelas colegas. Isso tornou-se notório quando a investigadora propõe a Inês a

[159] Apesar de não serem objecto de estudo os restantes elementos da turma, os dados recolhidos apoiam esta inferência.

exploração em sala de aula da segunda tarefa do módulo Capacidade (anexo 5) e esta não só a considera difícil, como reconhece que não a resolveu aquando da exposição. Também Joana, que só dinamizou o módulo Comprimento, não faz em sala de aula nenhuma ligação desse problema com a resolução manipulativa executada pelos seus alunos na Exposição.

Inês, Joana e Beatriz constituem três exemplos diferentes relativamente à forma como integraram e exploraram problemas históricos em sala de aula. Embora todas procurem apresentar as tarefas de forma motivadora e desafiadora para os alunos, distinguem-se, em primeiro lugar pela forma como exploram o contexto dos problemas. Beatriz e Inês parecem dar mais importância à exploração do contexto dos problemas e à promoção de ligações com a disciplina de história. Essa ligação é promovida através da leitura de um pequeno texto que antecede os problemas, seguido de questões de clarificação dirigidas aos alunos. Esta ligação dos problemas com a história foi, globalmente, bem recebida por parte dos alunos do ensino básico. Como reconhece Inês, os seus alunos apreciaram-na e sempre que propôs problemas históricos mantiveram-se motivados e empenhados na sua resolução, situação muito pouco comum nas aulas de matemática. A análise das aulas de Beatriz e Joana também apontam no mesmo sentido, ainda que ambas reconheçam que os seus alunos não gostam da disciplina de história. Neste âmbito, Inês admite que sentiu algumas dificuldades na planificação da introdução dos problemas e que essa é uma etapa com algumas complicações, pois não é fácil para o professor explorar o contexto dos problemas.

Inês distingue-se das colegas por aproveitar os problemas para dar a conhecer alguns aspectos da história da medida. Ainda que não os explore em profundidade, refere-os e alerta os alunos para eles. É o que se passa, por exemplo, quando os alunos a questionam sobre a existência de um símbolo para indicar a antiga unidade de massa *(quintal)* ou, quando a propósito do problema *A venda do trigo* informa os alunos de que a situação da desigualdade das unidades de volume referidas no problema existiu até à muito pouco tempo na região em que vivem.

Das dificuldades identificadas pelas futuras professoras na exploração dos problemas em sala de aula, destaca-se o reconhecimento de que os problemas históricos, pela especificidade da linguagem, da terminologia usada e dos contextos reais que referem, exigem cuidada discussão e interpretação dos enunciados. A compreensão e familiarização dos alunos com a situação exposta no problema, a identificação dos dados e da questão do problema são reconhecidas, por todas as participantes, como fundamentais para uma integração bem sucedida dos problemas históricos em sala de aula.

A análise das aulas e das reflexões que as participantes fazem sobre as mesmas, apoia a constatação de que a orientação da actividade de resolução de problemas foi um dos aspectos mais críticos da integração dos problemas históricos em sala de aula, na medida em que as futuras professoras nem sempre deram tempo aos alunos para delinearem um plano de resolução e/ou percepcionarem os cálculos a realizar. Certamente fruto da sua inexperiência e também das crenças que possuem relativamente ao ensino da matemática, as dificuldades reflectiram-se, por vezes, na exploração dos conteúdos matemáticos. Das participantes no estudo, Joana é aquela que melhor consegue relacionar o problema com a exploração dos conceitos e relações requeridos para a sua resolução. É também a única que recorre a materiais manipuláveis (no problema do *Gato e o rato*), mostrando ser capaz de orientar os alunos para o estabelecimento de ligações entre a actividade desenvolvida com materiais e as ideias matemáticas modeladas. É porém, necessário ter presente que se está a analisar a prática de ensino de futuras professoras na disciplina curricular de Prática Pedagógica e que, muitas das dificuldades identificadas são imputáveis ao estádio de formação das futuras professores.

Da reflexão que as futuras professoras fazem sobre a sua prática de ensino, bem como da análise dessa mesma prática feita pelas próprias e pelos seus professores cooperantes, pode concluir-se que, em geral, os alunos do ensino básico acharam os problemas históricos interessantes e desafiadores. As opiniões manifestadas pelos dois professores cooperantes apontam no mesmo sentido. Ambos lhes reconhecem um grande potencial para a educação matemática, ainda que notem como obstáculo à sua introdução em sala de aula a pouca acessibilidade e divulgação dos mesmos. Recorde-se a este propósito a reflexão feita por Fernanda, professora cooperante sob cuja orientação trabalharam Beatriz e Joana, que afirma que sentiu que os problemas foram motivadores para os alunos e que, além disso, os alunos reagiram bem e gostaram dos problemas históricos. Fernanda, salienta também como positiva a introdução no processo de ensino/aprendizagem da dimensão social e cultural da actividade matemática, propiciada pelo contexto dos problemas e das ligações com outras disciplinas do currículo. A esse propósito lembra o comentário de um aluno que se mostra satisfeito com o muito que está a aprender e afirma que sentiu que este ele estava "alargar os horizontes dele, que não estava à espera de aprender ali coisas que não tinham a ver com …directamente com a matemática" (Fernanda, 29/06/06).

A história da matemática foi uma componente do Percurso de Formação que todas as participantes reconheceram como inovadora e significativa a dois níveis: (i) enquanto contributo para a formação profissional, nomeadamente ao nível do desenvolvimento do conhecimento didáctico; (ii) enquanto recurso para o ensino e aprendizagem da matemática.

Por exemplo, Inês entende que a história da matemática ao permitir que o professor perceba a origem do estudo de certos conteúdos, proporciona-lhe também um meio de explicar aos alunos o porquê desses conteúdos e também tornar os conteúdos mais reais, mais próximos da actividade humana. Beatriz, salienta o enriquecimento cultural, o desenvolvimento de um novo olhar sobre a matemática e um incremento do gosto pela disciplina que se reflecte na forma de encarar a profissão e os seus obstáculos. Por seu lado, Joana destaca uma maior consciencialização da matemática como uma ciência em evolução e da presença da matemática nas necessidades mais ínfimas do homem. Em particular, é assumido o contributo da resolução de problemas históricos para o desenvolvimento da competência matemática, ao nível dos seus conhecimentos matemáticos e das capacidades de resolução de problemas e de raciocínio.

Enquanto recurso para o ensino da matemática, todas as participantes reconhecem que a sua integração através de problemas históricos resulta bem em termos de aprendizagem da matemática, mas também para salientar a face social e humana desta ciência. Estes aspectos são também salientados pelos dois professores cooperantes que, além disso, destacam a reacção positiva e o interesse dos alunos e a motivação para a sua resolução. Ambos são de opinião que a integração de problemas históricos foi uma experiência bem sucedida. Recorde-se, a este propósito, que Fernanda lembra que, em geral, os alunos do ensino básico possuem uma representação da matemática muita centrada na execução de cálculos e a história da matemática pode contribuir para a construção de outras imagens. Como a própria refere a propósito de um dos seus alunos: "Notava-se que ele estava a …alargar os horizontes dele, que não estava à espera de aprender ali coisas que não tinham a ver com …directamente com a matemática.". Manuel também aponta no mesmo sentido, reconhecendo que, por vezes, a excessiva centralização do professor nos conteúdos curriculares leva-o a descurar outras vertentes, como a história da matemática, que podem contribuir para aprendizagens "mais vivas e eficientes". Este professor, que salienta como particularmente positiva a forma como Inês integra os problemas históricos em sala de aula, salienta também a abertura de ligações a outras disciplinas do currículo: um problema histórico (…) é sempre interdisciplinar, quer com a história, quer com a linguagem que se utiliza… leva-os a outro ambiente, sobretudo quando se introduz o problema como foi feito, se faz uma resenha … digamos (…) procurar enquadrar socialmente e culturalmente o problema no espaço, tempo, actividade, em que ele é, digamos a realidade, é importante porque cria sempre focos de interdisciplinaridade". As conversas que Fernanda mantém com o seu colega de história reforçam que o recurso a problemas históricos abre de facto caminho à concretização de interdisciplinaridade.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E REFLEXÕES FINAIS

Na sequência do capítulo anterior, em que guiados pelos instrumentos de análise e pelos dados recolhidos através das técnicas usadas, analisámos os resultados, discutindo significados que fomos inferindo, este capítulo encontra-se organizado em duas partes. Na primeira, apresentam-se e discutem-se as principais conclusões do estudo. Na segunda parte, apresentam-se algumas recomendações emergentes do estudo. Em particular, discutem-se as potencialidades da integração da história da matemática na formação de professores. Finalmente, identificam-se algumas das limitações do \estudo.

5.1. Principais conclusões do estudo

A avaliação do percurso de formação, entendido como um conjunto de intervenções articuladas em várias disciplinas de um currículo de formação inicial de professores de matemática para o ensino básico e em que o recurso a problemas históricos se constituiu como a via privilegiada para o desenvolvimento do conhecimento didáctico de futuros professores, é o ponto de referência central deste ponto. Assim, começa-se por confrontar os resultados com as questões de investigação, para então se proceder à avaliação do estudo como um todo.

Procuremos agora dar resposta às questões que orientaram a investigação formuladas no capítulo I: (Q_1) É possível construir estratégias de ensino com foco na história da matemática que relevem como experiências de aprendizagem a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas e de ligações com outras disciplinas do currículo e o quotidiano passado? (Q_2) Como é que futuros professores da escolaridade básica (primeiros 6 anos de escolaridade) aderem à proposta de integrar problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da matemática? Como é que procedem a essa integração? Que aspectos valorizam na exploração didáctica dos problemas? (Q_3) Como é que futuros professores da escolaridade básica percepcionam o contributo do Percurso Formação concebido para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional? (Q_4) Envolver futuros professores na resolução, na planificação e na orientação da resolução de problemas históricos contribui para desenvolver o seu conhecimento didáctico?

Antes de se avançar com as respostas possíveis a estas questões, deve salientar-se que o número reduzido de futuras professoras acompanhadas em permanência neste estudo imposto pela metodologia de natureza qualitativa e cunho interpretativo adoptada[160], impõe reforçar que as respostas às questões de investigação se sustentem na análise efectuada e na validação dessa análise pelas três futuras professoras, Beatriz, Joana e Inês, não sendo susceptíveis de generalização. Não obstante, os resultados e conclusões produzidos pretendem acrescentar alguma compreensão sobre o valor da integração da história da matemática na formação inicial de professores da escolaridade básica. Como lembram Brown e Borko (1992, p. 235, 236) a propósito das conclusões de estudos qualitativos:

> Careful documentation of the experiences of teachers in such programs [teacher study programs], and the resulting changes in their knowledge, beliefs, dispositions, thinking and actions, will provide further insights into the process of becoming a mathematics teacher.

A primeira questão está relacionada com a possibilidade e a viabilidade de construção de estratégias de ensino com foco na história da matemática que relevem como experiências de aprendizagem a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos diversos e de ligações com outras disciplinas do currículo e o quotidiano passado.

No Percurso de Formação desenvolvido tomou-se como ponto de partida um conjunto de problemas históricos, adaptados a partir de situações expostas em livros

[160] A par com as condicionantes impostas pelo funcionamento das disciplinas de Prática Pedagógica e as limitações temporais impostas pelo Prodep.

portugueses de Aritmética Comercial dos séculos XVI e XVII, considerados adequados ao 2º CEB e cujo fio condutor é a profunda relação entre o problema da Medida e a extensão do conceito de número. Em sessões de trabalho, os problemas foram propostos a três futuras professoras a realizar estágio no 6º ano de escolaridade, foram resolvidos e discutidos do ponto de vista da sua exploração didáctica em sala de aula. Nessa discussão incluem-se as questões relativas aos conceitos e ideias matemáticas presentes nos problemas e possíveis abordagens metodológicas aos problemas. Nestas incluem-se a discussão da possibilidade de utilizar os problemas para introduzir novos conceitos ou para aplicar e aprofundar a compreensão de conceitos e procedimentos, mas também a possibilidade e a pertinência de usar materiais manipulativos para modelar o problema/ideias matemáticas ou sobre a necessidade de dar a conhecer aos alunos algo sobre a situação exposta no problema.

Tal como os participantes reconheceram e os seus professores cooperantes corroboraram, fruto do percurso de formação, foi possível construir estratégias de ensino e aprendizagem centradas na resolução de problemas históricos. Ainda que as participantes no estudo constituam exemplos diferentes relativamente à forma como orientaram a resolução de problemas, a sua integração em sala de aula foi uma realidade que as colocou perante o desafio de motivarem os alunos para a sua resolução, de guiarem e apoiarem os alunos no processo de resolução, esclarecendo dúvidas, formulando questões de clarificação, … Os alunos do ensino básico, por sua vez, mostraram-se motivados e empenhados na sua resolução e os dois professores cooperantes frisaram o interesse e contributo dos problemas propostos para a aprendizagem da matemática. Relativamente ao estabelecimento de conexões, destaca-se que a introdução da perspectiva contextual propiciada pelos problemas aplicados, permite concretizar ligações entre as disciplinas de Matemática e de História e Geografia (ou mesmo, de Português). Simultaneamente, essa contextualização dá conta da presença e do papel da matemática nos mais variados campos da vida social. Finalmente, mas não por último, o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos é inerente à própria matemática. Da análise dos resultados, podemos concluir que apenas uma das futuras professoras conseguiu de forma explícita implementar um ensino em que as conexões intra-matemáticas estiveram presentes.

Deste modo, conclui-se assim que os resultados apoiam uma resposta claramente afirmativa à primeira questão de investigação.

Passemos agora à questão de saber como é que futuros professores da escolaridade básica (primeiros 6 anos de escolaridade) respondem à proposta de integrar problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como é que procedem a essa integração? Que aspectos valorizam na exploração didáctica dos problemas (a compreensão do problema, o delineamento de um plano, a execução de cálculos, os conteúdos matemáticos necessários à sua resolução, o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos ou a outras disciplinas curriculares ou ao quotidiano, …)? Que dificuldades revelam?

Os resultados apontam para a conclusão de uma grande receptividade, por parte das participantes[161], aos problemas históricos e à sua integração em sala de aula como experiência de aprendizagem da matemática. Relativamente à forma como os integram em sala de aula, a análise efectuada permite salientar a atenção dada a esse aspecto por parte de qualquer uma das futuras professoras, concretizando-se a intenção de tornar os problemas motivadores para os alunos e despertar o interesse para a sua resolução.

Contudo, no que respeita à orientação da actividade de resolução de problemas, as principais dificuldades manifestadas prendem-se com vários aspectos. O primeiro, comum a todas as participantes, tem a ver com a pouca atenção que dão à orientação dos alunos para o estabelecimento de um plano de resolução. A passagem, algo abrupta, entre as etapas de familiariarização com a situação exposta e de resolução dá origem a que alguns alunos se sintam perdidos e não saibam o que fazer, isto é, que manifestem dificuldades em percepcionar o que fazer, aguardando assim as sugestões da respectiva professora. Deste modo, a ênfase é posta na orientação dos alunos para a execução de um conjunto de acções que conduzam à solução desejada. Nesta etapa, uma das futuras professoras mostrou ser capaz de explorar compreensivamente os conceitos e procedimentos matemáticos requeridos para a resolução de problemas. Recorde-se que a maior dificuldade identificada na prática de ensino das outras duas futuras professoras relaciona-se, precisamente, com a orientação dos alunos para o entendimento dos conceitos matemáticos que permitem modelar os problemas. Ainda que Inês seja, das três professoras estudadas, aquela que, em contexto de resolução problemas, revela maior competência matemática, em sala de aula,

[161] Ainda que não tenham sido objecto de análise deste estudo, outras futuras professoras, manifestaram junto da investigadora interesse em propor também aos seus alunos a resolução de problemas históricos. Após discussão prévia com a investigadora, cada uma delas concretizou essa experiência.

perante alunos com maiores dificuldades[162], assume uma atitude muito prescritiva e, não tenta, através de questionamento, levar o aluno a raciocinar por si. A esta atitude não parece ser alheio o juízo de valor que faz sobre as capacidades dos alunos. Por sua vez, Beatriz esforça-se, nitidamente, por conseguir levar os alunos a fazer a ligação entre o problema e a matemática necessária à sua resolução, mas apresenta algumas dificuldades associadas à necessidade consciente de planear em detalhe as aulas, o que parece apontar para conhecimentos matemáticos pouco consolidados.

Os dados revelam que um aspecto bastante valorizado por todas as participantes é a exploração dos contextos dos problemas. Os problemas históricos explorados em sala de aula traduzem aplicações matemáticas ao quotidiano passado ou situações de carácter recreativo. Os primeiros, no qual se inclui *O Quarto e Vintena*, *Quebra de mercadorias*, *Baratar mercadorias*, entre outros, pela sua própria natureza, salientam a relação estreita entre a matemática e muitas situações do quotidiano (pagamento de impostos, comparações de quebras relativas, regulação do comércio, etc.). Outros, como *A venda do trigo* permitem relevar a relação entre problemas sociais concretos e a evolução da matemática e, finalmente, os de carácter recreativo mostram uma vertente lúdica associada a um desafio intelectual. Ainda que muitos desses aspectos não fossem explicitamente focados em sala de aula, a análise dos dados aponta, claramente, que as futuras professoras conseguiram passar, nas suas aulas, imagens de que a matemática sempre esteve presente na vida do Homem, que ajuda a dar resposta a muitos dos problemas originados pela vida em sociedade.

Apesar das limitações identificadas, é de destacar a opinião dos dois professores cooperantes no que concerne à valorização didáctica dos problemas históricos. Para além de ambos terem notado a motivação dos alunos para a sua resolução, Fernanda destaca o valor dos problemas históricos para a aprendizagem da matemática e refere as suas potencialidades no desenvolvimento da apreciação do papel da matemática na resolução de problemas da sociedade, até porque admite que, em geral, os alunos do ensino básico possuem uma representação da matemática centrada apenas na execução de cálculos. Manuel também aponta no mesmo sentido, reconhecendo que, por vezes, a excessiva

[162] Há que reconhecer que um número razoável de alunos da turma enfrenta com sucesso a actividade de resolução de problemas.

centralização do professor nos conteúdos curriculares leva-o a descurar outras vertentes que podem contribuir para aprendizagens "mais vivas e eficientes".

Em súmula, nas aulas de 6º ano de escolaridade, através dos problemas históricos, explicita ou implicitamente, são estabelecidas ligações com aspectos do quotidiano passado português que remetem para conteúdos da disciplina de História e que tornam perceptível o papel da matemática na resolução das situações expostas nos problemas. Nesse sentido, os resultados do estudo sugerem que o recurso na escolaridade básica a problemas históricos é uma via com muitas potencialidade para a humanização da disciplina e para a construção de uma imagem da matemática como uma ciência em evolução, estreitamente relacionada com a vida social e a cultura.

Há também que notar que os resultados deste trabalho apoiam o argumento de que a história da matemática pode fomentar a comunicação entre os professores das diferentes disciplinas do currículo e, quiçá, envolver os professores em projectos que promovam realmente a interdisciplinaridade (Furinghetti e Somaglia, 1998). Isso é, aliás, sugerido pela professora cooperante Fernanda ao admitir, a propósito dos problemas históricos, a necessidade de discutir com um colega de História algumas situações aí focadas. Assim, poderá afirmar-se que o uso de problemas históricos no 2º CEB dá uma perspectiva humanista ao conteúdo matemático. De facto, os diálogos que estabelece com um colega, professor de História, apontam o interesse que ambos tiveram nos problemas. Da parte dela, releva-se a necessidade de aprofundar o seu conhecimento relativamente às situações históricas referidas nos mesmos e, da parte dele, a crítica à formulação do enunciado do *Quarto e Vintena*, mas também a surpresa e o interesse despertado por um imposto de que nunca ouvira falar. Ou seja, os resultados do estudo apontam uma via para a concretização da interdisciplinaridade que pode passar por um trabalho concertado e articulado entre os professores de História e Geografia, Português e Matemática, através da resolução de problemas históricos

No que se refere à terceira questão - como é que futuros professores da escolaridade básica percepcionam o contributo do percurso formação para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional? – é notório que a história da matemática foi uma componente do Percurso de Formação que todas as participantes reconheceram como inovadora e significativa a dois níveis: (i) enquanto contributo para a formação profissional, nomeadamente ao nível do desenvolvimento do conhecimento didáctico; (ii) enquanto recurso para o ensino e aprendizagem da matemática.

Por exemplo, Beatriz encara a história da matemática como um contributo importante para a construção de cultura matemática, na medida em que o conhecimento histórico permite um novo olhar sobre a matemática, uma melhor preparação para enfrentar a profissão e repercute-se nas imagens passadas em sala de aula. Assim, admite uma grande evolução relativamente ao modo como perspectiva o papel da história da matemática no ensino e aprendizagem da disciplina, considerando-a uma experiência de aprendizagem a ter em conta no ensino básico, em particular, se integrada, como teve ocasião de experiênciar.

Relativamente ao conjunto de problemas históricos propostos às futuras professoras, a análise dos dados obtidos revela o interesse despertado pelos problemas, o gosto e a satisfação sentidos na sua resolução. Entre as razões avançadas, destaca-se o prazer da descoberta desencadeado pela natureza problemática e pouco habitual das tarefas propostas. A vertente cultural proporcionada pela resolução dos problemas também foi acentuada pelas participantes no estudo, na medida em que alguns dos problemas, ao retratarem situações de aplicação da matemática ao quotidiano passado, dão a conhecer aspectos sociais, económicos e culturais que determinaram a necessidade de criar um sistema de unidades estandardizado. Neste âmbito, não é de negligenciar a sensibilização para a importância da história das unidades de medida, proporcionada pela visita ao Museu de Metrologia. Quando os problemas surgiram, pela primeira vez, na disciplina de Geometria, as unidades neles referidas já eram familiares às futuras professoras, que mais não seja em termos de nomenclatura.

Em termos de desempenho, a análise efectuada incidiu sobre os registos escritos feitos por cada uma das futuras professoras. Dada a metodologia de trabalho em grupo, adoptada nos Seminários, não é possível fazer uma análise objectiva e imparcial das resoluções de cada uma das futuras professoras. Ainda assim, Inês destaca-se claramente das duas colegas, Beatriz e Joana, na capacidade de manipulação dos antigos sistemas de unidades e na apresentação de resoluções organizadas e detalhadas. Dessa organização e detalhe poderá inferir-se que as acções executadas são fruto de uma percepção prévia do que fazer para dar resposta à questão do problema. Beatriz e Joana não se distinguem muito entre si, a que não será alheio o facto de trabalharem em conjunto. Destaca-se que nenhuma das participantes no estudo revelou o hábito, de obtida a solução, proceder à sua verificação e, posteriormente, à sua adequação ao problema. Como já foi referido, esta forma de proceder replica-se na prática pedagógica.

As opiniões manifestadas nas entrevistas reforçam a convicção que os problemas históricos propostos e resolvidos, pelo facto de envolverem sistemas de unidades desconhecidos, e com uma imensa diversidade de relações, e evocarem situações sociais do quotidiano passado, foram encarados pelas participantes como problemas verdadeiramente novos. Nesse sentido, proporcionaram a ocasião para revisitar conceitos matemáticos[163] e procedimentos considerados rotineiros quando se trabalha no Sistema Internacional de Unidades (de que é exemplo a redução de unidades de uma mesma grandeza[164]).

A aproximação cultural à matemática propiciada pela resolução de problemas históricos e pelo conhecimento de alguns aspectos na história das unidades de medida em Portugal (Apêndice 1), parece ter, de imediato, algum reflexo na prática pedagógica desenvolvida por duas das participantes, Beatriz e Joana, no 1º ciclo do ensino básico. Estas, através de uma dramatização alusiva à evolução nas unidades de medida, veiculam a ideia de que as unidades hoje usadas representam uma evolução relativamente às do passado, dando a conhecer aos alunos de 3º ano de escolaridade alguns problemas causados pelo uso de unidades de carácter antropométrico.

Em termos do repto, lançado na disciplina de História e Metodologia da Matemática (4º ano, 1º semestre), de delinear e construir materiais para apoio à resolução manipulativa de um conjunto de problemas históricos[165], destaca-se a opinião muito favorável das futuras professoras. Esta experiência foi, unanimemente, reconhecida como uma experiência formativa muito enriquecedora do ponto de vista profissional, na medida em que proporcionou uma outra visão sobre a utilização de materiais manipulativos e sobre a reacção dos alunos à resolução de problemas históricos. A análise dos dados revela que aquando da planificação, existia entre as futuras professoras algum cepticismo quanto à

[163] Tais como os conceitos de comprimento, área, capacidade, volume, massa, medida, unidade de medida, sistema de unidades, fracção, número fraccionário, razão, proporção, proporcionalidade directa, …

[164] Recorde-se que na resolução dos problemas propostos em Geometria, tanto Beatriz como Joana têm necessidade de recorrer à regra de três simples.

[165] Seleccionados para integrar uma Exposição Interactiva destinada a alunos do ensino básico do 3º ao 6º anos de escolaridade.

atitude das crianças perante estes. Porém, a reflexão sobre esse momento de formação mostra que a realidade foi bem diferente. Todas as participantes no estudo reconhecem a reacção muito positiva das crianças aos problemas históricos. Joana e Beatriz destacam a importância da fase de planeamento para despertar o interesse e a motivação das crianças e a primeira valoriza explicitamente todas as etapas em que se viu envolvida (planear, seleccionar/construir materiais e orientar as crianças na resolução manipulativa dos problemas) como marcante na construção de uma nova visão sobre a resolução de problemas e sobre o papel dos materiais, nesse processo. A opinião manifestada pelo professor cooperante Manuel corrobora esse sentimento e, para além disso, é reveladora do interesse que a Exposição lhe despertou. Este professor de 2º ciclo do ensino básico destaca o cuidado posto na organização dos módulos, na selecção/construção dos materiais e, sobretudo o desempenho didáctico das futuras professoras na orientação da resolução de problemas: "As miúdas [refere-se às futuras professoras] estavam à vontade … as miúdas eram capazes de explicar aquilo que se pretendia e de facto os miúdos chegavam ali e conseguiam ter rentabilidade" (ENT, 30/06/07). Esta opinião concorre com a reflexão feita pelas futuras professoras, sendo, por isso, um indicador da importância de envolver futuros professores em experiências formativas que envolvam a resolução de problemas e o desenvolvimento de materiais que permitam modelar os problemas e, nomeadamente, a importância de actividades extra curriculares, desenvolvidas em ambientes não formais.

Em síntese, os resultados sustentam a afirmação de que a aproximação cultural à matemática propiciada pela resolução de problemas históricos foi um aspecto do Percurso de Formação que todas as participantes consideram motivador e muito positivo para a sua formação. Não só ficaram a conhecer aspectos da história das unidades de medida e, em particular, questões e problemas que motivaram a criação do sistema métrico decimal, como também foram encorajadas a discutir ideias matemáticas e resolver problemas. Relativamente ao entendimento das potencialidades didácticas da integração da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem, os dados recolhidos permitem inferir o interesse e a pertinência do recurso a problemas históricos para a concretização dessa integração no ensino básico. Saliente-se que, ao longo do Percurso de Formação, se verifica uma profunda evolução no pensamento das futuras professoras. De facto, a análise realizada e validada pelas participantes sustenta a afirmação de que se verifica uma mudança profunda na opinião manifestada relativamente às potencialidades didácticas dos problemas históricos. Se, no início do PF, nenhuma delas punha sequer a hipótese de vir a propor problemas dessa natureza aos alunos do ensino básico, a partir das primeiras experiências na Exposição e em sala de aula, assiste-se a uma mudança de postura. Essa evolução decorreu sobretudo da constatação do interesse dos alunos pelos problemas históricos. Essa mudança de atitude ocorre também com a professora cooperante Fernanda que admite que, ao receio inicial com que encarou os problemas, sobreveio o reconhecimento do seu potencial motivacional e para a aprendizagem da matemática.

Das opiniões e reflexões das participantes sobre o seu envolvimento na organização e exploração didáctica de problemas históricos para um ambiente de ensino e aprendizagem não formal, pode inferir-se que esta experiência formativa constituiu um contributo importante para uma maior consciencialização das futuras professoras relativamente às potencialidades didácticas da história da matemática. Igualmente, é de referir que a reacção dos alunos do ensino básico às tarefas de resolução de problemas históricos propostas na Exposição Interactiva foi muito positiva. Inês, Beatriz e Joana destacam a boa aceitação dos problemas por parte dos alunos do ensino básico (3º a 6º anos de escolaridade), opinião em que são acompanhadas por Manuel que identifica essa experiência como especialmente adequada à integração da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem.

Em termos de avaliação global do PF, todas as participantes concordam que a experiência vivida foi muito positiva para a sua formação profissional, aprofundando o seu conhecimento para ensinar matemática e permitindo concretizar práticas de ensino inovadoras e motivadoras para os seus alunos. Resultados que apoiam a recomendação de Swetz (1995, p. 33): "The seeking out and employing historical mathematical problems in classroom instruction is a rewarding and enriching experience of which all mathematics teachers should partake".

Finalmente, há que dar resposta à última questão: envolver futuros professores na resolução, na planificação e na orientação da resolução de problemas históricos contribui para desenvolver o seu conhecimento didáctico?

Para tentar responder, remetemo-nos para a análise efectuada no capítulo anterior relativamente à prática pedagógica de três futuras professoras de matemática do ensino básico, com incidência no seu desempenho didáctico na orientação da actividade de resolução de problemas históricos.

A reacção das futuras professoras aos problemas históricos sugeridos pela investigadora para exploração em sala de aula foi-se modificando de forma gradual. A especificidade da linguagem[166], a terminologia usada e os contextos reais que invocam, contribuíram para que, numa primeira leitura, as futuras professoras os considerassem difíceis, nomeadamente, para alunos do 2º ciclo. Ilustrativo desta afirmação (observada pela investigadora em várias ocasiões) é a reacção de Inês à proposta de explorar em sala de aula um dos problemas da Exposição (o problema da *Venda do Trigo*), considerando-o muito difícil (embora reconhecendo que não o tentou resolver). Tal atitude modifica-se após a sua leitura atenta com o propósito de o resolver e de o poder vir a propor em sala de aula. O mesmo acontece com as outras duas participantes no estudo. Relembra-se a relutância inicial de Joana em propor, numa aula de 6º ano de escolaridade, o problema do *Quarto e Vintena* que, certamente, por envolver contextos reais de um quotidiano distante exige, como condição prévia à sua resolução, a compreensão do contexto da situação exposta. Aliás, Fernanda (professora cooperante sob cuja orientação trabalham Beatriz e Joana) aponta também a dificuldade inicial causada pela linguagem dos problemas e admite ter sentido uma certa relutância inicial perante a sua adequação aos alunos. Estes dados são um indicador de que a linguagem inabitual dos enunciados pode desencadear no potencial resolvedor uma primeira reacção negativa aos problemas históricos, que se dissipa após uma leitura atenta e o entendimento da situação exposta. Assim, em termos de resolução de problemas históricos a etapa de compreensão e familiarização com a situação exposta revela-se fundamental.

Assim, não é de estranhar que as futuras professoras sentissem também alguma relutância em integrar, nas suas planificações, este tipo de problemas. Ao aspecto atrás mencionado parece juntar-se o receio de que os alunos não se sintam motivados e evidenciem atitudes pouco favoráveis à sua resolução. Por exemplo, Beatriz e Joana reconhecem possuir expectativas baixas em relação à atitude dos alunos perante esse tipo de tarefa, sentimento em que são acompanhadas pela sua professora cooperante. Esse sentimento esbate-se à medida que se vão dando conta da reacção favorável dos alunos e

[166] A formulação dos enunciados, como referido no capítulo III, manteve-se fiel ao enunciado original.

dá lugar a uma atitude muito favorável à sua integração em sala de aula, que foi bem patente na reflexão da professora cooperante e das futuras professoras. A evolução objectiva, por parte de Beatriz e Joana, relativamente ao reconhecimento de potencialidades didácticas dos problemas históricos, acabou por transparecer nas sessões de trabalho realizadas em paralelo com a PP no 2º CEB, nas quais foi notória a existência de um interessante crescente em relação aos problemas históricos. Os dados recolhidos sugerem que a experiência formativa vivida na Exposição não terá sido alheia a essa mudança, embora isso não tenha sido muito perceptível em Inês, que revelou muito interesse pelos problemas históricos desde o início do PF, quer enquanto resolvedora (actividade em que revela um bom nível de desempenho), quer como experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Esta futura professora manifesta, no entanto, o sentimento de que a visita dos alunos à Exposição contribuiu para uma maior aceitação, em sala de aula, de problemas referentes ao passado histórico.

Em súmula, a possibilidade de resolver problemas históricos e, sobretudo, de os encarar enquanto objecto de ensino e aprendizagem, deu às futuras professoras uma nova perspectiva sobre os mesmos e, em particular, sobre as potencialidades motivacionais do seu uso na aula de matemática.

Relativamente à integração de problemas históricos na aula de matemática no 6º ano de escolaridade, Inês, Joana e Beatriz constituem três exemplos diferentes relativamente à forma como os introduzem e os exploram do ponto de vista didáctico, distinguindo-se essencialmente no modo como orientam a sua resolução e exploram o conteúdo matemático presente nos problemas.

Qualquer uma delas manifestou preocupações relativas à forma de os integrar na aula e do modo de desafiar e motivar os alunos para a sua resolução. A análise da prática de ensino, a reflexão sobre essa prática, feita pelas futuras professoras e pelos seus professores cooperantes, apoiam a conclusão de que foram bem sucedidas a esse nível. Por exemplo, na turma de Inês, um dos alunos, já identificado como tendo mais propensão para distrair os colegas do que realizar as actividades propostas, resolve o problema histórico e manifesta o interesse em ir ao quadro resolvê-lo.

Um primeiro aspecto a apontar relaciona-se com a exploração do contexto dos problemas. Inês, que assume valorizar problemas que traduzam aplicações da matemática ao quotidiano, explora em sala de aula três problemas dessa natureza – *Quarto e Vintena, Venda do Ttrigo* e *Quebra de Mercadorias*. Em todos eles dá uma atenção especial à forma como os introduz na aula. Por exemplo, no problema do *Quarto e Vintena,* através do diálogo que enceta com os alunos, estabelece a ligação clara com assuntos abordados na disciplina de História. Mais tarde, ao propor o problema da *Quebra de Mercadorias,* apela à exploração feita no Quarto e Vintena, relacionando a situação exposta com o comércio português da época dos descobrimentos. Na Venda do Trigo, introduz na sala de aula aspectos relativos à variabilidade das unidades de medida no passado ligando-as à realidade regional dos alunos. Outra das futuras professoras, Beatriz, propõe igualmente três problemas aplicados, recorrendo sempre a um texto breve, apresentado numa forma apelativa (que serve como factor de motivação para a realização da tarefa), em que expõe a situação exposta. Não procura de modo explícito estabelecer conexões com outras disciplinas, nem realçar o papel da matemática num determinado contexto sócio-cultural, para a resolução de problemas do quotidiano. Não obstante, pode-se afirmar que a dimensão social e cultural da matemática está implicitamente presente, na medida em que o texto introdutório aos problemas faz a ligação entre situações/problemas da vida em sociedade e a matemática. Finalmente, Joana que, como já referido, parece revelar uma maior afinidade com problemas de carácter recreativo, apenas contextualiza o problema do *Quarto e Vintena*. Tal como Inês, opta por uma abordagem centrada na projecção de imagens alusivas à época dos problemas e no diálogo suscitado por estas. Nos restantes problemas (*Venda do trigo, O Gato e o rato, Dividindo o peixe, Repartindo o dinheiro pelos pobres*) os problemas são propostos sem qualquer contextualização específica. Uma chamada de atenção, que faz numa das aulas relativamente à presença da matemática nas mais variadas situações, permite inferir que os problemas históricos que propõe aos seus alunos de 6º ano de escolaridade (sejam eles recreativos ou aplicados) são uma via para a humanização do conteúdo matemático.

Apesar das diferenças na maior ou menor atenção à contextualização do problema (estreitamente relacionada com a situação exposta), os resultados sugerem que os problemas históricos oferecem muitas potencialidades no estabelecimento de ligações a outras disciplinas do currículo e em tornar visível o papel da matemática na resolução de inúmeras situações com que o Homem se confronta na sua vida social. Fernanda lembra, a este propósito, os comentários de um aluno que sugerem que algo de novo estava a acontecer na aula de matemática e que esse algo de novo foi introduzido pelo contexto dos problemas históricos, pelas ligações à história, ao quotidiano passado. Como refere Man-Seung (2000):

> Using history of mathematics in the classroom does not necessarily make students obtain higher scores in the subject overnight, but it can make learning mathematics a meaningful and lively experience, so that (hopefully) learning will come easier and will go deeper (p.8).

Das dificuldades identificadas pelas futuras professoras na exploração dos problemas em sala de aula[167], destaca-se o reconhecimento de que os problemas históricos, pela especificidade da terminologia usada e dos contextos reais que referem, exigem uma leitura atenta dos enunciados. Deste modo, torna-se visível em todas as participantes o cuidado em assegurar a compreensão da situação exposta no problema, normalmente pedindo a um aluno que leia em voz alta o problema e a outro(s) que o expliquem por palavras suas. De qualquer modo, como se procurou salientar na análise feita capítulo IV, nem sempre os alunos são orientados para a identificação clara dos dados e da questão do problema, o que tem implicações nas etapas posteriores da resolução do problema.

De facto, a análise das aulas e das reflexões que as participantes fazem sobre as mesmas, apoia a constatação de que a orientação da actividade de resolução de problemas foi um dos aspectos mais críticos. Como se constatou, lido o problema e "ultrapassada" a etapa dedicada à compreensão, os alunos não são ensinados de que é necessário, antes de começar a efectuar cálculos, pensar sobre "o que fazer" para dar resposta à questão do problema. Nesse sentido, o tempo que é dado aos alunos para a resolução nem sempre é rentabilizado, na medida em que não sendo a resolução precedida de um planeamento das acções a executar, verifica-se que alguns alunos começam a fazer cálculos um tanto erraticamente ou, simplesmente, não sabem o que fazer, chamando continuamente a professora. Assim, sobressai a ideia de que os alunos, sobretudo os menos autónomos, são conduzidos para um processo de resolução idealizado por outrem. Ainda assim, é notório o esforço desenvolvido, através de questões dirigidas à compreensão do enunciado, para conduzir os alunos à percepção do que fazer a seguir. Nem sempre o conseguem, tendendo, nessa altura, a indicar os passos a executar.

[167] E também em ambientes não formais como o da Exposição.

Das três, Joana salienta-se pelo modo como consegue ligar a compreensão do problema, com a exploração dos conceitos e relações requeridos para a sua resolução e, assim, encaminhar os alunos para a percepção autónoma das ideias, dos conceitos e das relações matemáticas implícitas nos problemas. É também a única que evidenciou ser capaz de relacionar diferentes ideias e conceitos matemáticos.

Terminada a actividade, um traço comum a todas as futuras professoras é pedir a um aluno que exponha à turma, oralmente e por escrito, o seu processo de resolução. É nessa altura que são registados os dados, resolvido o problema e escrita a resposta à questão do problema. De um modo geral, durante esse processo, outros alunos são solicitados a colaborar. Beatriz foi a única das participantes do estudo que num dos problemas fez referência à verificação da solução. Ainda assim, fê-lo apenas oralmente não transmitindo aos alunos a necessidade de, encontrada uma solução matemática, proceder à sua verificação e julgar da sua adequabilidade ao problema e correcção. Este é um aspecto da resolução de problemas que também transparece na resolução escrita dos problemas resolvidos por estas futuras professoras no PF e a que a formação de professores deve dar particular atenção.

Ainda que não fosse objectivo do estudo reflectir sobre o contributo da resolução de problemas históricos para a aprendizagem dos alunos do ensino básico, alguns dos dados obtidos merecem alguma consideração. Da reflexão que as futuras professoras fazem sobre a sua prática de ensino, da análise dessa mesma prática e das opiniões expressas pelos professores cooperantes, parece poder inferir-se que os alunos do ensino básico aceitaram com interesse e curiosidade os problemas históricos e que estes terão contribuído para aprendizagens mais significativas. A análise das aulas dá conta do envolvimento dos alunos com as situações propostas, seja pelas intervenções mantidas durante o processo de resolução, seja pela forma como se envolviam na sua resolução. Recorde-se, a este propósito, a reacção positiva aos problemas propostos em sala de aula que Inês identifica nos seus alunos, opinião que é corroborada pelo seu professor cooperante. O mesmo aconteceu na turma em que Beatriz e Inês fazem estágio. A cooperante Fernanda reconhece a inovação na prática de ensino introduzida pelo recurso a problemas históricos e afirma que sentiu que os problemas foram motivadores para os alunos, que estes reagiram bem e gostaram dos problemas históricos e, acrescenta, que estes contribuíram para a aprendizagem significativa dos conceitos.

Em síntese, Inês, Joana e Beatriz são futuras professoras inseridas num processo formativo e, como tal deve ser encarado o seu desempenho. Outra exploração mais ampla e enriquecedora dos problemas poderia ser feita por professores mais experientes com uma visão mais integradora do currículo da escolaridade básica. Todavia, a integração de problemas históricos no processo de ensino e aprendizagem constituiu um verdadeiro desafio didáctico em termos de organização do ensino e da concretização das práticas que se pode considerar globalmente bem conseguido. Os testemunhos dos professores cooperantes, professores com muitos anos de experiência profissional e de orientação de estágio, vão ao encontro das opiniões das futuras professoras e da análise da investigadora. Pela especificidade da linguagem dos problemas históricos e do contexto histórico em que se inserem, a sua exploração obrigou a uma especial atenção à familiarização dos alunos com a situação exposta. Foram integrados na aula de matemática problemas do quotidiano passado que viabilizaram a aplicação de conhecimentos matemáticos a situações reais e permitiram introduzir aspectos do passado português que complementam as aprendizagens noutras áreas curriculares. Cintando Winiki (2000, p. 131) diremos que: "the participants were exposed to another face of the subjects, the one usually called a humanistic face, a face that reminds us that mathematics is an integral part of our culture. This aspect of mathematics must be communicated to the students and it must have an influence in the ways teachers teach mathematics. The role that mathematics plays in our culture should be exposed, and teachers have a major responsibility in that task".

Em função do exposto, retira-se como grande conclusão do estudo que o Percurso de Formação desenvolvido com as futuras professoras repercurtiu-se no desenvolvimento e na introdução em sala de aula de uma imagem da matemática como uma ciência que ajuda a dar resposta a inúmeros problemas do quotidiano. Paralelamente, o Percurso de Formação criou novas vias e perspectivas para o ensino da matemática, viabilizou práticas de ensino inovadoras e que criaram situações de aprendizagem motivadoras para os alunos, factor essencial para o sucesso.

5.2. Reflexões Finais

Quando surgiu a oportunidade de realizar uma investigação no âmbito de um curso de doutoramento, a ideia de a realizar no campo da temática inclusão da história da matemática nos cursos de formação de professores revelou-se muito sedutora. Até porque se anunciava na altura, mudanças na formação inicial de professores para a escolaridade básica (1º e 2º ciclos do EB) e, além disso, o modelo de formação de Professores do 2º CEB (por variantes) sofria de uma quebra de procura significativa o que prenunciava o seu fim (pelo menos, nas instituições do interior do país). Deste modo, afigurou-se particularmente oportuno investigar formas de capacitar o futuro professor para a integração da história da matemática no ensino da disciplina que pudessem, de algum modo, ser tidas em conta, em novos modelos de formação de professores. Concretizado o projecto e vertido neste documento, é chegada a altura de apresentar uma reflexão pessoal sobre as implicações do trabalho desenvolvido.

O Percurso de Formação desenvolvido pretende dar um contributo para a discussão e a reflexão sobre a integração da história da matemática na formação inicial de professores. Inserido, à partida, na linha do preconizado por autores como Fauvel (1991) ou Fung (2000) procurou articular-se duas vertentes: a formação em história da matemática e a formação no uso didáctico da história da matemática. Pensamos que a inovação introduzida por este Percurso de Formação consiste em dois aspectos que se complementam: (a) os futuros professores foram envolvidos na aprendizagem da matemática e de aspectos da história da Medida e essencialmente através da resolução de problemas históricos (note-se que através destes, é possível conhecer os antigos sistemas de unidades, nomeadamente as suas dificuldades e aspectos relacionados com os problemas sociais, culturais e económicos que o seu uso acarreava); (b) o desafio da introdução de problemas históricos na aula de matemática do 2º ciclo do ensino básico constituiu um verdadeiro desafio didáctico para os futuros professores. Os resultados do estudo mostram que os participantes revelaram um elevado grau de interesse por todas as tarefas que lhe foram propostas, reflectido na motivação e no empenho revelado quer na resolução de problemas históricos quer na sua exploração didáctica. Um aspecto que merece realce é a motivação que conseguiram despertar nos alunos do ensino básico relativamente aos problemas propostos. Salienta-se também a introdução, na aula de matemática, de aplicações diversificadas da matemática que expõem o seu papel e relevância para a resolução de problemas da humanidade e a criação de espaços para a concretização de ligações a outras disciplinas do currículo. Como é salientado por Swetz (1997) e expresso, de forma clara, por um dos professores cooperantes, Manuel, o ensino da matemática concentra-se, muitas vezes, nos símbolos e nos procedimentos, não se dando atenção a outros aspectos que ajudam a dar significado ao que se ensina. O uso de problemas históricos (aplicados ou recreativos), ao permitir comunicar algumas imagens sobre a relevância social e cultural da matemática, pode ajudar a ultrapassar parcialmente essa situação. Os resultados do estudo sugerem uma boa aceitação dos problemas por parte dos alunos do ensino básico (1º e 2º ciclos). Indicam também um aumento da receptividade das futuras professoras à planificação de experiências de ensino e aprendizagem centradas em problemas históricos. Da reflexão que fazem sobre o Percurso de Formação, sobressai o reconhecimento dos desafios didácticos com que foram confrontadas e a valorização da inovação didáctica implementada no percurso de formação. Este último aspecto é igualmente reconhecido pelos dois professores cooperantes, sob cuja orientação as participantes no estudo desenvolveram a prática pedagógica.

Ainda assim, os resultados deste estudo apontam que é necessária mais investigação sobre a integração da história da matemática na formação de professores numa perspectiva de criação de espaços e momentos de ligação a outras áreas do currículo e de desenvolvimento de materiais didácticos, que motive os alunos para a aprendizagem e para a apreciação da face social e humana da matemática.

É claro que uma das grandes limitações desta investigação resulta da impossibilidade de envolver e acompanhar, em Prática Pedagógica, todas as futuras professoras que frequentaram as disciplinas de Geometria, História e Metodologia da matemática. Ainda que tenham sido recolhidos dados relativos à resolução de problemas (conceptual e manipulativa) de todas essas alunas, cedo se tornou clara a dificuldade de seguir em Prática Pedagógica todos os elementos da turma. Até porque o facto da investigadora não poder estar envolvida directa e oficialmente em qualquer uma das disciplinas do currículo por imposições do PRODEP, obrigou a que o trabalho desenvolvido com as futuras professoras em Prática Pedagógica ocorresse essencialmente em horário extra-curricular, o que implicou boa vontade e trabalho extra por parte das participantes e impossibilitou, frequentemente, a realização de sessões de trabalho com todo o grupo e, mesmo, em pequenos grupos.

Por outro lado, o Percurso de Formação iniciou-se no 3º ano da licenciatura, na disciplina de Geometria, num momento em que as futuras professoras já estão muito perto de iniciar a sua primeira experiência de Prática Pedagógica no 1º CEB. Teria sido vantajoso ter acompanhado estas futuras professoras ao longo de todo o seu percurso na ESE e desenvolver e avaliar um Percurso de Formação em que a história da matemática surgisse como uma componente de todas as disciplinas de matemática, como estratégia metodológica para revisitar conteúdos da matemática, salientado os aspectos mais marcantes da sua evolução e desenvolver perspectivas sobre a matemática e natureza da actividade matemática mais consentâneas com as perspectivas actuais para o ensino da disciplina. Acresce ainda dizer que sobressai a ideia de que o modelo de Prática Pedagógica que estas futuras professoras viveram, quer no 1º ciclo quer no 2º ciclo, não as co-responsabiliza individualmente pelos resultados da aprendizagem dos alunos e a alternância constante entre elementos do grupo também não favorece uma abordagem integrada da matemática.

Finalmente, seria de todo o interesse acompanhar o primeiro ano de inserção na profissão destas diplomadas, para se poder analisar se houve realmente apropriação das ideias expressas pelas participantes. Essa possibilidade tornou-se de todo impossível na medida em que nenhuma das participantes conseguiu, após a licenciatura, entrar no mercado de trabalho como professora.

Para a investigadora, a pesquisa histórica realizada para este trabalho, ainda que manifestamente incompleta e com muito a melhorar, constituiu um desafio muito aliciante e gratificante. A escolha da Medida como tema central a todo o trabalho conduziu inevitavelmente até aos primeiros livros de aritmética publicados em Portugal. A análise desses textos permitiu, desde o início, perceber a sua riqueza e interesse para a Didáctica da matemática. A par desse aspecto, a selecção de um conjunto de problemas históricos permitiu algumas descobertas interessantes e inesperadas sobre os antigos sistemas de unidades mas, sobretudo, conduziu a uma verdadeira aventura cultural pela história da Medida em Portugal.

Um aspecto que ressalta da pesquisa realizada é a falta de acessibilidade da comunidade educativa (professores e alunos) a textos antigos (fontes primárias). Embora, por exemplo, o trabalho de Marques de Almeida, que compilou e transcreveu grande parte das Aritméticas comerciais publicadas no séc. XVI e XVII, facilite o acesso aos textos originais, este não parece estar muito divulgado, fora da comunidade de investigação. Por outro lado, há que ter em conta que muitos livros antigos fazem parte de arquivos (nem sempre sendo possível obter cópias) e que a sua leitura, mesmo quando escritas em português, nem sempre é fácil.

A selecção de problemas históricos destinados a crianças de ensino básico foi um aspecto muito pertinente e crítico do estudo, a vários níveis. Em primeiro lugar, pela necessidade de escolher problemas ajustados ao currículo de matemática do ensino básico. Em segundo lugar, pela necessidade de contextualizar os problemas numa dada época história e aprofundar o conhecimento das situações expostas e, desse modo, poder criar espaços de interdisciplinaridade. Ora, o estabelecimento de ligações a outras disciplinas do currículo obriga a um conhecimento global do currículo do ensino básico e limita, até certo ponto, a escolha dos problemas. Em terceiro lugar, pela própria linguagem dos enunciados originais. A investigadora foi confrontada com o dilema de querer preservar a linguagem dos textos originais e a necessidade de torná-los inteligíveis, sem contudo alterar o seu sentido. Embora não se introduzissem fontes primárias em sala de aula, pretendia-se ser-lhes fiel, pois, como afirmam Bruckheimer e Arcavi (2000 p. 136), os símbolos, a linguagem e a abordagem das fontes primárias não só proporcionam um sabor genuíno do passado, como também constituem uma oportunidade para alguns encontros não mediados com a verdadeira substância do passado.

Num momento em que, em Portugal, se assiste a uma profunda alteração dos modelos de formação inicial de educadores e professores para o 1º e 2º ciclos do ensino básico, resultante das orientações oficiais que preconizam a figura do professor especialista nas áreas de Português, de Estudo do Meio (História, Geografia e Ciências da Natureza), de Matemática e Expressões, os resultados deste estudo apontam para as potencialidades da introdução de uma perspectiva histórica nas disciplinas da componente de matemática. De facto, a reestruturação e renovação dos programas de formação de professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico aponta no sentido de uma aproximação de várias áreas do currículo que, até aqui, no 2º ciclo, eram trabalhadas por professores distintos e, portanto, tendencialmente trabalhadas como assuntos isolados. Como referem Grugnetti e Rogers (2000) a história da matemática pode actuar como um factor de ligação da matemática a outras áreas do currículo: “Clearly every subject has its own history, but all their histories are liked within the contents in witch they originated and were used and studied” (op. cit, p. 53).

Cremos, assim, ter dado, com a investigação desenvolvida, um contributo para uma diferente e inovadora postura perante os desafios que se aproximam no âmbito do sistema educativo português e, por isso mesmo, necessariamente também, na formação de professores.

Referências

Abd-El-Khalick, F. e BouJaoude, S. (1997). An Exploratory study Knowledge for Science *Teaching. Journal of Research in Science Teaching*, vol. 34(7), 673-699.

Abrantes, P. (1992). Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática*, nº 23, 25-29.

Abrantes, P. (1996)). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. In Abrantes et al., *La resolución de problemas en matemáticas* (pp.95-110) Barcelona: Editorial Graó.

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 47(2), 125-143.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

Alarcão, I. (1991). Reflexão crítica sobre o pensamento de D. Schön e os programas de formação de professores. *Cadernos Cidine. Supervisão e Formação de Professores*, 1, 5-22.

Alarcão, I. (1994). A Didáctica curricular na formação de professores. In A. Estrela & J. Ferreira (Orgs.). *Desenvolvimento Curricular e Didáctica das disciplinas. Actas do IV Colóquio Nacional da Associação Francophone Internationale*, pp.723-732.

Alarcão, I. (1996). Ser professor reflexivo. In I. Alarcão (Org.), *Formação Reflexiva de professores. Estratégias de Supervisão* (pp. 171-189). Porto: Porto Editora.

Alarcão, I., Andrade, A. I., Couceiro, F., Santos, L., Vieira, R. M. (2006). O Processo de Bolonha como oportunidade para renovar o ensino superior: o caso particular da formação de professores do ensino básico na Universidade de Aveiro. *Revista de Educação*, vol. XIV, n.º 1, 57-76.

Alarcão, I., Costa, N., Araújo e Sá, H. (1999). The role of subject didactics in teacher education. The case of Department of Didactics and Educational Technology at the University of Aveiro, Portugal. In B. Hudson et al., *TNTEE Publications*, vol. 2, nº 1, 227-236.

Albuquerque, C. Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L. & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na Formação Inicial de Professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Albuquerque, L. (1973). *Para a História da Ciência em Portugal*. Lisboa: Livros Horizonte.

Almeida, A. A. M. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679),* Vol. I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Almeida, A. A. M. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679),* Vol. II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Anderson, D., Lucas, K. B. e Ginns, I. S. (2003). Theoretical perspectives on learning in an informal setting. *Journal of Research in Science Teaching, 40(2), 177-199.*

Anglin, W. S. (1997). *The Philosophy of Mathematics*. *The Invisible Art*. Lewiston: The Edwin Mellen Press.

APM (1998). *Matemática 2001. Diagnóstico e recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. Relatório preliminar*. Lisboa: APM.

Ávila, P. & Sebastião, J. (1998). Números, contas, problemas. A literacia quantitativa no quotidiano . *Educação e Matemática*, nº 50, pp. 69-75.

Avital, S. (1995). History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn From the Masters* (pp.3-12). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Ball, D. B. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449-466.

Ball, D. B. (2003). What Mathematical Knowledge is Needed for Teaching Mathematics? (Disponível em: http:/ncrtl.msu.edu, acesso em 13/03/07)

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 8(1), *40-48.*

Ball, D. L. (2000). Bridging practices. Intertwining contents and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.

Ball, D. L., Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. Em J. Kilpatrick, W. J. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for school mathematics* (pp.27-44). Reston, VA: NCTM.

Ball, D. L., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J. Milgram, R.J., Schmid, W. & Schaar, R. C., (2005b). Reaching for common ground in K-12 mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, 52(9), 1055-1058.

Ball, D. L., Hill, H. C., Bass, H. (2005a). *Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics well to teach third grade, an how can we decide*? *American Educator,* (Fall 2005), 14-46.

Barbin, E. (1994). Les mathématiques comme processus historique et comme object culturel. In A. Vieira, E. Veloso e L. Vicente (Org.), *ProfMat94 - Actas* (pp.27-36). Lisboa: APM.

Barbin, E. (1996). The role of Problems in the History and Teaching of Mathematics. In Ronald Calinger (Ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching* (pp.17-26). New York: Mathematical Association of America.

Barbin, E. (2000a). The historical dimension: from teacher to learner. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.66-70). Dordrecht: Kluwer.

Barbin, E. (2000b). Integrating history: research perpectives. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.63-66). Dordrecht: Kluwer.

Benavente, A., Rosa, A., Costa, A. F., Ávila, P. (1996). *A literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica. Lisboa: FCG.*

Biehler, R. (1994) History and Epistemology of Mathematics and Mathematics education. Introduction. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.327-333). London: The Falmer Press.

Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R. Bernard, W. (Eds.) (1994) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.1-8). London: The Falmer Press.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994 (1991)). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. (1977). O ensino da resolução de problemas de Matemática por parte de futuros professores: Relações com a sua formação inicial. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação*

Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas (pp. 129-157). Aveiro: GIRP.

Borralho, A., Monteiro, C., Espadeiro, R. (Org.) (2004). *A Matemática na Formação do Professor*. Lisboa: SPCE.

Brocado, J. (2003). Formação inicial de professores de matemática: consensos e dificuldades. In CNE (Org.), *Ensino da Matemática: Situações e Perspectivas* (pp. 141-152). Lisboa: CNE.

Brocado, J. (2004). A Matemática e Diferentes Modelos de Formação. In A. Borralho, C. Monteiro, R. Espadeiro (Org.), *A Matemática na Formação do Professor* (pp.82-86). Lisboa: SPCE.

Broncano, F. (1998). Una interpretación cognitiva de Progress and its Problems. In W. J. González (Ed.), *El pensamiento de L. Laudan. Relaciones entre Historia de la Ciencia e Filosofía de la Ciencia*. Coruña: Universidade da Coruña.

Brown, C. A., Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.209-242). N.Y.: Macmillan.

Bruckheimer, M. & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its His~tory: An Educational Partnership. In Victor Katz (Ed), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.135-146). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Cabrita, I. (1977). Resolução de problemas envolvendo o conceito de probabilidade: Desempenhos e perspectivas didácticas de futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp.71-98). Aveiro: GIRP.

Cabrita, I. (1998). *Resolução de problemas: aquisição do modelo de Proporcionalidade Directa apoiada num documento hipermédia.* Dissertação de Doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Cachapuz, A. (2002). A formação inicial de professores na encruzilhada do processo de Bolonha. *Revista de Educação*, vol. XI, nº 1, 31-36.

Cachapuz, A. (2004). Os saberes básicos na sociedade do conhecimento. *Saberes Básicos de todos os Cidadãos no Século XXI* (pp.117-124). Lisboa: CNE.

Cachapuz, A., Praia, J. & Jorge, M. (2002). *Ciência, educação em ciência e ensino das ciências.* Lisboa: Ministério da Educação.

Cachapuz, A., Praia, J., Gil-Pérez, D., Carrascosa, J., Martínez-Terrades, F. (2001). A emergência da dida´ctica das ciências como campo específico de conhecimento. *Revista Portuguesa de Educação*, 14(1), 155-195.

Cachapuz, A., Sá-Chaves & I. Paixão, F. (2004). Relatório do estudo Saberes Básicos de todos os Cidadãos no Século XXI. *Saberes Básicos de todos os Cidadãos no Século XXI* (pp.15-96). Lisboa: CNE.

Caraça, B. J. (1978). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa.

Carpenter, T, Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.) (1993). *Rational Numbers. An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carvalho e Silva, J. (1992). As aplicações da Matemática: a vida quotidiana na sala de aula. *Educação e Matemática*, nº 23,3-9.

Carvalho e Silva, J. (1997). History of Mathematics in the classroom: hopes, uncertainties and dangers. In Sérgio Nobre (Ed.), *Meeting of the HPM* (pp.129-135). Blumenau: Brasil.

Carvalho e Silva, J. (2002). A matemática e a literacia quantitativa. *Educação e Matemática*, nº 69, 15-18.

Clements, D. & Bright, G. (Eds) (2003). *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook.* Reston: NCTM.

Cohen, L., Manion, L. (2002 (1989)). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: Editorial La Muralla.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America (Disponível em: http://www.cbmsweb.org/MET_Document/, acesso em 18/06/2004).

Contreras, L. C., Carrillo, J. (2000). El amplio campo de la resolución de problemas. In J. C. Yañez e L. C. Contreras (Ed.), *Resolución de Problemas en los Albores del Siglo*

XXI: Una visión Internacional desde Múltiples Perspectivas y Niveles Educativos (pp.13-37). Huelva: Hergué.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching. *American Mathematical Society*,48(2),168-174.

Davis, P. e Hersh, R. (1995 (1981)). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. e Hersh, R. (1997 (1986)). *O sonho de Descartes: O mundo segundo a matemática*. Lisboa: Difusão Cultural.

de Lange, J. (2003b). Mathematics for Literacy. In L. B. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative Literacy. Why Literacy Matters for Schools and Colleges* (pp.75-89). Washington DC: National Council on Education and the Disciplines (Disponível em: http://www.naa.org/QI/qltoc.html, acesso em 19/12/2006).

Decreto-Lei n.º 43/2007, Diário da República, 1ª Série, nº 38, 22 de Fevereiro de 2007, pp. 1320-1328.

Denzin, N. K., Lincoln, Y. S. (2000). The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp.1-28). London: Sage Publications.

Devlin, K. (2002 (1994)). *Matemática: A Ciência dos Padrões*. Porto: Porto Editora.

Echeverría, J. (1995). Filosofía de la Ciencia. Madrid: Ediciones Akal.

Echeverría, J. (1999). *Introducción a la metodología de la ciencia. La filosofía de la Ciencia en el siglo XX*. Madrid: Catedra.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.119-161). New York: MacMillan.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed), *Mathematics Teaching: the state of the art* (pp.249.254). London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994a). The Philosophy of Mathematics and the Didactics of Mathematics. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.335-349). London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1996b). The Dialogical Nature of Mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (pp.33-48). London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998a). The History of Mathematics in the Classroom. *Mathematics in School*, September, pp. 25-31.

Ernest, P. (1998b). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics.* NY: Suny.

Ernest, P. (2000). Teaching and learning mathematics. In V. Koshy, P. Ernest & R. Casey (Eds.), *Mathematics for Primary Teachers* (pp.3-20). London e New York: Routledge.

Ernest, P. (Ed) (1994b). *Constructing mathematical knowledge, epistemology and mathematical education.* London: The Falmer Press.

Ernest, P. (Ed) (1996a). *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (pp.33-48). London: The Falmer Press.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: A ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the learning of Mathematics,* 11, 3-6.

Fennema, E., Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.147-166). N.Y.: Macmillan.

Fernandes, D. (1997). Introdução. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp.xv-xix). Aveiro: GIRP.

Ferreira, A. J. (2002). *Projectos no ensino das Ciências - Um Modelo de Planificação para o Ensino Secundário*. Dissertação de Mestrado (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Ferreira, E. S. (1997). O uso da História da Matemática nas aulas de Cálculo. In Sérgio Nobre (Ed.), *A contribuição de matemáticos portugueses para o desenvolvimento da matemática no Brasil: actas dos II Encontro Luso-Brasileiro e II Seminário Nacional de História da Matemática* (pp.153-156). São Paulo.

Fonseca, L. (1997). Processos utilizados na resolução de problemas por futuros professores de Matemática. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp.39-70). Aveiro: GIRP.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria*. Dissertação de Doutoramento. Lisboa: APM.

Fortin, M. F. (1999). *O processo de investigação. Da concepção à investigação*. Loures: Lusociência.

Fosnot, C. T. (1999). *Construtivismo e Educação. Teoria, Perspectivas e Prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Fraenkel, A. (2004 (1963)). Filosofia da Matemática. In F. Heinemann (Ed.), *A Filosofia no século XX* (pp.321-344). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Furinghetti, F. & Paola, D. (2003). History as a Crossroads of Mathematical Culture and Educational Needs in the Classroom. *Mathematics in School*, January, 37-41.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1998). History of Mathematics in School across Disciplines. *Mathematics in School*, September, 48-51.

Furinghetti, F. (1996). History, research and teaching mathematics: case studies for linking different domains. In M. J. Lagarto, A. Vieira & E. Veloso (Org..), *História e Educação Matemática – Proceedings*, Vol I (pp.275-276). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1988 (1984)). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gowers, W. T. (2006). Does Mathematics Need a Philosophy? In Reuben Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp.182-200). New York, NY: Springer.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.39-62). Dordrecht: Kluwer.

Grugnetti, L. (2000b). The History of Mathematics and Its Influence on Pedagogical Problems. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An*

International Perspective (pp.29-35). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Grugnetti, L.,. (2000a). Ancient problems for the development of strategic thinking. In J. Fauvel & J. van Mannen(Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.78-81). Dordrecht: Kluwer.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S (1994). Competing Paradigms Controversies in qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp.105-117). London: Sage Publications.

Guimarães, H.M. (2005). Os novos Standards do NCTM na entrada do século XXI. *Educação e Matemática*, n.º 84, 2-5.

Guimarães, H.M. (2005). Prefácio à edição portuguesa. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (pp.vii-xi). Lisboa: APM

Guisasola, J., Azcona, R., Etxaniz, M., Mujika, E. e Morentin, M. (2005). Diseño de estratégias centradas en el aprendizaje para las visitas escolares a los museos de ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, Vol. 2, Nº, pp. 19-32 (*Disponível em www.apac-eureka.org/revista/index.htm, acesso em 22 /09/2006).

Guzmán, M. (1991). *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 25, 9-34.

Guzmán, M. (1995). El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 32, 15-36.

Hacking, I. (1983). *Representing and Intervening: Introductory topics in the Philosophy of Natural Science*: Cambridge: Cambridge University Press.

Haylock, D. (2004). *Mathematics Explained for Primary Teachers*. London: Paul Chapman.

Heiede, T. (1996). History of Mathematics and the Teacher. In R. Calinger (Ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, (pp.231-244). New York: Mathematical Association of America.

Hersh, R. (1986). Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.9-28). Boston: Birkhäuser.

Hersh, R. (1996). Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (pp.11-32). London: The Falmer Press.

Hersh, R. (1999). *What is Mathematics, Really?* Oxford: University Press.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp.65-100). New York: Macmillan Publishing Company.

Hill, H. e Ball, D. L. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institute. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(5), 330-351.

Hodson, D. (1992). Redefining and reorienting practical work in school science. *The School Science Review*, 73(264), 65-77.

Hughes_Hallett, D. (2001). Achieving Numeracy: The Challenge of Implementation. In Lynn A. Steen (Ed), *Mathematics and Democracy: the case for quantitative Literacy* (93-98). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines (Disponível em http://www.maa.org/Ql/mathanddemocracy.html, acesso em 23/12/2006).

Jiménez, B., Bordas, I., Coronel, J., Domínguez, G., Gairín, J., González, A., Santos, M. & Tejada, J. (2000). *Evaluación de programas, centros e profesores*. Madrid: Editorial Síntesis.

Jiménez, J. E. (2002). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. Em Abrantes et al., *La resolución de problemas en matemáticas* (pp.111-130) Barcelona: Editorial Graó.

Jones, P. S. (1995). The Role in the History of Mathematics of Algorithms and Analogies. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn From the Masters* (pp.13-23). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Kafai, Y. B. & Gilliland-Swetland, A. (2001). The use of Historical Materials in Elementary Science Classrooms. *Science Education*, 85, 349-367.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: an introduction* (second edition). USA: Addison Wesley Longman.

Katz, V. K., Dorier, J. L., Bekken, O. & Sierpinska, A. (2000). The role of historical studies in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp.149-154). Kluwer Academic Press.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kleiner, I. (1996). A History-of-Mathematics Course For Teachers, based on Great Quotations. In Ronald Calinger (Ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, (pp.261-268). New York: Mathematical Association of America.

Kool, M. (1993). Using historical arithmetic books in teaching mathematics to low-attainers. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.215-226) Montpellier: IREM de Montpellier.

Lakatos, I. (1978 (1976)). *A Lógica do Descobrimento Matemático. Provas e Refutações*. Rio de Janeiro, Zahar Editores.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp.29-48). Boston: Birkhauser.

Lakoma, E. (2000). Stochastics teaching and cognitive development. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.74-77). Dordrecht: Kluwer.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essencial Contet Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (2nd edition). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Laudan, L. (1986 (1977)). *El Progreso y sus problemas. Hacia una Teoría del Crecimiento Científico*. Madrid: Encuentro.

Lebesgue, H. (1956). *Sur la Mesure des Grandeurs*. Paris: Gauthier-Villars.

Lester, F. (1997). Mathematics teacher education at Indiana University : Twenty-five years of innovate practice. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp. 189-215). Aveiro: GIRP.

Lester, F. K. (1983). *Trends and issues in mathematical problem solving research*. New York: Academic Press.

Liang, L. L. & Gabel, D.L. (2005). Effectiveness of a constructivist approach to science instruction for prospective teachers. *International Journal of Science Education*, 27(10), 1143-1162.

Lima, E. L. (2004). *Matemática e Ensino*. Lisboa: Gradiva.

Lincoln, Y. S, Guba, E. G. (2000). Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluences. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp.163-188). London: Sage Publications.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. In M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp.4-29). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.3-10). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Manno, A. G. (1985). *A Filosofia da Matemática*. Lisboa: Edições 70.

Matos, J. M. (2002). Saber matemático básico: uma comparação com outros tempos. *Educação e Matemática*, nº 69, 2-8.

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical* *problem solving: Multiple research perspectives* (pp.123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Menghini, M. (2000) On potentialities, limits and risks. In J. Fauvel & J. van Mannen, (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.86-90). Dordrecht: Kluwer.

Merriam, B. (1988). *Case Study research in education. A qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Michalowicz, K. D. (2000). History in support of diverse educational requeriments – opportunities for change. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.172-200). Dordrecht: Kluwer.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2004a). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação da Literacia Matemática*. Lisboa: GAVE.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2004b). Resultados do Estudo Internacional PISA 2003. Lisboa: GAVE.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2007). *PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses.* Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional (Disponível em: http://www.gave.min-edu.pt, acesso em 07/12/2007).

Ministério da Educação (ME) (1991). *Programa Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem. Ensino Básico 2º Ciclo.* Lisboa: Lisboa: DEB - ME

Ministério da Educação (ME) (2001). *Currículo do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: DEB - ME.

Ministério da Educação (ME) (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico-1º Ciclo*. Lisboa: DEB - ME.

Ministério da Educação (ME) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Monk & Osborne (1997). Placing the History and Philosophy of Science on the Curriculum: A Model for the development of pedagogy. *Science Education*, 81, 405-424.

Montero, L. (2005). *A construção do conhecimento profissional docente*. Lisboa: Instituto Piaget.

Moreira, M. A. (2000). Investigación en enseñanza: aspectos metodológicos. In M. A. Moreira, C. C. Sahelices 6 J. M. Villagrá (Org.), *I Escuela de Verano sobre Investigación en Enseñanza de las Ciencias del Programa de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias* (pp.15-51). Burgos: Servicio de Publicaciones, Universidade de Burgos.

National Council for Research on Teacher Learning (NCRTL) (1992). *Findings from the teacher and learning to teach study: Final Report.* The National Centre for Research Education.

National Council of Accreditation of Teachers Education (NCATE) (2006). *Professional Standards for the Accreditation of Schools, Colleges, and Departments of Education. 2006 Edition* (Disponível em: http://www.ncate.org/documents/standards/unit_stnds_2006.pdf, acesso em 27/11/2006).

National Council of Accreditation of Teachers Education, National Council of Teachers of Mathematics (NCATE & NCTM) (2003a). NCATE/NCTM Program Standards. Programs for Initial Preparation of Mathematics Teachers. Standards for Elementary Mathematics Specialist (Disponível em: http://www.nctm.org/about/ncate/elementary_indic.htm, acesso em 2/11/2006).

National Council of Accreditation of Teachers Education, National Council of Teachers of Mathematics (NCATE & NCTM) (2003b). NCATE/NCTM Program Standards. Programs for Initial Preparation of Mathematics Teachers. Standards for Middle Level Mathematics Teachers (Disponível em: http://www.nctm.org/about/ncate/middle_indic.htm, acesso em 2/11/2006).

National Council of Accreditation of Teachers Education, National Council of Teachers of Mathematics (NCATE & NCTM) (2003c). NCATE/NCTM Program Standards (2003). Programs for Initial Preparation of Mathematics Teachers. Standards for Secondary Mathematics Teachers (Disponível em: http://www.nctm.org/about/ncate/secondary_indic.htm, acesso em 2/11/06).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991 (1989)). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Nicolas, G. (1963 (1519)). *Tratado da pratica D' Aritmetyca*. Edição fac-similada. Livraria Civilização – Editora. Porto, 1963.

Niss, M (2003b). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies . In B. L. Madison and L. A. Steen(Eds.), *Quantitative Literacy. Why Literacy Matters for Schools and Colleges* (pp.215-220). Washington DC: National Council on Education and the Disciplines (Disponível em: http://www.naa.org/QI/qltoc.html, acesso em 19/12/2006).

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, nº 23, 1-2.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.367-378). London: The Falmer Press.

Niss, M. (2003a). The need for reform: Perspectives on the result of education – student's competence in mathematics. In J. Carter, K. Eriksen, S. Horst and R. Troelsen (Ed.), *If reform of University Science Education is the answer – what were the Questions?* - Proceedings from the 3rd DCN Conference (pp.29-36). Copenhagen: University of Copenhagen (Disponível em: http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=22521, acesso em11/12/2006).

Niss, M. (2003c). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*(Disponível em: http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_Mathematics.pdf, accesso em 11/12/2006).

OCDE (2003). *Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OCDE.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: OCDE.

Oliva, J. M., Acevedo, J. A., Matos, J. (2006). Alguns contributos das exposições científicas escolares para os alunos e os professores participantes. *Educare, Educere,* 18, 51-71.

Oliveira, M.L.R. (1996). *A prática reflexiva dos professores e os eu processo de mudança. Um estudo no contexto da formação contínua.* Dissertação de Doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Otte, M., Seeger, F. (1994). Human Subject in History. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.351-365). London: The Falmer Press.

Paixão, M. F. (1998). *Da construção do Conhecimento Didáctico na Formação de Professores de Ciências. Conservação da Massa nas Reacções Químicas: Estudo de índole epistemológico.* Dissertação de Doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Paixão, M. F. (2003). *História e Filosofia da Ciência: Construir uma Nova Imagem de Ciência na Formação de Professores*. Lição apresentada à Escola Superior de Educação do IPCB para concurso de acesso à categoria de Professor-Coordenador para a área científica de Supervisão e Didáctica das Ciências (não publicada). Castelo Branco: IPCB.

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp.159-188). Aveiro: GIRP.

Palmer, D. (2005). A Motivational View of Constructivist-informed teaching. International *Journal of Science Education,* 27(15), 1853-1881.

Pérez Serrano, G. (2004a). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes - Métodos.* Madrid: Editorial La Muralla.

Pérez Serrano, G. (2004b). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes - Técnicas y análisis de dados.* Madrid: Editorial La Muralla.

Polya, G. (2003 (1945, 1973)). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1992a). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação,* vol II, nº 2, 95-108.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante,* vol. 3, nº 1, 3-18.

Ponte, J. P. (2004). A formação matemática do professor: Uma agenda com questões de reflexão e investigação. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Org.), *A Matemática na Formação do Professor* (pp.71-74). Lisboa: SPCE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática – ensino secundário*. Lisboa: DEB - ME.

Ponte, J.P (2000). Principles and Standards for school mathematics: um novo documento de orientação curricular do NCTM. *Educação e Matemática*, n.º 60, 64-66.

Ponte, J.P. (1992b). Matemática e realidade: uma relação didáctica difícil. *ProfMat 92 – Actas*, pp. 13-24.

Ponte, J.P., Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163.

Praia, J. J. F. M. (1995). *Formação de professores no ensino da geologia: contributos para uma didáctica fundamentada na epistemologia das ciências. O caso da deriva continental. Volume I.* Dissertação de doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Putman, H. (1986). What is Mathematical Truth? In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.49-66). Boston: Birkhäuser.

Putnam, R.; Heaton, R.; Prawat, R. e Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: discussing case studies of four fifth grade teachers. *Elementary School Journal*, 93(2), 213-229.

Radford, L. (1993). History, research and the teaching of mathematics. In M. J. Lagarto, A. Vieira & E. Veloso (Org..), *História e Educação Matemática – Proceedings,* Vol I (pp.271-274). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

Rav, Y. (2006). Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology. In Reuben Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp.71-96). New York, NY: Springer.

Richardson, L. (2000). Writing. A Method of Inquiry. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds), *Handbook of qualitative research* (pp.923-948). London: Sage Publications.

Rickey, V. F. (1996). The Necessity of History in Teaching Mathematics. In Ronald Calinger (Ed). *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching* (pp.251-257). New York: Mathematical Association of America.

Rico, L. (2004). La evaluación de matemáticas en proyecto PISA. In R. Pajares, A. Sanz e L. Rico, *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000. Madrid: MECD (*Disponível em *www.ince.mes.es/pub/aproxapisa2000.pdf*, *acesso* em 15/12/06).

Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003. In PISA 2003. Pruebas de Matemática y de Solución de Problemas, (pp.11-25). Madrid: INCSE (Disponível em: *www.ince.mes.es/pub/pisa2003liberados.pdf*, acesso em 22/12/2006).

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en Pisa sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, extraordinario, 275-294 (Disponível em: http://revistaeducation.nec.es/re2006/re2006_16.pdf, acesso em:14/12/ 06).

Rodrigues, A., Martins, I. P. (2005). Ambientes de ensino não formal de ciências: impacte nas práticas de professores de 1º ciclo do ensino básico. *Enseñanza de las Ciencias, numero extra* (Disponível em: www.blues.uab.es/~sice23/congres2005/ material/comuni_orales/1_ense_ciencias/1_2/Rodrigues_261.pdf, acesso em 22/09/06).

Roldão, M. C. (2004). Competências na Cultura de escolas do 1º ciclo. *Saberes Básicos de todos os Cidadãos no Século XXI* (pp.145-174). Lisboa: CNE.

Rotman. B. (2006). Toward a Semiotics of Mathematics. In Reuben Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (pp.97-127). New York, NY: Springer.

Rowe, D. E. (1996) New Trends and Old Images in the History of Mathematics. In Ronald Calinger (Ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching* (pp.3-16). New York: Mathematical Association of America.

Santomé, J. T. (1988). La investigación etnográfica y la reconstrucción crítica en educación. In J. P. Goetz & M. D. LeCompte, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa* (pp.11-22). Madrid: Ediciones Morata.

Saraiva, M. J. (2001). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Um projecto colaborativo* (tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Savizi, B. (2006). Applicable problems in history of Mathematics; Pratical Examples for the Classroom. *Philosophy of Mathematical Education Journal*, 19 (Disponível em: http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome19, acesso em 20/04/07).

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em Douglas Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2001). Reflections on an Impoverished Education. In Lynn A. Steen (Ed), *Mathematics and Democracy: the case for quantitative Literacy* (pp.49-54). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines (Disponível em: http://www.maa.org/Ql/mathanddemocracy.html, acesso em: 23/12/2006).

Schubring, G. (1997). Relações entre a história e o ensino da matemática. In Sérgio Nobre (Ed), *A contribuição de matemáticos portugueses para o desenvolvimento da matemática no Brasil: actas dos II Encontro Luso-Brasileiro e II Seminário Nacional de História da Matemática* (pp.157-163). São Paulo: SNHM.

Schubring, G. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp.91-142). Dordrecht: Kluwer.

Sebastião e Silva, J. (1977). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 2º e 3º volumes. Lisboa: Edição GEP.

Serrazina, M. L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and Research Programs in the Study of Teaching: A Contemporary Perspective. Em M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research of Teaching* (pp.3-36). New York: Macmillan.

Siebert, D. (2002). Connecting Informal Thinking and Algotithms: The Case os Division of Fractions. In Bonnie Litwiller & George Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. 2002 Yearbook* (pp. 247-256). Reston: NCTM.

Silva, M. I. L. (1996). *Práticas educativas e construção de saberes: metodologias da investigação -acção*. Lisboa: IIE.

Stake, R. E. (2000). Case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp.435-454). London: Sage Publications.

Stewart, I. (1996 (1987)). *Os Problemas da Matemática.* Lisboa: Gradiva.

Struik, D. J. (1997 (1980). Porquê estudar a História da Matemática?. In A. Vieira, E. Veloso & M. J. Lagarto (Org.), *Cadernos do Grupo de Trabalho sobre História Ensino Matemático* (GTHEM/APM), 1, pp.1-14.

Swetz, F. (1996). Problem Solving from the History of Mathematics. In M. J. Lagarto, A. Vieira & E. Veloso (Org.), *História e Educação Matemática – Proceedings* - Vol I (pp.201-208). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

Swetz, F. (1997 (1994)). Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática. In A. Vieira, E. Veloso & M. J. Lagarto (Org.), *Relevância da História no Ensino da Matemática*. Lisboa: GTHEM/APM.

Swetz, J. F. (1986). The history of mathematics as a source of classroom problems. *School Science and Mathematics,* 86(1), 33-38.

Swetz, J. F. (1992). Quando e como podemos usar modelação? *Educação e Matemática,* nº23,45-48.

Swetz, J. F. (1995). Using problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B.Johansson, V. Katz (Eds.), *Learn From the Masters* (pp.25-38). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Swetz, J. F. (2000a). Mathematical Pedagogy: An Historical Perspective. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.11-16). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Swetz, J. F. (2000b). Problem Solving from the History of Mathematics. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.59-68). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Taylor, S.J., Bogdan, R. (1992). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidos.

Torre, E. de la, Diaz, M., Guerrero, S. (2006). Formación inicial y continua del profesorado de primaria y secundaria. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 41, 20-39.

Tymoczko, T. (1986b). Computers and Mathematical Practice: A Case Study. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.243-266). Boston: Birkhäuser.

Tymoczko, T. (1996). Structuralism and Post-modernism in the Philosophy of Mathemtics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective* (pp.49-55). London: The Falmer Press.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986a). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Tzanakis, C. (1993). Reversing the customary deductive teaching of mathematics by using its history: the case of abstract algebraic concepts. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.271-273) Montpellier: IREM de Montpellier.

Tzanakis, C. (1996). The history of the relation between mathematics and physics as an essential ingredient of their presentation. In M. J. Lagarto, A. Vieira & E. Veloso (Org.), *História e Educação Matemática – Proceedings*, Vol II (pp.96-104). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade do Minho.

Tzanakis, C. e Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In John Fauvel and Jan van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp.201- 248). Kluwer Academic Press.

Usiskin, Z. (2001). Quantitative Literacy. In Lynn A. Steen (Ed), *Mathematics and Democracy: the case for quantitative Literacy* (pp.79-86). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines (Disponível em: http://www.maa.org/Ql/mathanddemocracy.html, acesso em 23/12/2006).

Vale, I. (1997) Desempenhos e concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In D. Fernandes, F. Lester, Jr., A. Borralho & I. Vale (Coord.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas* (pp.1-37). Aveiro: GIRP.

Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de professores num contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis* (Dissertação de Doutoramento). Lisboa: APM.

Vale, I. e Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp.7-52). Lousã: Lidel.

van Mannem, J. (1995). Alluvial Deposits. Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the classroom. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (Eds.), *Learn From the Masters* (pp.73-91). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Veloso, E. (2004). Educação Matemática dos Futuros Professores. In A. Borralho, C. Monteiro, R. Espadeiro (Org.), *A Matemática na Formação do Professor* (pp.31-67). Lisboa: SPCE.

Vieira, R. M. (2003). *Formação Continuada de Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico Para uma Educação em Ciências com Orientação CTS/PC.* Dissertação de Doutoramento (não publicada). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Winicki, G. (2000). The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. In Victor Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp.129-134). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Winiki, G. (1993). The impact of using mathematics problems with historical backgrounds in the teaching of mathematics on students attitudes to the subject. *Proceedings of the First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp.283-285) Montpellier: IREM de Montpellier.

Wu, H. (1999). Professional Development of Mathematics Teachers. *American Mathematical Society*, 46(5), 535-542.

Wu, H. (2004). Geometry our cultural heritage. *Notices of the American Mathematical Society*, 51, 529-537.

Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

APÊNDICES

Identificação dos Apêndices

Apêndice 1: Grandezas e unidades de medida. Conceitos, notas históricas e aspectos didácticos (Documento de apoio à prática pedagógica no 1º CEB)

Apêndice 2: Problemas históricos. Discussão e sugestões para exploração didáctica no 2º Ciclo do ensino básico (Documento de apoio à prática pedagógica no 2º CEB)

APÊNDICE 1

GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA

CONCEITOS, NOTAS HISTÓRICAS E DIDÁCTICAS

(Documento de apoio à prática pedagógica no 1º CEB

ÍNDICE

Página

Lista de Figuras

Lista de Quadros

> Il n'y a pas de sujet plus fondamental: la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'ést-à-dire l'object même de l'Analyse.
>
> Henri Lebesgue (1956, p. 2)

1. Introdução

O primeiro contacto formal com conceitos e processos relacionados com a Medida no âmbito do currículo de matemática inicia-se no 1º ciclo do ensino básico (1º CEB) com a abordagem ao conceito de grandeza e de medida de uma grandeza, propiciados pelo estudo de atributos mensuráveis como o comprimento, a capacidade, o volume, a massa, o dinheiro e o tempo, e prolonga-se por toda a escolaridade, culminando, no ensino superior, com as abordagens aos conceitos de comprimento, área e volume propiciadas pelo Cálculo Infinitesimal (Lima, 1985). Nesse sentido, o desenvolvimento de competências[1] no âmbito deste tema assume por diversas razões uma importância particular. No quadro 1, apresentam-se os aspectos da competência matemática a desenvolver no âmbito da Medida, tal como são consagrados no documento *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001). De forma transversal aos três ciclos do ensino básico, a tónica é colocada na compreensão dos diferentes atributos mensuráveis dos objectos, do conceito de unidade e de sistema de unidade e no processo de medição, na compreensão do Sistema Internacional de Unidades – SI - e na aplicação dos conhecimentos e capacidades relacionados como a Medida na realização de medições e na resolução e formulação de problemas. É no 1º CEB que surge o primeiro contacto com a ideia de atributo mensurável como uma característica

---

[1] Documentos curriculares oficiais portugueses para o ensino básico, na linha das actuais tendências da educação matemática, atribuem um estatuto privilegiado ao desenvolvimento da ideia de competência matemática. Ser matematicamente competente relaciona-se não só com a aquisição de conhecimentos (aspectos conceptuais e processuais), mas também com o desenvolvimento de capacidades (identificação e mobilização dos conhecimentos necessários à resolução de uma dada situação) e de atitudes (ter a disposição para) (Abrantes, Serrazina, Oliveira, 1999). Um ensino orientado para o desenvolvimento da competência matemática do aluno visa assim promover uma aprendizagem dirigida à compreensão dos conceitos e procedimentos e articulada com o desenvolvimento de capacidades de raciocínio, de resolução de problemas, de representação e de comunicação em matemática, condições indispensáveis para que o aluno possa perante tarefas em que a matemática é requerida construir, consolidar e mobilizar os seus conhecimentos matemáticos (ME, 2001; NCTM, 1991, 2000).

dos objectos que pode ser quantificada, preconizando-se como fundamental o desenvolvimento da compreensão do processo de medição e da aptidão para fazer medições e estimativas em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados e fazendo uso, em particular, das unidades de medida do SI.

Quadro 1 – Aspectos da competência matemática a desenvolver no domínio das grandezas e da medida no ensino básico

<table>
<tr><th colspan="3">Todos os ciclos do ensino básico</th></tr>
<tr><td colspan="3">– A compreensão de conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre esses conceitos na resolução e formulação de problemas.
– A aptidão para efectuar medições em situações diversas e fazer estimativas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades.</td></tr>
<tr><th>1º Ciclo</th><th>2º Ciclo</th><th>3º Ciclo</th></tr>
<tr><td>– A compreensão do processo de medição e a aptidão para fazer medições e estimativas em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados.</td><td>– A aptidão para resolver e formular problemas que envolvam relações entre os conceitos de perímetro e de área, em diversos contextos.
– A aptidão para calcular áreas de rectângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas.</td><td>– O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas.</td></tr>
</table>

Por outro lado, interessa notar que a Medida tem as suas raízes históricas em inúmeros problemas do quotidiano que não só estiveram na origem de importantes desenvolvimentos conceptuais e tecnológicos, como sobretudo oferecem o contexto natural para o estabelecimento de conexões com outros temas matemáticos (e.g. Geometria e Números e Operações), com outras disciplinas do currículo e com o quotidiano:

> The study of measurement is important in the mathematics curriculum from prekindergarten through high school because of the practicality and pervasiveness of measurement also offers an opportunity for learning and applying other mathematics, including number operations, geometric ideas, statistical concepts, and notions of function. It highlights connections within mathematics and between mathematics and areas outside of mathematics, such social studies, science, art, and physical education (NCTM, 2000, p. 44).

Nesse sentido, documentos curriculares portugueses reconhecem as potencialidades didácticas da introdução de uma perspectiva histórica no processo de ensino e aprendizagem do tema, apontando o estímulo positivo que pode despertar no aluno o conhecimento do contexto histórico em que determinadas questões matemáticas surgiram, em particular questões relacionadas com a história das unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades (SI), como, por exemplo, o conhecimento das motivações que levaram à emergência do SI, ou de sistemas de medida usados noutras culturas (Abrantes; Serrazina; Oliveira, 1999, pp. 78,79). Essa integração em sala de aula requer professores com conhecimento em história da matemática e capazes de transformar esse conhecimento em situações de aprendizagem. Dessa forma, o manancial de recursos didácticos propiciado pela histórica pode conduzir a uma mudança efectiva das práticas de ensino ou, pelo menos, uma modificação da forma como os professores concebem o ensino da matemática (Barbin, 1994, 2000; Tzanakis et al., 2000).

Atendendo a que a integração da história da matemática na formação de professores deve ser motivadora e relevante para os participantes e, como tal, deve incidir em tópicos curriculares centrais e ter potenciais aplicações na sala de aula dos níveis de ensino onde é suposto os docentes exercerem a docência (Bruckheimer e Arcavi, 2000), considerou-se pertinente um documento de apoio à prática pedagógica no 1ºCEB centrado em aspectos conceptuais, históricos e didácticos da medição de algumas das grandezas previstas no currículo (comprimento, área, volume e massa). Contudo, este documento, pela forma como está organizado, pode igualmente ser um apoio para professores de outros ciclos de ensino básico, nomeadamente ao nível da formação contínua.

Para cada uma das grandezas abordadas procura-se formular de forma acessível e adequada ao 1º e 2º ciclos do EB cada um dos conceitos apresentados. Em particular, apresentam-se em detalhe as unidades do SI[2] e fundamenta-se, em cada caso, a conversão entre diferentes unidades de medida da mesma grandeza[3]. Incluem-se algumas notas históricas relativas a aspectos dos antigos sistemas de unidades. A ênfase é colocada na

[2] O Sistema Internacional de Unidades, com a abreviatura internacional SI, foi a designação adoptada na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, celebrada em Paris em 1960, para designar o sistema de unidades instituídas e designado até essa altura por Sistema Métrico Decimal. O SI além de regulamentar as unidades de medida, permite dispor de um sistema de unidades de medida comum a todos os campos da Ciência e Tecnologia. Portugal, que foi um dos primeiros dezassete países aderentes ao Sistema Métrico Decimal em 1875, adoptou o Sistema Internacional de Unidades através do decreto-lei nº 427/83 de 7 de Dezembro.

[3] Não se incluem quaisquer considerações sobre a medição indirecta através de fórmulas das grandezas área e volume.

história da metrologia portuguesa, procurando-se salientar e ilustrar, sempre que pertinente, problemas sociais e económicos decorrentes da falta de uniformidade dos antigos sistemas de unidades que levaram ao abandono das antigas unidades e à substituição pelo SI. Finalmente, são apresentadas algumas sugestões didácticas para a abordagem de alguns tópicos deste tema no ensino básico e, em particular, no 1º ciclo.

2. Comprimento

2.1. Conceito e unidades SI

O comprimento é um atributo mensurável associado a linhas rectas ou curvas, cuja medição implica fixar o comprimento de um segmento de recta como unidade de medida. Da comparação dos dois comprimentos resulta um número que exprime quantas vezes a unidade "cabe" no comprimento que estamos a medir (Lima, 1985).

A unidade de base de comprimento adoptada pelo Sistema Internacional de Unidades (SI) é denominada por metro e é actualmente definida como o comprimento do trajecto percorrido no vazio pela luz durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Figura 1 - A grandeza comprimento no SI

Grandeza → Comprimento

Unidade SI → Metro

Símbolo da unidade

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de base de comprimento é o metro, simbolizado por **m**, definida como:

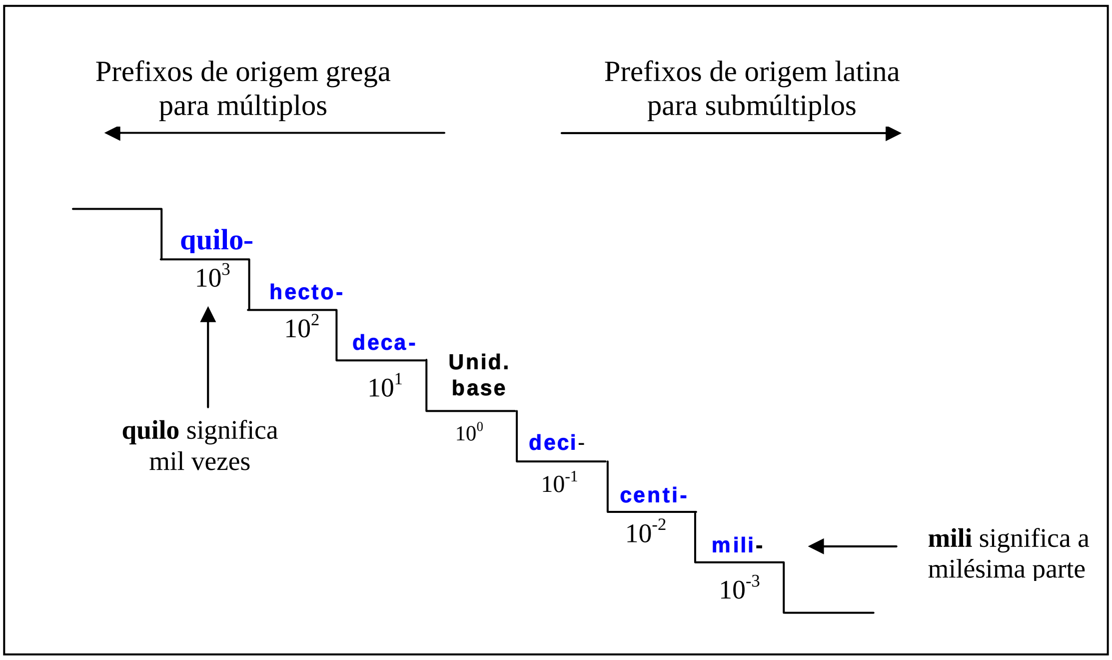
O **metro** é o comprimento do trajecto percorrido no vazio pela luz durante um intervalo de tempo de $\mathbf{\frac{1}{299792458}}$ de segundo.

<u>Múltiplos e submúltiplos do metro</u>

Para medir qualquer comprimento, podemos recorrer à unidade de base do SI, o metro, ou a qualquer dos seus múltiplos ou submúltiplos. De acordo com o princípio decimal adoptado pelo SI, qualquer múltiplo ou submúltiplo de uma unidade de base deduz-se desta mediante multiplicação por potências inteiras de 10: potências de expoente positivo, no primeiro caso e de expoente negativo, no segundo.

A formação dos nomes dos múltiplos e submúltiplos da unidade de base de comprimento, faz-se por derivação prefixal. Actualmente, o SI admite a utilização de vinte prefixos diferentes para formar os múltiplos e submúltiplos decimais das unidades SI (apresentados nos quadros 10 e 11, na secção 6). Os mais conhecidos, deca, hecto e quilo para os múltiplos e deci, centi e mili para os submúltiplos, foram introduzidos conjuntamente com o sistema métrico decimal nos finais do século XVIII (figura 2).

Figura 2 – Prefixos para a formação do nome das unidades do SI



Os nomes dos múltiplos e submúltiplos do metro indicam, de forma imediata, a sua relação com a unidade de base, dado que cada uma dessas unidades é dez vezes maior que a sua imediatamente inferior e dez vezes menor do que a sua imediatamente superior. É precisamente o facto das regras do SI se estabelecerem sobre a mesma base que a utilizada pelo nosso sistema de numeração que faz a simplicidade do sistema e a facilidade com que os cálculos podem ser efectuados.

De acordo com os princípios enunciados, é imediato estabelecer relações entre as diferentes unidades de comprimento do SI. Por exemplo, um metro é igual a dez decímetros, ou igual a cem centímetros, ou igual à milésima parte do quilómetro; um hectómetro é igual a cem metros, ou igual a mil decímetros, ou igual à décima parte do quilómetro (quadro 1). Também a formação dos símbolos para os múltiplos e submúltiplos se faz antepondo ao símbolo m, do metro, o símbolo convencionado para o prefixo respectivo (quadros 10 e 11). No quadro 2 apresenta-se com maior detalhe a formação de múltiplos e submúltiplos do metro, bem como a formação do respectivo símbolo e a sua relação com a unidade de base.

Quadro 1 – Relações decimais entre unidades de comprimento

quilómetro	**hectómetro**	**decâmetro**	**metro**	**decímetro**	**centímetro**
0,001	0,01	0,1	1	10	100
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10
0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1
0,01	0,1	1	10	100	1 000
0,1	1	10	100	1000	10 000

Quadro 2 – Múltiplos e submúltiplos principais do metro

	Prefixo/símbolo	Nome/ símbolo da unidade	Equivalência à unidade de base
Múltiplos	**quilo** **k**	quilómetro km	1 km =10^3 m = 1 000 m
	hecto **h**	hectómetro hm	1 hm =10^2 m = 100 m
	deca **da**	decâmetro dam	1 dam = 10 m
Unidade de base:	**metro**	**m**	
Submúltiplos	**deci** **d**	decímetro dm	1 dm = 10^{-1} m = 0,1 m
	centi **c**	centímetro cm	1 cm =10^{-2} m = 0,01 m
	mili **m**	milímetro mm	1 mm =10^{-3}m = 0,001 m

Quando um comprimento, expresso na forma de número decimal, está referido à unidade metro, o primeiro algarismo à esquerda da vírgula exprime metros, o segundo decâmetros, o terceiro hectómetros, o quarto quilómetros, etc.; por sua vez, o primeiro algarismo à direita da vírgula exprime decímetros, o segundo centímetros, e assim sucessivamente[4]. Por exemplo, a medida 3 056,806m (lê-se três mil cinquenta e seis metros

[4] Os decâmetros são dezenas de metros, os hectómetros centenas e os quilómetros milhares. Os decímetros são décimas, os centímetros centésimas e os milímetros, milésimas do metro

e oitocentas e seis milésimas) contém três quilómetros, cinco decâmetros, seis metros, oito decímetros e seis milímetros.

A propósito da escolha da unidade de medida, lembram-se as recomendações de Bento de Jesus Caraça (1978, p. 30):

> Quando se procede à medição de uma grandeza é muito importante a escolha da unidade, pois a selecção adequada de um múltiplo ou submúltiplo da unidade de base evita ter de se recorrer ao uso de números muito grandes ou muito pequenos e de difícil leitura quando se pretende expressar a medida de uma dada grandeza. A escolha da unidade faz-se sempre em obediência a considerações de carácter prático, de comodidade, de economia. (…) a expressão numérica da medição não deve dar números maus de enunciar e dos quais se não faça uma ideia clara.

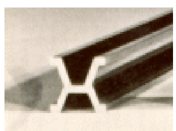
2.2. Notas históricas

O metro tem a sua origem no Sistema Métrico Decimal, instituído em França em 1799, e foi definido como a décima milionésima parte da quarta parte do meridiano terrestre que passa por Paris. Pode-se observar na figura 3 uma ilustração desta definição incluída no *Compêndio do Novo Systema Legal de Medidas* (Silveira, 1856, p. 17), primeira obra escrita em Portugal para apoio ao ensino do Sistema Métrico Decimal nas escolas primárias (O decreto de adopção data de Dezembro de 1852 e nele estabelece-se um prazo de dez anos para a entrada em vigor do novo Sistema de Unidades).

Figura 3 – Ilustração da primeira definição de metro

Por acordo internacional, o metro foi redefinido em 1889 como o comprimento do Metro dos Arquivos, isto é, em termos de um padrão físico do metro. O Metro dos Arquivos foi fabricado numa liga de platina e irídio com a forma de uma barra de secção especial em X, considerada inalterável e de grande estabilidade (figura 4).

Figura 4 – Secção em X do protótipo do metro construído em 1889



A necessidade de maior precisão no estudo de certos fenómenos físicos e o reconhecimento da importância de basear a definição num padrão natural a partir de um fenómeno reprodutível em qualquer tempo e em qualquer lugar conduziram a uma nova redefinição do metro. Assim, em 1960, o metro foi definido como sendo igual a 1650763,73 comprimentos de onda da radiação correspondente à transição entre os níveis 2p e 5d do átomo de crípton 86. Mais tarde, em 1993, com a redefinição das unidades de tempo, o metro foi redefinido em termos da distância percorrida pela luz num determinado intervalo de tempo. O metro passa a ser definido como o comprimento do trajecto percorrido no vazio pela luz durante 1/299792458 do segundo.

Em Portugal, o metro e os seus múltiplos e submúltiplos vieram substituir uma grande diversidade de unidades como o palmo craveiro, o palmo de junta, o palmo, a polegada, o pé da ribeira, o pé da toesa, o passo geométrico, o côvado, a vara, a braça, etc. (Silveira, 1856, p.57). Grande parte dessas unidades, que remontam às ocupações romanas do território, tinham carácter antropométrico, sendo por isso frequente, para evitar variações arbitrárias, a partir da Idade Média, talhar sulcos numa pedra da parede das igrejas ou de outros edifícios, próximos dos locais onde se realizavam feiras ou mercados, para aferição dos padrões das unidades mais comuns, como o côvado ou a vara (figura 5).

Figura 5 – Sulco para aferição do côvado (parede norte da Igreja da Misericórdia, Sabugal)[5]

De facto, a análise das aritméticas publicadas em Portugal a partir do século XVI sugere serem estas as duas unidades mais usadas para a medição de panos[6] (figura 6), sendo, por isso, compreensível a importância de tornar acessível ao povo os respectivos comprimentos.

A obra *Flor de Arismética Necessária* (Pacheco, 1624*)* testemunha que, no século XVII, a escolha da unidade de comprimento para medição do comprimento de panos estava relacionada com a qualidade do pano. Em concreto, refere que a seda e outros panos finos eram medidos em côvados, enquanto que os panos de linho da Índia ou os fabricados em tear, eram medidos em varas: "A seda e panos se vendem por côvado (…) O pano da

[5] Igreja datada do século XIV. Foi restaurada no século XVII.

[6] Em Portugal, tanto o côvado como a vara tinham outros divisores cuja designação se relacionava de forma directa com o número de partes iguais em que a unidade, por imperativos da medição, era subdidvidida: "há uma medida com que se mede panos e outras coisas que se chama côvado: e tem meio e terça e quarta e sesma e oitava. E outra que se chama vara e tem as mesmas partes que o dito côvado tem. E cada côvado tem 2 meios e 3 terças e 4 quartas e 6 sesmas e 8 oitavas" (Mendes, 1540, fl. 60v.).

Índia, de linho, e outras coisas de tecer se vendem por vara" (Pacheco, 1624, fl. 18). Um aspecto interessante do uso que era feito destas duas unidades prende-se com o facto do côvado ser uma unidade mais pequena que a vara, o que sugere que os produtos caros e muito apreciados na Europa pelas classes mais abastadas, como era o caso da seda, eram medidos com unidades mais pequenas que as usadas para outras mercadorias.

A obra atrás citada tem a particularidade de apresentar os sistemas de unidades de outros reinos, como os de Castela, Aragão e Valência e de tecer algumas considerações sobre as relações entre as suas unidades e as correspondentes de Portugal. Na figura 6 reproduz-se parte da "Taboada dos pezos e medidas" aí incluída. Note-se a relação estabelecida com um outro comprimento, o palmo, que surge, na obra como um submúltiplo comum aos dois sistemas de unidades de comprimento de Castela e de Portugal.

Figura 6 – As unidades de comprimento de Castela e Portugal no século XVII[7]

Taboada dos pezos
e medidas destes Reynos acima declarados

Medidas de Castella

Uma vara, porque se mede todo o pano, se dá linho, é de quatro palmos comua.

Portugal

A seda e panos se vendem por côvado ou três quartas da vara de Castela.	O côvado tem três palmos Excepto alguns panos baixos que se chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos.

O pano da Índia, de linho, e outras coisas de tecer se vendem por vara dos ditos cinco palmos que chamam portuguesa, que é vara e quarta castelhana.
De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha, na medida, trinta e três por cento; e nas mercadorias, que deste Reino vão para Castela, se ganha vinte e cinco por cento.

O excerto "De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida, trinta e três por cento; e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela, se ganha vinte e cinco por cento" (Pacheco, fl. 18), permite concluir que os mercadores portugueses conseguiam aproveitar-se da desigualdade entre as unidades de comprimento

[7]In Pacheco (1624, fl. 17v e 18).

entre Castela e Portugal e obter sempre lucro no comércio dos panos de linho e de tear (panos ditos portugueses) e das sedas e outros panos provenientes de Castela. De facto, analisada a informação fornecida por Guiral e Pacheco, é possível afirmar que se trata de um lucro em pano, resultante do facto de, à época, em Castela, se usar apenas uma unidade de comprimento, a vara de 4 palmos, e de, em Portugal, coexistirem unidades diferentes para diferentes qualidades de panos (côvado para a seda e vara para os panos mais grosseiros). Assim, o "truque" do mercador português resulta apenas do simples aproveitamento da desigualdade das unidades: compra a seda em Castela em varas de Castela e revende-a em Portugal em côvados (por cada vara de Castela faz um côvado e sobra-lhe um terço do côvado, 33%); compra o pano da Índia em Portugal, em varas, e vende-o a Castela em varas de Castela (por cada vara de Portugal faz uma vara de Castela e sobra-lhe um quarto dessa vara, 25%).

Para medir longas distâncias terrestres usou-se durante muitos séculos a *légua*, unidade frequentemente referida na literatura infantil e juvenil, em contos como "História do burro com rabo de légua e meia", de Aquilino Ribeiro, o "O gato das botas" de Perraut, ou ainda em títulos como "20 000 léguas submarinas" de Júlio Verne, entre muitos outros. É de salientar que a légua, ao contrário de outras unidades[8], nunca terá sido alvo de regulamentação legal, mas segundo Trigoso (1815), os padrões colocados numa estrada mandada construir no Ribatejo por D. Maria I, permitem tomar a légua do início do século XIX como equivalente a 3804 passos geométricos, isto é, aproximadamente igual a 6,2766 km[9]. O mesmo autor diz-nos que, no séc. XIX, poucas eram as nações europeias, além de Espanha e Portugal, que ainda usavam a légua. Países como a Itália, a Polónia, a Alemanha ou a Inglaterra tinham já adoptado a milha, antiga unidade de origem romana, cujo comprimento era próximo da terça parte da légua portuguesa (ob. cit., p.376, 382).

Motivado, muito provavelmente, pelo desaparecimento de muitos dos padrões oficiais de medidas no grande terramoto de 1755, Portugal foi um dos primeiros países da Europa a reconhecer a vantagem do sistema métrico decimal adoptado em França em 1799 e a iniciar os trabalhos para a sua adopção (Trigoso, 1815). Em 1802 já estavam em Portugal protótipos das novas unidades francesas (metro, quilograma e litro) e em 1806 já

[8] Deve-se ao rei D. Manuel a regulamentação das unidades de comprimento em Portugal. As Ordenações Manuelinas determinam que todas as varas e côvados sejam do tamanho das da cidade de Lisboa, impondo-se, assim, os padrões de Lisboa como os únicos legais para todo o Reino.

[9] Cálculo baseado na equivalência do passo geométrico ao metro (Silveira, 1856).

estavam estabelecidas as relações entre o quilograma e as antigas unidades portuguesas. Porém, as invasões francesas (1807–1811) retardaram os trabalhos e, mais do que isso, criaram alguma certa aversão à terminologia francesa. Assim, em 1812, a Comissão dos Forais escreve: "se a delicadeza dos tempos, e o brio Nacional, que com razão tem horror a tudo que traz o nome francês (…) não se deve entender de modo algum necessário introduzirem-se na nossa língua os nomes peregrinos e sistemáticos que os franceses adoptaram; seria isto uma imitação servil, e falar ao povo uma língua inteiramente ininteligível: bastantes palavras temos nós já para denotar todas as diversas medidas e pesos" (Lopes, 1849, p. 7). Deste modo, em 1813 sugeriram-se, por exemplo, as terminologias *mão travessa* e *vara* para designar os comprimentos equivalentes ao decímetro e ao metro francês (figura 7).

Figura 7 – Proposta apresentada pela Comissão dos Forais para o novo Sistema de Unidades[10]

MAPPA DO SYSTEMA METRO-DECIMAL REDUZIDO A NOMENCLATURA PORTUGUEZA.

	Medidas de Estensão. *Nomes.*	*Valores.*	Medidas de Capacidade. *Nomes.*	*Valores.*	Medidas de Peso. *Nomes.*	*Valores.*
Progressão ascendente.	Milha	10000 Mãos travessas				
		1000 Mãos travessas	Tonel	1000 Canadas	Tonelada	1000 Libras
		100 Mãos travessas	Fanga	100 Canadas	Quintal	100 Libras
	Vara	10 Mãos travessas	Alqueire	10 Canadas	Arroba	10 Libras
	MÃO TRA-VESSA.	Unidade Linear, igual á centesima millionesima parte do Quarto do Meridiano.	CANADA	Unidade de Capacidade, igual ao Cubo da Mão travessa.	LIBRA	Unidade de Peso, igual ao da Agoa destillada, contida no Cubo da Mão travessa.
Progressão descendente.	Decimo	$\frac{1}{10}$ da Mão travessa	Decimo	$\frac{1}{10}$ da Canada	Decimo	$\frac{1}{10}$ da Libra
	Centesimo	$\frac{1}{100}$ da Mão travessa	Centesimo	$\frac{1}{100}$ da Canada	Centesimo	$\frac{1}{100}$ da Libra
					Escropulo	$\frac{1}{1000}$ da Libra
					Decil	$\frac{1}{10000}$ da Libra
					Centil	$\frac{1}{100000}$ da Libra

Mem. Econ. Tom. 5.º *pag.* 394.

Um aspecto particularmente curioso dos trabalhos preliminares para a adopção do Sistema Métrico Francês em Portugal foi a ideia inicial de relacionar as unidades de massa e de volume/capacidade com a unidade fundamental de comprimento escolhida. Argumentando que a ideia de escolher "a mesma unidade para todas as qualidades de

[10] In Trigoso (1815, p. 194)

medidas é mais simples e proveitosa", propõe-se: "a centésima milionésima parte do quarto de Meridiano é a unidade de extensão, a que chamamos *mão travessa*. Esta *mão travessa cúbica* é a unidade de capacidade que chamamos *canada*, e o peso de água destilada desta mesma *mão travessa cúbica* é a unidade de pesos a que chamamos *libra*" (ob. cit., p. 14).

2.3. Aspectos didácticos

A aprendizagem da grandeza comprimento e da sua medição tem uma importância central no currículo do ensino básico por várias razões. Entre elas, destaca-se o facto de, através dela, os alunos contactarem pela primeira vez com as ideias chave para a construção do conceito de grandeza, como sejam as que resultam de processos de classificação/comparação e ordenação de comprimentos. Por outro lado, esta grandeza propicia as bases para a compreensão de vários conceitos envolvidos no processo de medição, tais como os que se relacionam com a escolha e fixação de uma unidade de medida, com as vantagens de usar uma unidade estandardizada, com a necessidade de subdividir a unidade de medida em partes iguais, com a utilização de instrumentos de medida, com a realização de fazer estimativas, etc. (Ponte e Serrazina, 2000).

Acresce ainda dizer que é através das unidades de comprimento que se introduzem as regras básicas do Sistema Internacional de Unidades, nomeadamente o princípio decimal adoptado[11] e as normas para formar nomes e símbolos dos múltiplos e submúltiplos da unidade de base com recurso a certos prefixos, com significado bem definido. Acresce ainda o facto das unidades de base das grandezas área e volume serem definidas em termos da correspondente unidade de comprimento, pelo que a sua aprendizagem e compreensão se baseia no entendimento das relações entre as unidades de comprimento.

Finalmente, a expressão da medida de comprimentos oferece um contexto natural para a extensão do conceito de número, pois a impossibilidade de exprimir a medida de determinados comprimentos usando apenas números naturais (decorrente de constatações como, por exemplo, «*a largura do livro é maior que 1 palmo, mas menor que 2 palmos*»), permite introduzir, a par com novas unidades de comprimento, a noção de número fraccionário e, em particular, de número decimal.

Unidades de comprimento

Uma abordagem do problema da medição da grandeza comprimento através da história pode ser muito enriquecedora para os alunos na medida em que pode promover o

[11] O mesmo princípio que usamos na representação escrita de números e cuja aprendizagem é um dos aspectos nucleares do tema Números e Operações no 1º ciclo do ensino básico.

estabelecimento de ligações com outras áreas curriculares, com o quotidiano (passado e presente) e, simultaneamente, contribuir para a aprendizagem de conceitos chave da medida, tais, como por exemplo: (a) a ideia de unidade; (b) a importância da escolha da unidade; (c) o conceito de padrão; (d) as desvantagens da utilização de unidades não estandardizadas; (e) a evolução económica e social proporcionada pela criação e adopção generalizada (uniformização) das unidades de comprimento.

Assim, sugere-se a exploração de episódios históricos, numa perspectiva de articulação com outras áreas curriculares (Estudo do Meio/Língua Portuguesa/Expressões), seja na forma de um pequeno texto, de uma dramatização, da visita a um museu ou valendo-se de recursos audiovisuais (filme), que permitam dar a conhecer, aos alunos, alguns aspectos históricos relacionados com o problema da medição de comprimentos, tais como por exemplo:

- A necessidade de medir comprimentos nas mais variadas actividades (comerciais, construção de casas, diques, etc), exigiu a fixação de uma unidade de comprimento, bem como a sua materialização física (em madeira, ferro ou mesmo esculpida em monumentos públicos, próximos de locais de mercados e feiras);
- A natureza das medições tornou imperiosa a subdivisão da unidade de comprimento num determinado número de partes iguais;
- A natureza antropométrica das primeiras unidades de medida (relacionadas com partes do corpo humano - pé, passo, palmo, côvado, braça, …) e as dificuldades daí resultantes para todas as actividades em que a medição de comprimentos se torna necessária;
- As razões por detrás da escolha de uma nova unidade, de natureza completamente diferente das que a antecederam e à qual foi dado o nome de metro (cujo significado etimológico é medida). O metro foi adoptado sob o lema "Para todos os tempos, para todos os povos".

Problemas históricos adequados a alunos deste nível de ensino que salientem a falta de uniformidade e os problemas daí resultantes para a vida social e económica são também de ter em conta na abordagem desta grandeza. O problema seguinte relativo à transacção de panos entre Portugal e Castela no século XVII é um exemplo possível do que se acabou de dizer:

> O côvado tem três palmos. A seda vende-se por côvado. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer vende-se por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas que vêm de Castela ganha-se na medida uma terça e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela

> ganha-se uma quarta. Entendido o valor das medidas, pergunta-se porque é que o mercador ganha sempre no negócio[12].

Trata-se de um problema em que está envolvida a medição de comprimentos e o uso de diferentes unidades de comprimento, algumas de Portugal, outras de Castela e cuja abordagem didáctica, no 1º ciclo do ensino básico, beneficia da possibilidade do recurso a materiais concretos. Nomeadamente, padrões das antigas unidades de comprimento (vara portuguesa, vara castelhana, côvado e palmo) cujo manuseamento permita ao aluno fazer comparações físicas entre estas, eventualmente realizar medições, mas sobretudo descobrir como é que o mercador usa as unidades nas medições que faz quando compra os panos. O problema permite ao professor dar a conhecer aos alunos, por exemplo, que as unidades de medida de comprimento nem sempre foram o metro, que em Portugal se usavam unidades com comprimentos diferentes para a medição de panos (unidades pequenas para as sedas; unidades grandes para os outros panos), que em Castela não se usavam as mesmas unidades de Portugal (tinham o mesmo nome mas o comprimento era diferente). A partir daí, sobressai a ideia da grande vantagem do uso do metro, unidade de comprimento invariável, em grande número de países do mundo.

Ressalta-se o papel que este tipo de actividade pode desempenhar no desenvolvimento do interesse do aluno pela matemática e na promoção da comunicação em sala de aula. Ser capaz de comunicar matematicamente, tanto por escrito como oralmente, constitui um aspecto crucial da competência matemática que todos devem desenvolver. O recurso à história da matemática (mais em concreto à história da Medida) apela para o uso da língua portuguesa e oferece oportunidades para comunicar matematicamente nas suas múltiplas formas: representar, falar, ouvir, escrever e ler (ME, 2001; Abrantes et al., 1999).

<u>Unidades de comprimento do SI</u>

Note-se, a este propósito, que a medição de comprimentos em unidades SI deve ser precedida, tal como sugerido no Programa de Matemática (ME-DEB, 2004), da realização de algumas medições de comprimentos de objectos da sala de aula (por exemplo: comprimento do quadro, largura da sala ou comprimento da mesa) com recurso a unidades não estandardizadas. Tal como aconteceu ao longo da história, sugere-se o uso de unidades

[12] Adaptado de Pacheco (1624, fol. 18).

de comprimento de natureza antropométrica, como o palmo, o pé ou o passo, como ponto de partida para o contacto com o conceito de unidade de medida e com o processo de medição (o resultado é um número que traduz quantas unidades são necessárias para “cobrir” um determinado comprimento). Pretende-se que a realização de medições com tal tipo de unidades crie a base para o entendimentos da necessidade de usar unidades estandardizadas e de considerar subdivisões da unidade de comprimento escolhida.

O Programa (ME, 2004) sugere também a construção pelos alunos, de um padrão do metro, o que deverá ser feito por comparação directa com um padrão físico desta unidade (por exemplo, recorrendo a um padrão em madeira usado por retalhistas ou a uma fita métrica). Ainda que seja difícil explicar aos alunos o que é o metro (ou seja, a definição de metro) é conveniente que fique claro que o seu comprimento não é arbitrário e que está relacionado com um fenómeno físico (a distância percorrida pela luz numa certa fracção de segundo). O professor deve também transmitir aos alunos a ideia de que em qualquer parte do mundo, num laboratório, podem ser construídos padrões do metro e que estes serão sempre iguais entre si. É também importante salientar as vantagens da adopção generalizada do metro por um grande número de países. O recurso a folhetos publicitários de carros, de televisores, computadores ou material de jardinagem permitirá salientar a coexistência de outros sistemas de unidades de comprimento.

Tal como referido para unidades não estandardizadas, a necessidade de considerar uma unidade mais pequena do que o metro deve decorrer da impossibilidade de exprimir a medida de certos comprimentos usando apenas o metro (usar expressões como *o comprimento da sala é maior que 5 metros mas menor que 6 metros*, por exemplo). O mesmo critério serve para a introdução de unidades como o centímetro ou o milímetro.

A introdução de unidades maiores que o metro deve surgir como uma resposta ao problema criado pela obrigatoriedade de usar grandes números na expressão do resultado da medida de grandes comprimentos, como acontece na marcação de distâncias entre localidades.

Importa salientar que a compreensão das relações básicas entre as unidades de comprimento do SI é a base para aprender a fazer conversões, pelo que as tarefas a propor devem privilegiar o envolvimento do aluno na resolução de situações problemáticas que permitam desenvolver essa compreensão. Assim, as experiências de aprendizagem devem procurar conduzir o aluno a estabelecer, de forma explícita, a relação decimal entre o metro e os seus submúltiplos ou divisores e os seus múltiplos, primeiro de forma oral e escrita e depois simbolicamente. Note-se que os alunos contactam pela primeira vez, de modo formal, com os nome e símbolos convencionados para as unidades de comprimento do SI, pelo que convém introduzi-los com cuidado, atribuindo-lhes o significado que os prefixos usados na formação dos nomes e símbolos lhes confere.

Estimação

Um dos três grandes tópicos do tema Grandezas e Medidas é a *Estimativa de valores de grandezas*. Ser capaz de fazer uma estimação não é uma capacidade inata. Devemos, sim, considerá-la como uma aptidão que só a aprendizagem pode desenvolver. Ora, desenvolvê-la demora tempo e exige o envolvimento do aluno em experiências de aprendizagem que lhe permitam construir conhecimento sobre o tamanho aproximado de uma unidade padrão. Assim sendo, o professor deve planear tarefas que integrem a estimação nas actividades de medição e que encorajem o aluno a usar estratégias de estimação, por exemplo, solicitando abertamente a estimação da medida de um objecto ou pedindo a indicação de um objecto com um determinado comprimento. Uma estratégia possível para que o aluno possa desenvolver métodos para estimar comprimentos e avaliar a razoabilidade de medições em situações do quotidiano pode ser criar a de como referências de unidades de comprimento o comprimento do palmo e do passo (Abrantes et al., 1999; NCTM, 1991, 2000).

3. Área

3.1. Conceito e unidades SI

A área é um atributo mensurável das figuras bidimensionais e, de modo intuitivo, pode ser entendida como a porção de plano que essa figura ocupa. Para medir esta grandeza, é necessário começar por escolher uma unidade de área, isto é, uma figura plana cuja área é tomada como padrão de comparação. Assim, para medir a área de uma figura, compara-se esta com a unidade escolhida, operação da qual deve resultar um número que exprima quantas vezes essa figura contém a unidade de área (Lima, 1985).

Por convenção, a unidade de área é um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (denominado, por isso, de quadrado unitário), mas nada invalida a fixação da área de outra figura plana como unidade de área (por exemplo, de um triângulo, rectângulo, paralelogramo, …). Porém, se atendermos à necessidade habitual de proceder a subdivisões da unidade, facilmente se compreende a vantagem do quadrado relativamente a outras figuras.

O sistema internacional baseia-se na fixação de um pequeno número de grandezas, independentes entre si, denominadas grandezas de base[13], e das respectivas unidades[14] com base nas quais é possível derivar outras grandezas e unidades, denominadas, respectivamente, por grandezas derivadas e unidades derivadas. As unidades de medida das grandezas derivadas definem-se à custa das unidades de base convencionadas ou mesmo de outras unidades derivadas, através de equações de definição que devem apenas envolver produtos e quocientes de outras unidades (Almeida, 1997).

Sendo a unidade de área, a área de um quadrado cujo lado mede um metro, considera-se a unidade de área como uma unidade derivada da unidade de comprimento. Por definição, a unidade de área é designada por metro quadrado e em termos simbólicos,

[13] Actualmente, são sete as grandezas de base do SI: comprimento, massa, tempo, intensidade da corrente eléctrica, temperatura, quantidade de substância e intensidade luminosa. A que se adiciona a amplitude de ângulo plano, cuja unidade é o radiano.

[14] As unidades de base do SI são definidas em termos de constantes ou fenómenos físicos, considerados como invariantes e reprodutíveis com grande precisão. A única excepção ocorre com a unidade fundamental de massa, que continua a ser definida em termos da massa de um protótipo.

representa-se pela potência de expoente dois da unidade SI de base, isto é, por m^2 (lê-se metro quadrado).

Figura 8 – A grandeza comprimento no SI

Grandeza → Área

Unidade SI → Metro quadrado

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade derivada de área é o metro quadrado, simbolizado por **m^2** e definido como:

Símbolo da unidade → **m^2**

O **metro quadrado** é a área de um quadrado cujo comprimento do lado é um metro.

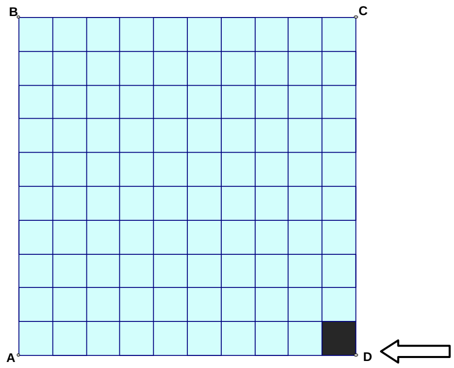
<u>Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado</u>

Para medir áreas, pode usar-se além do metro quadrado, qualquer um dos seus múltiplos e submúltiplos formados de acordo com os princípios do SI e com a definição da unidade base de área. Assim, o centímetro quadrado é a área de um quadrado cujo lado mede um centímetro e o decâmetro quadrado é a área de um quadrado de lado com comprimento igual a um decâmetro.

Para justificar a relação entre estas unidades temos de atender à sua definição. Assim, para relacionar um decímetro quadrado com o centímetro quadrado devemos atender a que o decímetro quadrado é a área de um quadrado cujo comprimento do lado mede um decímetro. Suponhamos que o quadrado representado na figura 9 representa um decímetro quadrado. Deste modo, subdividindo cada um dos seus lados em dez partes iguais, cada uma destas partes representará um centímetro. Traçando, a partir dos pontos obtidos, paralelas aos lados do quadrado obtém-se uma decomposição do metro quadrado em cem quadrados de lado igual a um centímetro, isto é, em cem centímetros quadrados (ver figura 9). Portanto, o decímetro quadrado contém cem centímetros quadrados. Raciocinando de forma análoga, justifica-se que o metro quadrado tem cem decímetros quadrados, etc.

No quadro 3 representam-se as equivalências entre a unidade de base de área e os seus múltiplos e submúltiplos principais.

Figura 9 – Representação da relação entre o decímetro quadrado e o centímetro quadrado



Quadro 3 – Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado

	Prefixo/ símbolo	Nome / símbolo da unidade	Equivalência à unidade de base
Múltiplos	**quilo** **k**	quilómetro quadrado km^2	1 km^2 = 10^6 m^2 = 1 000 000 m^2
	hecto **h**	hectómetro quadrado hm^2	1 hm^2 = 10^4 m^2 = 10 000 m^2
	deca **da**	decâmetro quadrado dam^2	1 dam^2 = 10^2 m^2 = 100 m^2
Unidade de base:		**metro quadrado** $\mathbf{m^2}$	
Submúltiplos	**deci** **d**	decímetro quadrado dm^2	1 dm^2 = 10^{-2} m^2 = 0,01 m^2
	centi **c**	centímetro quadrado cm^2	1 cm^2 = 10^{-4} m^2 = 0,0001 m^2
	mili **m**	milímetro quadrado mm^2	1 mm^2 = 10^{-6} m^2 = 0,000001 m^2

No estabelecimento de equivalências entre as unidades de área, deve registar-se que cada unidade contém cem unidades da unidade imediatamente inferior e é igual à centésima parte da unidade imediatamente superior. Isto é, estas unidades procedem de cem em cem. Os decâmetros quadrados são centenas de metros quadrados, os hectómetros quadrados são dezenas de milhares de metros quadrados, os decímetros quadrados são centésimas do metro quadrado, os centímetros quadrados são décimas milésimas do metro quadrado, etc.

Suponhamos, por exemplo, que a área de um campo de jogos é de 5324,7 m^2 (lê-se cinco mil, trezentos e vinte e quatro metros quadrados e sete décimas). Se dividirmos o número que a representa em classes de dois algarismos à esquerda e à direita da vírgula, a primeira classe à esquerda da vírgula exprime metros quadrados (vinte e quatro metros quadrados) e a segunda decâmetros quadrados (cinquenta e três metros quadrados); a classe à direita da vírgula exprime decímetros quadrados (setenta decímetros quadrados). Deste modo, outra leitura possível para a medida referida é: cinco mil, trezentos e vinte e quatro metros quadrados e setenta decímetros quadrados. Uma área de três quilómetros quadrados, dois hectómetros quadrados, oito metros quadrados e seis decímetros quadrados representa-se por 3020008,06m^2, visto que os quilómetros e os hectómetros quadrados são, respectivamente, milhões e dezenas de milhares de metros quadrados e os decímetros quadrados são centésimas do metro quadrado.

Unidades agrárias

Quando se trata da medição da área de um terreno agrícola, a unidade de área usualmente adoptada é o are, simbolizado por *a*, e é definido como a área de um quadrado de dez metros de lado, isto é, um quadrado cuja área é igual a cem metros quadrados. O are é uma unidade permitida no SI por ser uma antiga unidade cujo uso se manteve na agrimensura. O mesmo se passa relativamente ao seu múltiplo, o hectare. O hectare corresponde a cem ares e conjuntamente com o are e o centiare constituem as denominadas medidas agrárias. Deve notar-se que na formação dos submúltiplos e múltiplos das unidades agrárias os prefixos usados exprimem uma relação decimal, isto é cada uma delas contém dez das imediatamente menores. O hectare corresponde a 100 ares e o centiare é a centésima parte do are. Assim, recordando que o are é, por definição, igual ao decâmetro quadrado, é imediato concluir que o hectare é equivalente ao hectómetro quadrado e o centiare ao metro quadrado (quadro 4). Porém, para expressar áreas de uma grande extensão territorial, em unidades do SI, o mais adequado é recorrer ao quilómetro quadrado, cujo símbolo é km^2, equivalente a um milhão de metros quadrados (1 Km^2 = 1 000 000 m^2, ou seja, 10 000 ares ou 100 hectares).

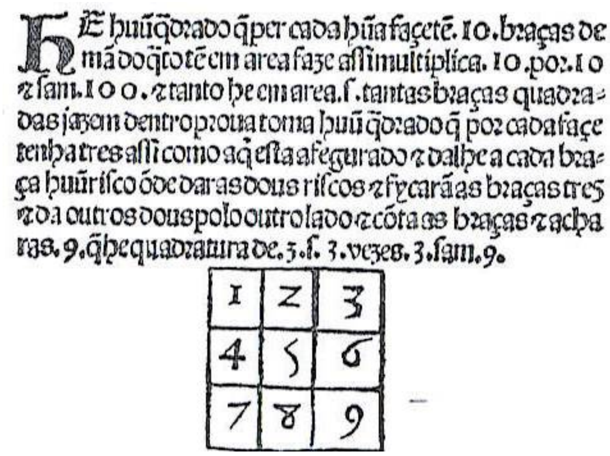
Quadro 4 – Unidades agrárias

	Nome/ símbolo da unidade	Equivalência à unidade de base do SI
Múltiplo	hectare ha	1 ha = 100 a =1 hm^2 = 10 000 m^2
Unidade:	**are** **a**	1 a = 1 dam^2 = 100 m^2
Submúltiplo	centiare ca	1 ca = 0,01 a = 1 m^2

3.2. Notas históricas

Podemos encontrar referências a unidades de área no primeiro livro de matemática português, editado em 1519, da autoria de Gaspar Nicolas e intitulado *Tratado da Prática d'Arismétyca*. Embora esta obra esteja intimamente relacionada com questões decorrentes da actividade e prática comerciais dedica algumas páginas a questões de geometria prática (Nicolas, fol. 80 a fol. 81v.) onde constam vários problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras geométricas como quadrados, rectângulos, triângulos e círculos, bem como algumas referências explícitas a unidades como a braça quadrada, a vara quadrada ou o palmo quadrado. Na figura 10 reproduz-se a primeira das situações expostas, relativa ao cálculo da área de quadrado de lado 10 braças, em que o autor começa por informar o leitor de que deve multiplicar 10 e 10 e de que a área é igual a 100 braças quadradas: "É um quadrado que por cada face tem 10 braças, demando quanto tem em área. Faz assim, multiplica 10 por 10 e são 100 e tanto é a área e tantas braças quadradas jazem dentro" (Nicolas, 1519, fol. 80). Particularmente curiosa é a sugestão apresentada para a verificação da correcção do resultado obtido: "Prova: toma um quadrado que por cada face tenha três, assim como está afigurado e faz em cada braça um risco e darás dois riscos e dá outros no outro lado e contas as braças e acharás 9 que é a quadratura de 3, e 3 vezes 3 são 9" (ob. cit).

Figura 10 – Cálculo da área de um quadrado[15]

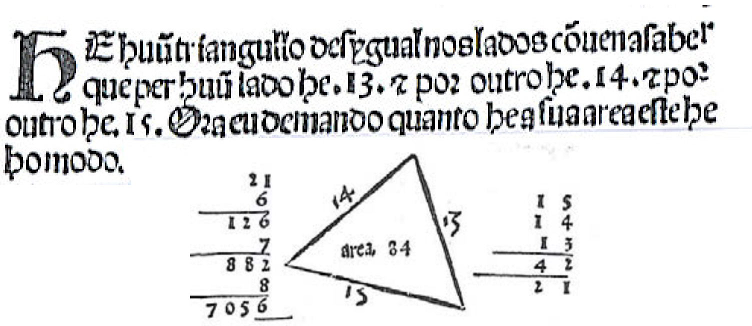

HE huũ q̃drado q̃ per cada hũa face tẽ. 10. braças de
mãdo q̃to tẽ em area faze assi multiplica. 10. por. 10
⁊ sam. 100. ⁊ tanto he em area. s. tantas braças quadra-
das jazem dentro proua toma huũ q̃drado q̃ por cada face
tenha tres assi como aq̃ esta afegurado ⁊ dalhe a cada bra-
ça huũ risco õde daras dous riscos ⁊ fycarã as braças tres
⁊ da outros dous polo outro lado ⁊ cõta as braças ⁊ acha
ras. 9. q̃ he quadratura de. 3. s. 3. vezes. 3. sam. 9.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

15 Nicolás (1519, fol. 80)

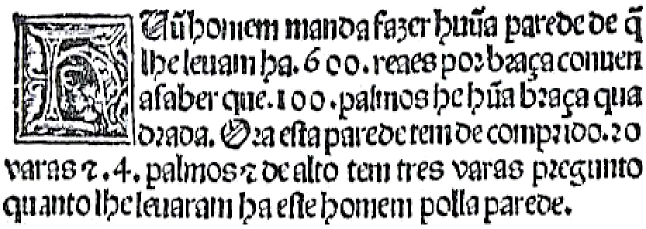
Na figura 11 pode observar-se outra situação relativa ao cálculo de áreas, desta feita relativa ao cálculo da área de um triângulo do qual se conhecem as dimensões dos três lados. Como se pode observar, o cálculo é feito por aplicação da fórmula de Heron[16].

Figura 11 –Área de um triângulo conhecidas as medidas dos lados[17]


he hũu triangullo desygual nos lados cõuem asaber que per hũu lado he.13.e por outro he.14.e por outro he.15. Ora eu demando quanto he a sua area este he ho modo.

Na mesma obra, surgem também alguns problemas de áreas aplicados à construção de paredes e cuja principal dificuldade deriva precisamente das relações entre as diferentes unidades de comprimento aí referidas (figura 12). Um aspecto curioso que sobressai da análise desses problemas é a referência constante ao preço de construção de uma braça quadrada. Como a braça era equivalente a 10 palmos e a vara a 5 palmos, a resolução desses problemas passa sempre pela expressão de todas as medidas de área em palmos quadrados. Por todas as facilidades decorrentes desta relação *decimal*, não é de estranhar que, no primeiro problema aplicado, Nicolas comece por informar: "convém saber que 100 palmos [quadrados] é uma braça quadrada" (fl. 92).

Figura 12 – O problema da construção de uma parede[18]


Hũ homem manda fazer hũa parede de q lhe levam ha.600.reaes por braça conuem asaber que.100.palmos he hũa braça quadrada. Ora esta parede tem de comprido.20 varas e.4.palmos e de alto tem tres varas pregunto quanto lhe levaram ha este homem polla parede.

---

[16] Área = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, em que s designa o semi-perímetro do triângulo e a, b e c as medidas dos seus lados.

[17] É um triângulo desigual nos lados. Convém saber que um dos lados é 13 e por outro é 14 e por outro é 15. Ora eu demando quanto é a sua área (Adaptado de Nicolás, 1519,fol.83)

[18] Um homem manda fazer uma parede e levam-lhe a 600 reais por braça [quadrada]. Convém saber que 100 palmos [quadrados] é uma braça quadrada. Ora esta parede tem de comprido 20 varas e 4 palmos e de alto tem três varas. Pergunto quanto levam a este homem pela parede (Nicolás, 1519,fol.92).

É de assinalar que a ambiguidade da definição das unidades de comprimento resultante do seu carácter antropométrico se reflectia nas unidades de área. A esse propósito, Fradesso da Silveira, autor do primeiro manual escrito com a finalidade de ensinar o sistema métrico decimal no ensino primário português, escreve: "denominações de braça quadrada, pé, palmo, polegada quadrada, etc. exprimiam unidades mal definidas por não serem iguais em todas as terras, a grandeza do pé, do palmo, da braça que se tomava para unidade linear" (Silveira, 1856, p. 31). Acresce dizer que as unidades de área, como unidades derivadas, foram indirectamente influenciadas por todas as tentativas de reforma dos sistemas de unidades ocorridas em Portugal. Esse processo, que se inicia em 1352 quando D. Afonso IV determina a utilização da *alna*, medida francesa de que se serviam os mercadores de Lisboa como a unidade de comprimento a usar nos panos de cor, só termina com as ordenações manuelinas (1497) que impõem as *varas* e *côvados* da cidade de Lisboa como padrões legais de comprimento (Trigoso, 1815).

A situação, no que respeita à medição da superfície de terras ou propriedades rurais (agrimensura), era ainda mais complexa que a exposta acima, pois as unidades usadas no passado não terão sido alvo de qualquer determinação legal, estando apenas sujeitas às determinações das Câmaras: "a agrimensura portuguesa era totalmente arbitrária e diversa em quase todos os distritos" (Trigoso, 1815, p. 376). Por exemplo, a *geira*, de acordo com o afirmado pela Comissão dos Forais em 1812, era uma das unidades mais correntes em Portugal e uma das mais indefinidas: "De todas a mais geral é a *geira*, mas bem longe está de ser uniforme, e de se poder compreender bem a superfície do terreno que por esta palavra se quer designar; pois que *geira* significa comummente a indefinida porção de terra que uma junta de bois lavra em dia, a qual em algumas qualidades de terreno pode ser o duplo do que em outras" (Lopes, 1849). De acordo com Trigoso (1815), nos campos de Coimbra, cada *geira* tinha doze *aguilhadas* e cada *aguilhada* sessenta *varas* de comprido por uma de largo, mas nesta definição da *geira* através da *aguilhada*[19], tomava-se a *vara* igual a treze *palmos* e três quartos, o que demarca, de forma clara, esta unidade de área da *vara* enquanto unidade de comprimento (recorde-se que a *vara*, medida linear, era igual a 5 palmos).

[19] Depreende-se que a aguilhada é a área de um rectângulo de dimensões lineares iguais a 60 varas (comprimento) e 1 vara (largura).

Figura 13 – A geira como área da superfície lavrada num dia por uma junta de bois

Outro aspecto curioso das antigas unidades agrárias prende-se com o facto de muitas expressões populares, como por exemplo «*semear um moio de terra*» ou «*semear um alqueire de terra*», traduzirem uma estreita relação entre uma determinada quantidade de semente e a porção de terreno onde esta vai ser semeada (tanto o moio, como o alqueire, eram unidades usadas para medir volumes de secos/sementes). Relação que, de forma natural, terá levado o homem rural a atribuir uma dupla acepção a termos como *moio* e *alqueire* como medidas de volume e agrárias[20] que terá persistido em Portugal, pelo menos, até à década de 70 do séc. XX (Pinto, 1983).

[20] O moio era uma unidade agrária muito usada no Ribatejo: "Os Moios de terra do Ribatejo são divididos em sessenta Alqueires, cada hum dos quais tem 17 280 Palmos quadrados (Trigoso, 1815, p. 376).

3.3. Aspectos Didácticos

Nos primeiros anos de escolaridade, a medição da área de uma superfície plana deve ser introduzida por medição directa, isto é, por contagem do número de unidade de áreas necessárias para recobrir a superfície de um quadrado ou de um rectângulo. Esta definição deve implicar o envolvimento do aluno na realização de actividades práticas de manipulação e/ou construção, recorrendo a materiais estruturados ou não estruturados. Contudo, importa ter presente dois aspectos:

(a) manipular e fazer actividades práticas não é, em si, suficiente para que o aluno lhes atribua um sentido e seja capaz de as articular com os conceitos matemáticos subjacentes, isto é, a compreensão de conceitos não resulta de forma mágica das actividades de manipulação;

(b) a realização de actividades desta natureza tem como objectivo último que o aluno seja capaz, terminada a actividade manipulativa, de abstrair do contexto particular da actividade e expor de forma clara a(s) ideia(s) matemática(s) implícita(s) na actividade (Abrantes et al., 1999; NCTM, 1991).

Relativamente à introdução das unidades de área do SI, o programa de matemática do 1º ciclo do ensino básico sugere a introdução do decímetro quadrado e só depois do metro quadrado. O ponto de partida para a introdução de ambas as unidades de medida devem ser situações que justifiquem a necessidade de definir e construir padrões físicos de unidades de área. Nomeadamente, é desejável que o aluno seja capaz de articular a actividade prática de construção do metro quadrado com os conceitos de unidade de área, de metro quadrado e de decímetro quadrado e, como resultado dela, estabeleça e compreenda a relação entre estas duas unidades de área. A actividade deve também ser explorada no sentido de consciencializar o aluno para a relação intrínseca entre unidade de comprimento e unidade de área.

<u>Relação entre unidades de área</u>

A relação que se estabelece entre as diferentes unidades de área do SI apresenta maiores dificuldades para os alunos dado que, ao contrário do que acontece com o comprimento, esta não é decimal mas sim centesimal. Tal relação, que resulta da definição de unidade de área como a área de um quadrado, pode ser apreendida pelo aluno através da realização de cobertura de uma superfície quadrada e posterior contagem do número de unidades necessária para a recobrir. Deste modo, deve ser dada uma ênfase especial à relação estabelecida, por construção, entre o metro quadrado e o decímetro quadrado, pois a capacidade de fazer conversões entre unidades de área deve apoiar-se na compreensão e não na mecanização. Para reforçar a compreensão da relação centesimal entre unidades de área consecutivas, sugere-se a construção do centímetro quadrado, a partir da decomposição, em centímetros, dos lados de um quadrado de lado 1 dm - poderá recorrer-se a papel quadriculado de 1cm ou a papel milimétrico. Este último permite explorar a relação com o milímetro quadrado [21].

É importante ter presente que no processo de articulação das actividades práticas realizadas com o(s) conceito(s) matemático(s), o papel do professor é particularmente importante, cabendo-lhe desafiar, estimular e dirigir a actividade dos alunos.

Cálculo da área de figuras poligonais

A compreensão de que a medida da área de um quadrado ou de um rectângulo pode ser obtida por contagem do número de unidades de área que essa figura contém é um pré-requisito para que o aluno possa aplicar um raciocínio multiplicativo e deduzir as fórmulas para o cálculo das áreas desses polígonos.

Assim, as fórmulas para o cálculo dessas áreas não devem ser apresentadas prematuramente e sem o apoio fornecido pela decomposição da figura num determinado número de unidades de área. Isto é, os alunos devem começar por perceber que a área de um rectângulo de lados inteiros pode ser obtida determinando o número de quadrados unitários contidos nesse polígono. Para tal, importa começar por fazer uma decomposição da figura em quadrados unitários[22] e contar, de seguida, o número de quadrados unitários e ter presente que na expressão numérica da área, está implícita a aplicação de dois princípios: (a) a área de uma figura plana é a soma das áreas das figuras em que foi decomposta; (b) figuras planas geometricamente iguais têm a mesma área. Segue-se que a área do rectângulo é igual ao produto das dimensões dos seus lados.

[21] Papel cuja designação provém do facto de cada um dos quadrados mais pequenos em que se divide ter um milímetro de lado.
[22] Por meio de paralelas aos seus lados.

A fórmula para o cálculo da área de um rectângulo ou de um quadrado deve ser introduzida por meio de um problema que releve a importância de ter um método de cálculo da área que não "obrigue" a recobrir ou a decompor a superfície em unidades de área e a contá-las. Um problema que envolva antigas unidades de comprimento e de área afigura-se com potencialidades a esse nível, pelo facto de envolver unidades desconhecidas e obrigar a focar a atenção sobre as relações entre elas. A alunos de 4º ano de escolaridade poderá ser proposto um problema análogo ao referido na nota histórica:

> Um homem manda fazer uma parede e levam-lhe 10 reais por palmo quadrado. Ora esta parede tem de comprido 1 côvado e 2 palmos e de altura tem 4 palmos. Pergunto quanto levam a este homem pela parede[23].

É de notar que a resolução deste problema requer o conhecimento de que 1 côvado é igual a 3 palmos. Dado que o preço de construção é dado por palmo quadrado, esse dado remete para a necessidade de calcular a área em palmos quadrados. O problema pode ser usado como um meio para a introdução da fórmula do cálculo da área do rectângulo.

[23] Adaptado de Nicolás (1519, fol. 92).

4. Volume/Capacidade

4.1. Conceito e unidades de medida SI

O volume é uma grandeza associada a objectos tridimensionais que, de uma forma um tanto intuitiva, pode ser entendido como a quantidade ou porção de espaço ocupado por um corpo (Lima, 1985).

Tal como acontece com qualquer outra grandeza, a escolha de uma unidade de medida é um imperativo para que se possa proceder à medição de volumes. Assim, uma primeira abordagem ao problema da medida de um volume passa por o comparar com outro volume escolhido como unidade. O número obtido, que exprime quantas vezes esse primeiro volume contém o segundo (a unidade), representa a medida do volume.

Em termos práticos, nem sempre é possível determinar um volume por contagem do número de unidades nele contidas. Quando estamos perante sólidos com certas configurações geométricas (cubos, paralelepípedos, cilindros, prismas, pirâmides, troncos de pirâmides, etc.) é possível recorrer a fórmulas cuja dedução é relativamente acessível. Na medição de volumes de líquidos (água, sumos, …) ou de certos sólidos (farinha, sal, milho, …) é usual recorrer a recipientes contentores graduados de acordo com a unidade de volume convencionada.

Capacidade

A capacidade é um atributo mensurável associado a objectos tridimensionais contentores, isto é, que possam conter algo[24]. Assim, quando queremos medir a quantidade de líquido, gás ou sólido que determinado recipiente pode conter, dizemos que vamos medir a sua capacidade, isto é, o volume do espaço contido no recipiente (o seu volume interior). Em contrapartida, quando nos interessa a quantidade de espaço ocupada pelo recipiente, falamos simplesmente em volume. Define-se, deste modo, a capacidade de um recipiente como o seu volume interior. Assim, ainda que a capacidade seja, por definição, um volume, os termos capacidade e volume designam atributos mensuráveis distintos do mesmo objecto tridimensional.

[24] É de notar que um sólido não contentor tem capacidade zero.

Unidades de volume/capacidade

Por convenção, a unidade de volume é o volume de um cubo cujo comprimento da aresta mede uma unidade de comprimento, que denominamos por cubo unitário e cujo volume, por definição, é igual a 1. Tal como acontece com a área, a unidade de volume é definida a partir de uma das grandezas de base do SI. Diz-se, por isso, que é uma unidade derivada. Sendo o metro a unidade de base da grandeza comprimento, a unidade de base da grandeza volume é o metro cúbico que, por convenção, se representa pelo símbolo m^3.

Embora a capacidade e o volume sejam atributos distintos de formas tridimensionais, ressalta-se que a medição de ambos corresponde à medição da mesma grandeza física, ou seja, à medição de um volume. Deste modo, as unidades usadas para a medição da capacidade coincidem com as unidades de volume.

Figura 14 - A grandeza volume no SI

Grandeza → Volume

Unidade SI → Metro cúbico

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de volume/capacidade é o metro cúbico, simbolizado por $\mathbf{m^3}$:

Símbolo da unidade →

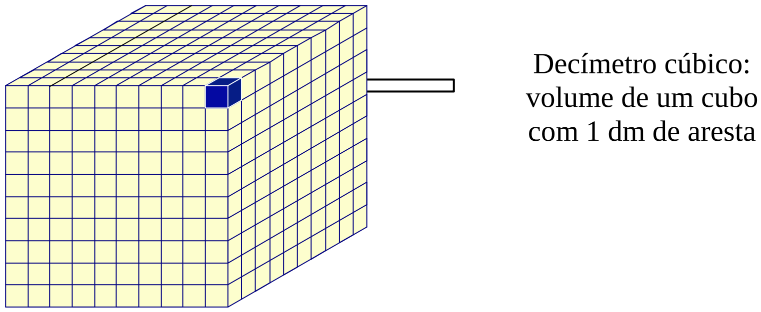
O **metro cúbico** é o volume de um cubo cujo comprimento da aresta é um metro.

Múltiplos e submúltiplos da unidade base de volume

Para medir volumes é frequentemente necessário recorrer a múltiplos ou submúltiplos da unidade de base, todos eles encarados como volumes de cubos que têm por aresta uma determinada unidade de comprimento (respectivamente, um múltiplo ou um submúltiplo do metro). Por exemplo, o decímetro cúbico é o volume de um cubo de aresta com comprimento igual a um decímetro.

Embora os nomes dos múltiplos ou submúltiplos do metro cúbico sejam formados de acordo com os princípios do SI, para estabelecer uma relação numérica entre duas das unidades de volume do SI devemos atender ao facto de estas designarem volumes de cubos e à relação existente entre os comprimentos das respectivas arestas. Estabeleça-se, a título ilustrativo, a relação entre o metro cúbico e o decímetro cúbico. Dado que um metro é igual a 10 decímetros e o metro cúbico é o volume de um cubo cuja aresta mede 1 metro, considere-se o cubo cujo volume é um metro cúbico. Dividindo cada uma das arestas em dez segmentos de comprimento igual a um decímetro, o cubo inicial pode ser decomposto em 1000 cubos justapostos, de aresta igual a um decímetro e cujo volume é igual a 1 decímetro cúbico. Pode-se, assim, concluir que um metro cúbico é igual a mil decímetros cúbicos ou que o decímetro cúbico é a milésima parte do metro cúbico (figura 15).

Figura 15 – Representação da relação entre o metro cúbico e o decímetro cúbico



$$1\ m^3 = 10 \times 10 \times 10\ dm^3 = 1\,000\ dm^3$$

Do mesmo modo se estabelece que o metro cúbico contém 100x100x100 centímetros cúbicos, isto é, um milhão de centímetros cúbicos. Ou que o centímetro cúbico é a milionésima parte do metro cúbico.

Raciocinando desta forma, conclui-se que, nas medidas de volume, cada unidade contém mil unidades imediatamente inferiores ou que é igual à milésima parte da unidade imediatamente superior. No quadro 5 representamos as equivalências entre a unidade de base de volume e os seus múltiplos e submúltiplos principais.

Assim, se um volume estiver expresso em metros cúbicos, cada classe de três algarismos (à esquerda e direita da vírgula) exprime um determinado número de unidades de volume: a primeira classe à direita exprime um determinado número de decímetros cúbicos, a seguinte um determinado número de centímetros cúbicos e assim sucessivamente; a primeira classe de três algarismos à esquerda da vírgula representará metros cúbicos, a segunda, decâmetros cúbicos, etc. Por exemplo o volume de 237 345 600,23456dm^3 (lê-se seiscentos decímetros cúbicos e vinte e três mil quatrocentos e cinquenta e seis centésimas milésimas) contém 237 hectómetros cúbicos, 345 decâmetros cúbicos, 600 metros cúbicos, 234 decímetros cúbicos e 600 centímetros cúbicos.

Quadro 5 – Múltiplos e submúltiplos da unidade SI de volume

	Prefixo/ /símbolo	Nome da unidade/ /símbolo da unidade	Equivalência à unidade de base
Múltiplos	**quilo** **k**	quilómetro cúbico km^3	1 km^3 = 10^9 m^3 = 1 000 000 000 m^3
	hecto **h**	hectómetro cúbico hm^3	1 hm^3 = 10^6 m^3 = 1 000 000 m^3
	deca **da**	decâmetro cúbico dam^3	1 dam^3 = 10^3 m^2 = 1000 m^3
Unidade:		**metro cúbico** **m^3**	
Submúltiplos	**deci** **d**	decímetro cúbico dm^3	1 dm^3 = 10^{-3} m^3 = 0,001 m^3
	centi **c**	centímetro cúbico cm^3	1 cm^3 = 10^{-6} m^3 = 0,000001 m^3
	mili **m**	milímetro cúbico mm^3	1 mm^3 = 10^{-9} m^3 = 0,000000001 m^3

Outras unidades de volume permitidas pelo SI

O litro é uma unidade de volume muito utilizada na vida quotidiana para a medição de volumes de produtos líquidos como água, refrigerantes, detergentes, perfumes, etc. e também para indicar a capacidade de certos objectos, como, por exemplo, de um balde, da bagageira de um carro ou de uma arca frigorífica. Embora o SI permita, desde 1964, a utilização do litro como uma outra designação do decímetro cúbico, é desaconselhado o seu uso quando se pretenda exprimir medidas de volume de alta precisão.

O litro é simbolizado pela letra l (minúscula) ou L (maiúsculo). Dado que o SI apenas permite o uso de maiúsculas para denotar unidades cuja designação derive de nomes próprios, a autorização do uso do carácter L maiúsculo deveu-se à dificuldade de distinguir os caracteres impressos do algarismo 1 e da letra l. Deste modo, em 1979, na 16ª

CGPM, com a finalidade de eliminar esta potencial confusão foi autorizado o uso da letra maiúscula L para designar o litro[25].

Quando tomamos o litro para unidade de volume, os seus múltiplos e submúltiplos formam-se segundo uma relação decimal com o litro, isto é, cada um dos múltiplos do litro equivale a 10 das unidades imediatamente inferiores e cada um dos submúltiplos equivale à décima parte das unidades imediatamente superiores. Assim, os nomes dos múltiplos e submúltiplos do litro indicam, de forma imediata, a sua relação com a unidade de base. Isto é, um litro contém dez decilitros, cem centilitros e mil mililitros e o quilolitro contém dez hectolitros, cem decalitros e mil litros (quadro 6).

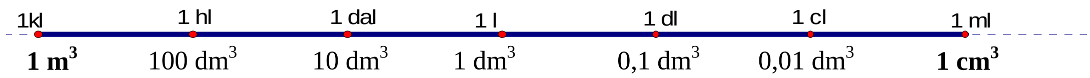
Quadro 6 – Múltiplos e submúltiplos do litro

	Prefixo/símbolo	Nome/símbolo da unidade	Equivalência à unidade base
Múltiplos	**quilo** **k**	quilolitro kl	1 kl = 10^3 l
	hecto **h**	hectolitro hl	1 hl = 10^2 l
	deca **da**	decalitro dl	1 dal = 10 l
Unidade de base:	**litro**	**l ou L**	
Súbmúltiplos	**deci** **d**	decilitro dl	1 dl = 10^{-1} l
	centi **c**	centilitro cl	1 cl = 10^{-2} l
	mili **m**	mililitro ml	1 ml =10^{-3} l

Sempre que um volume estiver referido ao litro e pretendermos exprimi-lo em metros cúbicos ou vice-versa, há apenas que atender à definição do litro como um volume equivalente ao decímetro cúbico e à relação entre o metro cúbico e os seus múltiplos e submúltiplos (ou seja, ao facto de cada unidade de volume ser mil vezes maior que a sua imediatamente inferior e mil vezes menor do que a sua imediatamente superior). Resulta imediato concluir que, sendo o litro igual a um decímetro cúbico, ou seja, igual à milésima parte do metro cúbico, então um mililitro é equivalente a um centímetro cúbico e um metro cúbico é equivalente a mil litros ou um quilolitro (figura 16).

[25] Em algumas obras é referido que a designação do litro seria uma homenagem a Claude Émile Jean-Baptiste Litre, cientista ligado à criação do sistema métrico francês e cuja família teria comercializado vinho numa garrafa que levava o seu nome. Contudo, esta história parece não ter fundo de verdade, tendo sido posta a circular como justificação para o uso de uma letra maiúscula para simbolizar o litro.

Figura 16 – Relação entre o litro e o decímetro cúbico



Ou seja,

$$1\ \text{l} = 0{,}001\ \text{m}^3$$

1 kl = 1 m^3

$$1\ \text{dl} = 100\ \text{cm}^3$$

1 hl = 100 dm^3

1 cl = 10 cm^3

1 dal = 10 dm^3

1 ml = 1 cm^3

Finalmente, há que referir a subsistência do uso do estere (ou estéreo), unidade equivalente ao metro cúbico, e dos seus múltiplos e submúltiplos (e.g. decastere[26] ou o decistere[27]) como unidades para a medição de volumes de madeira em carpintarias e em fábricas de pasta de papel. Apesar do seu uso ser muito habitual nas actividades referidas, é aconselhado o seu abandono e a sua substituição por unidades do SI.

[26] Igual a dez esteres.
[27] Equivalente à décima parte do estere

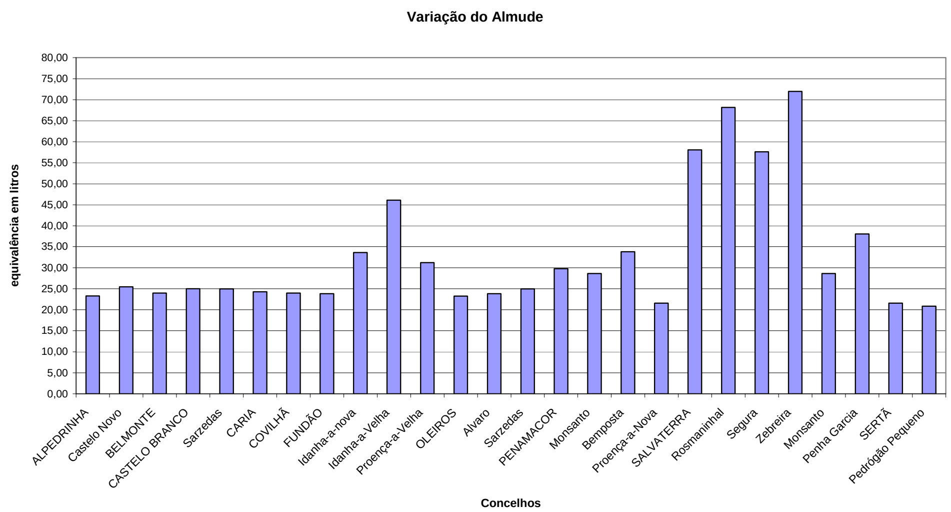
4.2. Notas históricas

Em Portugal, os primeiros reis, ao mandarem povoar ou repovoar território conquistado aos mouros, tomaram algumas medidas políticas que terão contribuído para uma total falta de uniformidade na medição de volumes em território nacional por mais de seis séculos (Trigoso, 1815). Por exemplo, D. Afonso Henriques atribui medidas pequenas às terras que fazia povoar de novo, diminuindo, de forma indirecta, os tributos pagos ao Rei. Porém, deixa em aberto a possibilidade de, se necessário, alterar as medidas e não legisla sobre as unidades que os Senhores das terras devem usar nem o seu valor. Para se compreender o impacto social desta situação importa situarmo-nos numa época em que a terra era a grande fonte de riqueza, razão pela qual a medição do volume de cereais, vinho ou azeite produzidos envolvia interesses de ordem económica e política. Se, por um lado, o rei cobrava os tributos aos proprietários das terras em géneros, por outro, estes últimos cobravam tributos aos camponeses. Ora, os primeiros forais portugueses, ao não definirem de forma clara as dimensões e formas dos recipientes usados na medição, deixavam a possibilidade de o rei alterar, a qualquer momento, as medidas com que cobravam os impostos. Muitos proprietários, por sua vez, aproveitavam-se desse facto, adulterando, no seu próprio interesse, as dimensões dos padrões das medidas. Os abusos sucedem-se e os padrões usados tornam-se gradualmente diferentes de região para região e de lugar para lugar. O povo sente-se lesado nos direitos pagos ao Rei e nas rendas pagas aos proprietários das terras e, nas Cortes de Lisboa (1352) queixa-se, pela primeira vez, da desigualdade das medidas de capacidade (ou seja dos padrões usados para a medição de volumes). Em 1361, D.Pedro I manda aferir os padrões de capacidade pelos de Lisboa e Santarém, padrões que, na opinião vários autores (Pinto, 1983; Lopes, 1849; Trigoso, 1815), seriam de grande capacidade, a tal ponto que, nas Cortes de Lisboa de 1372, o povo pede o retorno às medidas concedidas por foral. Sucedem-se uma série de medidas que mais não conseguem do que suscitar o desagrado daqueles que vêem as suas medidas pequenas serem substituídas por outras maiores.

Em finais do século XV, o aumento crescente das trocas comerciais reforça a importância e a premência da uniformização dos sistemas de pesos e medidas usadas no reino. O tempo impõe a uniformização.

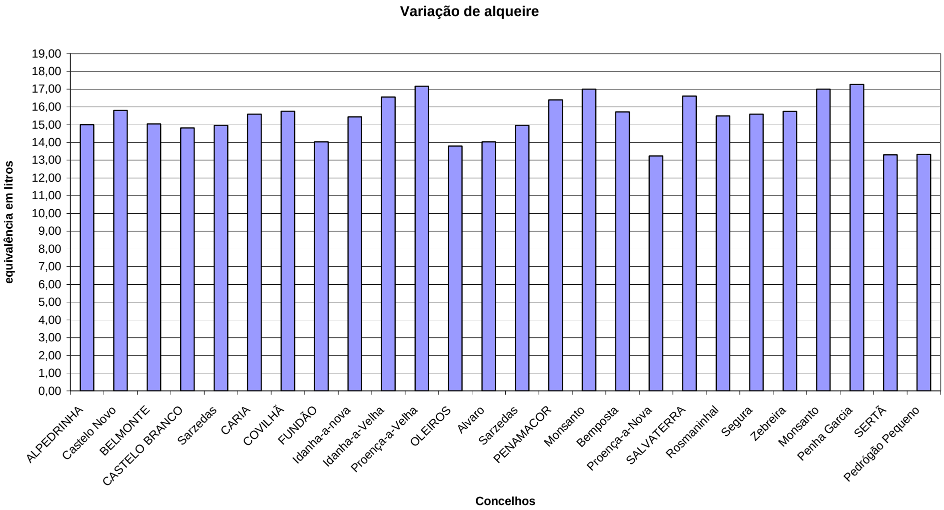
Ainda que as ordenações manuelinas (1499[28]) impusessem os padrões de volume/capacidade da cidade Lisboa como aqueles por que todo o Reino deve medir[29], o que é certo é que as disposições tomadas não conseguiram resolver o gravoso problema social e económico de falta de uniformidade. Atente-se nos gráficos apresentados nas figuras 17 e 18, no quais se pode observar a variabilidade das capacidades dos padrões do almude e do alqueire no início do século XIX em concelhos do distrito de Castelo Branco[30]. Trigoso (1815, p. 372) avança, como principal razão, os defeitos inerentes a algumas legislações: "Como se não determinaram dimensões fixas para os diferentes padrões, foram muito variadas as que lhe deram os fundidores, que até os fabricaram com diversas figuras (…) todos os de secos são de forma quadrangular, mas quase sempre o fundo é mais estreito do que a boca, os lados mais altos nuns que noutros e é rara a vez em que formam ângulos rectos (…) as medidas de líquidos são ainda mais imperfeitas, nalguns sítios têm a forma de um cântaro bojudo, noutras um cilindro muito desigual e (…) a sua face interna é muito defeituosa". Ou seja, a falta de regulamentação sobre a forma/configuração e dimensões interiores dos padrões surge como a grande responsável por uma situação que se prolongou até, pelo menos, ao último quartel do século XX (Pinto, 1983).

Figura 17 – Variação das capacidades dos padrões do almude, unidade de medida de volume para secos, no início do século XIX em concelhos do distrito de Castelo Branco



[28] Publicadas em 1521.
[29] Imposição reforçada pela Lei de Almeirim, promulgada por D. Sebastião em 1575 e pelas ordenações filipinas em 1603.
[30] Gráficos elaborados com base em dados apresentados por Lopes (1849, p. 82 a 147).

Figura 18 – Variação das capacidades dos padrões do almude, unidade de medida de volume para líquidos, no início do século XIX em concelhos do distrito de Castelo Branco



Este problema, partilhado com outras nações europeias, parecia interessar a alguns, como é notado por Trigoso (1815, p.338, 339):

> Diz-se porém que nesta mesma diferença de medidas acham alguns mercadores um lucro, de que seriam privados se a não houvesse“ e acrescenta, referindo-se às enormes diferenças entre as medidas de capacidade, “o trigo faltaria muitas vezes nas cidades se o ganho que se pode fazer de um lugar para outro sobre a diferença das medidas, não excitasse a cobiça das pessoas que vão buscá-lo longe, seguros de achar quando o venderem uma vantagem, de que ficariam privados se as medidas fossem iguais em toda a parte.

Outro aspecto curioso dos antigos sistemas de unidades de volume tem a ver com o hábito de usar unidades diferentes para medir o volume de sólidos e líquidos e, dentro destes últimos, de diferenciar as unidades de medida do azeite e do vinho[31]. São disso testemunha os livros de Aritmética publicados em Portugal nos séculos XVI e XVII. Por exemplo, Ruy Mendes (1540) refere o alqueire, o meio-alqueire, a quarta e a oitava como unidades de medida para o azeite e o almude, o meio-almude, a canada, a meia-canada, o quartilho e o meio-quartilho para o vinho. É a lei de Almeirim que impõe uma nova mentalidade relativamente à medição do volume de líquidos, determinando que o azeite passe a ser medido pelas medidas do vinho. Imposição que se reflecte nos textos das aritméticas portuguesas: “O azeite se mede pela medida do vinho” (Pacheco, 1624, fl. 18). Na figuras 19 reproduzem-se duas aguarelas ilustrativas dos padrões de D. Sebastião para

[31] Ainda hoje, persiste o hábito de usar uma unidade de volume de líquidos diferente da usada para sólidos. Estamos a referir-nos ao litro e aos seus múltiplos e submúltiplos, frequentemente usados para indicar o volume de líquidos como detergentes, perfumes, águas, etc.

líquidos e secos. Note-se as diferentes configurações dos mesmos e a presença da rasoura nos padrões para secos, imposta após um período de alguma indefinição/permissividade relativamente ao seu uso (Trigoso, 1815).

Figura 19 – Ilustração dos padrões de D. Sebastião para a medição de volume de líquidos e secos (Gomes, 1940)

No último quartel do século XX, em Portugal, em pequenas transacções comerciais, na avaliação que foi feita dos produtos da lavoura, ou ainda no pagamento de promessas aos santos da sua devoção, ao pároco ou ao barbeiro, continuavam a ser utilizados, entre a população rural muitos dos nomes das antigas medidas (Pinto, 1983, p. 404). Por exemplo, o alqueire, como unidade de medida de secos e de azeite, ou a fanga que designava uma medida de quatro alqueires de cereal, persistiam em uso em várias localidades do distrito de Castelo Branco[32] (ob. cit.) (figura 20).

Figura 20 – Padrão do meio alqueire e medição tradicional do volume do milho com rasoura

[32] Muitas das antigas nomenclaturas tiveram a sua origem em antigas medidas romanas e árabes, muitas outras designaram, na origem, o recipiente com que se procedia à medição, tais como cântaro, selamim (vaso de barro), canada (vaso ou pote, originariamente feito de cana), cabaço, tacho, panela, pote ou teiga (espécie de cesto, bolsa de viagem). Por exemplo, no distrito de Castelo Branco, a quarta parte do alqueire era também conhecida por panela (Pinto, 1993, p. 556 a 557).

Uma última palavra cabe à adopção das unidades de volume do sistema métrico francês em Portugal. Em 1868, 16 anos após a adopção do sistema métrico decimal no nosso país, são impostas, no nosso país, as novas medidas de volume com a nomenclatura francesa. Particularmente digno de nota, foi o aparecimento e a rápida difusão de uma unidade referida por *deca*, forma abreviada e popular de decalitro, cuja principal área de implantação se terá centrado no Alentejo e nas Beiras e cuja utilização, especialmente como medida de azeite, permite associar a difusão do novo termo/unidade com os circuitos da comercialização daquele produto (Pinto 1983, p. 554). Refira-se que, ainda hoje, nos lagares tradicionais da Beira-Baixa se continua a ouvir referências à deca, com o significado de dez litros.

Figura 21 – Configuração dos recipientes para a medição do azeite em lagares tradicionais da Beira Baixa

Figura 22 – Padrão da *deca* com marca de aferidura

Uma última nota respeita à adopção, pelo SI, do litro como unidade de volume. O litro, originariamente definido como um vaso de forma cúbica, de aresta igual à décima parte do metro, foi objecto de redefinição em 1901. Definido, a partir daí, como o volume ocupado pela massa de um quilograma de água pura à temperatura em que atinge a sua máxima densidade (4º C / 277º K) e à pressão atmosférica normal, cedo se descobriu que o litro era ligeiramente maior que o decímetro cúbico. Para evitar confusões entre o litro e o decímetro cúbico, a 12ª CGPM, realizada em 1964, aboliu a definição de litro e aceitou o uso do termo litro como sinónimo de decímetro cúbico.

4.3. Aspectos Didácticos

De entre os objectivos curriculares transversais a todo o ensino básico, destaca-se a compreensão dos conceitos de volume e capacidade, bem como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre esses conceitos na resolução e formulação de problemas. Ora, tal como referem Ponte e Serrazina (2000), é importante distinguir, claramente, os atributos capacidade e volume, pois as crianças têm dificuldade em separar o volume de um objecto da sua capacidade. Assim, deve-se salientar que a capacidade está associada a objectos contentores e, através da realização de actividades experimentais, fazer notar que a capacidade de um objecto contentor pode ser entendida como a quantidade máxima de líquido, gás ou sólido que este objecto pode conter. A realização de actividades práticas de comparação e ordenação[33] de capacidades (será desejável que exista pelo menos um par de recipientes equivalentes, mas com formas diferentes) é um requisito para a construção do conceito de capacidade como um atributo/propriedade mensurável de objectos contentores como garrafas, chávenas, copos, etc.

A medição da capacidade de um recipiente utilizando unidades não estandardizadas deve preceder, como na medição de outras grandezas, as experiências de medição com as unidades estandardizadas. Algumas das dificuldades colocadas pela utilização de unidades não *standard* podem ser evidenciados explorando, por exemplo, uma receita de culinária cujos ingredientes principais são medidos em chávenas (mas que tipo de chávenas? Chá? Café? Almoçadeiras?).

A compreensão da grandeza volume requer que as crianças a associem ao espaço ocupado por um corpo, o que poderá acontecer envolvendo as crianças em experiências práticas. Por exemplo, adequam-se experiência que envolvam a introdução de sólidos de forma irregular e insolúveis em recipientes com água e que permitam visualizar a subida da água após a introdução do sólido. Esse tipo de recipientes não devem, até à introdução das unidades do SI, ser graduados, sendo recomendável usar, por exemplo, marcadores de cores diferentes para assinalar o nível da água antes e após a introdução do sólido. Este tipo de experiência permite não só reconhecer o volume de um sólido (espaço ocupado

[33] Usando expressões como “contém tanto como”, contém mais do que”, “contém menos do que”.

pelo sólido) como um atributo/propriedade desse sólido, como também comparar entre si, volumes de sólidos diferentes.

<u>Distinção entre capacidade e volume</u>

Alguns exemplos podem ajudar a ilustrar a diferença entre os conceitos de volume e capacidade. Um dos mais simples pode ser fornecido por uma garrafa de água ou sumo, cujo volume é o espaço ocupado pela garrafa numa lancheira, enquanto a capacidade é a quantidade máxima de líquido que a garrafa pode conter. É também oportuno salientar que a bebida por si tem volume (mas que necessita de um contentor para ser medido) enquanto que a garrafa, como contentor, tem capacidade (Hopkings et. al., 1998). Nesse sentido, a resolução de problemas que envolvam a medição de um determinado volume, usando para o efeito recipientes não graduados mas de capacidades conhecidas, pode contribuir para a distinção dos dois conceitos. É disso exemplo o seguinte problema histórico proposto por Nicolas em 1519[34]:

> Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 canadas de vinho numa cabaça e outro levava 8 canadas de vinho em duas cabaças, cinco canadas de vinho numa e três na outra. Beberam o vinho da cabaça grande que tem 8 canadas e querem se separar e dividir o vinho das outras duas cabaças, cinco numa e três na outra. Querem que nenhum deles leve mais vinho do que o outro, ou seja que cada um leve 4 canadas e não têm medidas nenhumas. Ora eu pergunto de que maneira devem cambar o vinho de uma das cabaças para as outras para que nenhum vá enganado[35].

A questão do problema consiste em saber como dividir ao meio uma certa quantidade de água (ou seja, como medir um volume de 4 *canadas*) utilizando, para o efeito, três recipientes cujas capacidades não permitem, de forma imediata, obter a quantidade de água desejada. Trata-se portanto de um problema que permite discutir com os alunos as diferenças entre os conceitos de capacidade e volume, mas também explorar a interrelação entre os dois conceitos, nomeadamente ao nível das unidades usadas na medição de volume/capacidade. Nomeadamente, deve ficar claro para os alunos que o problema refere três cabaças, uma com capacidade de 8 *canadas*, outra com capacidade de

[34] O problema é supostamente bem mais antigo. Consta, pelo menos, num manuscrito de Pacioli escrito em finais do século XIV.
[35] Adaptado de Nicolas (1519, fol. 51v).

5 e a terceira com capacidade de 3 *canadas* e que isso é sinónimo de dizer que o volume interior de cada uma das cabaças é de, respectivamente, 8, 5 e 3 *canadas* (ou seja, são necessárias 8, 5 e 3 *canadas* de água para encher as cabaças). A *canada* surge, no problema, como uma unidade de volume convencionada e, simultaneamente como uma unidade de capacidade. O facto do termo *canada* ser desconhecido pode causar-lhes alguma confusão, pelo que deve ser apresentada como uma antiga unidade não estandardizada. Assim, o problema deve ser resolvido com recurso a materiais que o permitam modelar e, simultaneamente, explorar os conceitos matemáticos modelados.

Outro problema histórico passível de exploração no 1º CEB e que pode contribuir para a compreensão dos conceitos de capacidade, de volume e unidade de volume é o seguinte:

> Um homem emprestou a outro uma arca cúbica cheia de trigo, cujas arestas mediam 10 palmos. Ora este homem deixou cair a arca por uma escada abaixo e quebrou-a. Quer pagar o trigo, mas não tem senão uma arca de 5 palmos, também cúbica. Ora eu pergunto: quantas vezes lha dará cheia?[36]

Unidades de volume SI

A construção do cubo com um decímetro de aresta e cujas faces têm, portanto, uma área igual a um decímetro quadrado permite concretizar uma das unidades de volume do SI e é apontada explicitamente no Programa como uma experiência de ensino e aprendizagem a proporcionar aos alunos - “construir o decímetro cúbico a partir do decímetro quadrado” (ME, 2004). O trabalho de construção desta unidade de volume e, eventualmente, do metro cúbico permite também ao aluno construir conhecimento sobre o tamanho aproximado de uma unidade padrão de volume, condição necessária para que este possa vir a fazer estimativas do volume de um corpo/sólido.

O litro deve ser introduzido como o volume interior de um recipiente cúbico aberto com um decímetro de lado (medida da sua aresta interior), de modo a que os alunos percepcionem que as unidades não são arbitrárias e que, por detrás de cada uma delas, existe uma definição que permite construir padrões dessas unidades. Ainda que a equivalência entre o litro e o decímetro cúbico não seja objecto do programa do 1º ciclo do

[36] Adaptado de Nicolas (1519, fol. 88v).

ensino básico, esta actividade cria as bases para o seu estabelecimento posterior. Deste modo, torna-se claro que a capacidade é medida nas mesmas unidades que o volume. Dizer que a capacidade de um copo de água é 22 cl, é sinónimo de dizer que contém 22 cl de água quando está cheio até à borda ou, dito de outro modo, que o volume máximo de água que pode conter é de 22 cl (ou 2,2 cm^3), independentemente da espessura do vidro do copo.

Tal como com outras unidades do sistema internacional, é importante a chamada de atenção para a representação simbólica do litro, com a peculiaridade de ser permitido o uso do l minúsculo ou do L maiúsculo. Alguns rótulos de produtos de consumo corrente ilustram bem a coexistência das duas notações.

Instrumentos de medida de volumes

Uma vez que a medição de volumes de certos objectos (um pedaço de metal, uma pedra ou outros objectos impermeáveis) se pode fazer recorrendo a vasilhas graduadas (com uma escala impressa na parede do reservatório) e que importa desenvolver competências para a sua utilização, uma tarefa a propor após a introdução do decilitro pode ser a de graduar uma garrafa vulgar de plástico (ou mesmo um copo) em decilitros através da adição sucessiva da água contida num decilitro (os alunos poderão previamente estimar quantos contentores de 1dl são necessários para encher a garrafa /copo, não esquecendo de confrontar, no final, essa estimativa com o valor obtido). Este “copo graduado” pode ser usado para medir o volume (ou obter valores aproximados de volumes) de objectos ou para medir a capacidade de outros recipientes.

Nas actividades práticas deve fazer-se uso considerável da estimação, encorajando os alunos a aprender as capacidades de alguns objectos de referência (copo de água, chávena de café, colher de sopa, colher de sobremesa).

O desenvolvimento de competências e da compreensão dos conceitos e processos relacionados com a medição de capacidade deve passar pelo envolvimento dos alunos em actividades de aprendizagem com significado para o aluno, isto é, privilegiando situações problemáticas ligadas ao seu quotidiano, isto é, em que as medições são feitas para dar resposta a problemas concretos. Nelas se incluem situações relativas a outras áreas do currículo como sejam, por exemplo, as ligadas à Educação Física. Têm particular importância a escolha de situações que relevem a aprendizagem da redução de unidades, para que esse processo não se reduza a uma mera mecanização de procedimentos.

5. Massa

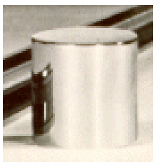
5.1. Conceito e unidades SI

A grandeza massa refere-se à quantidade de matéria que um corpo contém e é conceptualmente distinta da grandeza peso. Por exemplo, à superfície da Terra a massa de um corpo não se altera se mudarmos de local, mas o peso, que é a resultante da força da gravidade exercida sobre esse corpo depende do local em que o corpo se encontra.

Deste modo, termos como peso e pesar, usados, corrente e frequentemente, no dia-a-dia, referem-se, respectivamente, à massa (ou a um padrão de massa) e à medição da massa de um corpo. A utilização destes termos, embora incorrecta do ponto de vista científico, poderá justificar-se por durante muitos séculos não se ter revelado importante a distinção das grandezas massa e peso, enraizando-se o seu uso indistinto nas mais variadas actividades.

Para se medir a massa é necessário escolher um objecto cuja massa é tomada como unidade e usar um instrumento - a balança - que permita comparar as duas massas e exprimir numericamente a relação entre elas.

Figura 23 – Protótipo internacional do quilograma[37]



Actualmente, as unidades de base do SI são definidas em termos de constantes ou fenómenos físicos, considerados como invariantes e reprodutíveis com grande precisão. A única excepção é a unidade de massa, o quilograma, que continua a ser definida por um protótipo ou artefacto, construído em 1880 numa liga de 90% platina e 10% irídio, conhecido por protótipo internacional do quilograma (figura 23). Esse protótipo é a

[37] www1.bmp.org

materialização física da unidade base de massa do SI. O facto de medições rigorosas revelaram que este perdeu cerca de 50 microgramas nos últimos 100 anos, tem levado os cientistas a procurar uma nova definição para a unidade de massa que seja independente de um padrão físico da unidade.

Figura 24 – A grandeza massa no SI

Grandeza → Massa

Unidade SI → Quilograma

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de base de massa é o quilograma, simbolizado por **kg** e definido como:

Símbolo da unidade

O **quilograma** é a massa do protótipo internacional do quilograma, depositado no *Bureau International des Poids et Mesures.*

Múltiplos e submúltiplos da unidade base

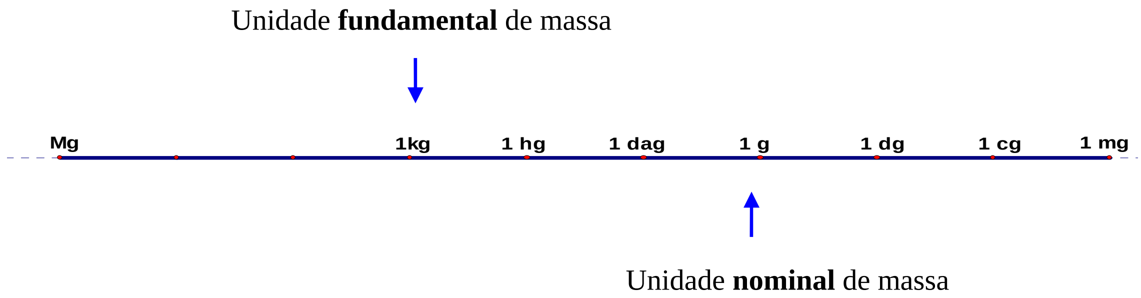
O quilograma apresenta a peculiaridade de ser, no SI, a única unidade cujo nome é uma palavra formada por prefixação a partir de *grama* e do prefixo *quilo* (*quilo*-+*grama*). Nesse sentido, sendo a palavra quilograma formada por derivação prefixal e não sendo permitido, no SI, o uso de duplos prefixos, uma nota particularmente importante diz respeito à formação dos nomes dos múltiplos e submúltiplos da unidade de base de massa - o quilograma[38].

Por convenção, a formação dos múltiplos e submúltiplos do quilograma não se formam com esta unidade, mas sim antepondo o prefixo adequado à palavra grama (figura 25). Tal como sugere Fradesso da Silveira: “a unidade nominal das medidas de peso[39] é o grama, embora a unidade de base seja o quilograma” (Silveira, 1856, p. 38). Ou seja, os múltiplos e submúltiplos da unidade de base SI - *quilograma* - são formados antepondo à palavra grama os prefixos convencionados pelo SI. Para os múltiplos do quilograma usam-

[38] Esta situação constitui uma excepção à regra, cuja justificação se apresenta na nota histórica
[39] Note-se que, ao tempo, a grandeza massa era designada por peso.

se os prefixos *mega*-, *giga*-, *peta*-, etc. e para os submúltiplos usam-se os prefixos *hecto*-, *deca*-, *deci*-, *centi*-, *mili*-, *micro*-, etc. No quadro 7 apresentamos a formação dos nomes e símbolos de algumas das unidades de massa do SI e no quadro 8 alguns múltiplos e submúltiplos da unidade de base.

Figura 25 – O grama na formação dos múltiplos e submúltiplos da unidade SI de massa



Quadro 7 – Formação nominal das unidades de massa do SI

Prefixo/símbolo	**Nome/símbolo da unidade**
quilo k	quilograma kg
hecto h	hectograma hg
deca da	decagrama dag
Unidade nominal de massa:	**grama g**
deci d	decigrama dg
centi c	centigrama cg
mili m	miligrama mg

Portanto, sendo o quilograma a unidade de base do SI, quando exprimimos o resultado de uma medição de massa por intermédio de um número decimal, o primeiro algarismo decimal representa hectogramas, o segundo decagramas, o terceiro gramas, o quarto decigramas e assim sucessivamente. Por exemplo, 3,456 kg (lê-se três quilogramas e quatrocentos e cinquenta e seis milésimas) contém 3 quilogramas, 4 hectogramas, 5 decagramas e 6 gramas.

Quadro 8 – Múltiplos e submúltiplos da unidade de massa do SI

	Prefixo/símbolo	Nome / símbolo da unidade	Equivalência à unidade de base
Múltiplos	**peta** **T**	petagrama Pg	1 Tg = 10^{15} kg
	tera **T**	teragrama Tg	1 Tg = 10^{12} kg
	giga **G**	gigagrama Gg	1 Gg = 10^{6} kg
	mega **M**	megagrama[40] Mg	1 Mg = 10^{3} kg
Unidade de base:	**quilograma**	**kg**	
Sumúltiplos	**hecto** **h**	hectograma hg	1 hg = 0,1 kg = 10^{-1} kg
	deca **da**	decagrama dag	1 dg = 0,01 kg = 10^{-2} kg
		grama g	1 g = 0,001 kg = 10^{-3} kg
	deci **d**	decigrama dg	1 dg = 0,0001 kg = 10^{-4} kg
	centi **c**	centigrama cg	1 cg = 0,00001 kg = 10^{-5} kg
	mili **m**	miligrama mg	1 mg =0,000001 kg = 10^{-6} kg

Outras unidades de massa

A tonelada, dado o seu uso muito generalizado nas mais variadas actividades económicas, não sendo uma unidade SI, enquadra-se num conjunto de unidades cujo uso é permitido pelo SI para exprimir grandes massas. A tonelada é equivalente a mil quilogramas.

O quintal métrico (100 kg) é outra unidade de massa ainda hoje utilizada, porém, o SI desaconselha vivamente o seu uso e sugere o seu abandono.

Sobre conceitos de massa e peso

Os termos massa e peso designam grandezas diferentes, embora relacionadas entre si, que são frequentemente confundidas. Enquanto o primeiro diz respeito à quantidade de matéria de um corpo, o segundo respeita a uma força exercida pela Terra, sobre o corpo.

[40] Mais usualmente designado por tonelada

Embora a longevidade do uso do termo peso possa ser justificada historicamente[41], o certo é que a primeira distinção entre massa e peso remonta a Sir Isaac Newton (1642 - 1727) e que o peso e a massa são actualmente grandezas bem distintas.

Em 1901, no âmbito da 3ª CGPM, numa declaração relativa à unidade de massa e à definição de peso pode ler-se: considerando a necessidade de pôr fim à ambiguidade existente sobre o significado da palavra peso, usado algumas vezes para massa, e outras para a força mecânica, declara-se: "O quilograma é a unidade de massa, é igual à massa do protótipo internacional do quilograma; o termo "peso" designa uma grandeza da mesma natureza que uma força; o peso de um corpo é o produto da sua massa pela aceleração da gravidade, em particular, o peso standard ou normal de um corpo é o produto da sua massa pela aceleração standard ou normal da gravidade"[42].

[41] Relembre-se que os programas de matemática para o actual 1º ciclo do ensino básico em vigor em Portugal até 1991 utilizavam a terminologia peso.
[42] Tradução livre de www.bimp.org

5.2. Notas Históricas

Escrevia Trigoso em 1815: "O Kilogramma (…) não é propriamente a unidade do Sistema métrico Francês, mas sim uma milésima parte desse Kilogramma, a qual por isso se chamou simplesmente Gramma" (1815,p. 390 e 391).

De facto, a unidade de massa (na altura designada por peso) proposta inicialmente pelo Comité dos Pesos e Medidas, foi denominada de *grave* (termo derivado do latim *gravis*, significando pesado, carregado) e definida como o 'peso' de um decímetro cúbico de água à temperatura da sua máxima densidade (Katz, 1998). A determinação da massa do grave envolveu experiências muito delicadas, nas quais Lavoisier terá estado profundamente envolvido. Na sequência desses trabalhos foram, aliás, construídos quadros de conversão das antigas unidades regionais de massa, grandeza ao tempo ainda designada por peso, para a nova unidade – o *grave* (Katz , 1998, p. 639).

Mas apesar dos avanços dos trabalhos, viviam-se em França, tempos muito conturbados e em 1793 o novo governo republicano extinguiu a Academia das Ciências e expulsou alguns destacados membros do Comité de Pesos e Medidas, entre eles Lavoisier que, aliás, pouco tempo depois foi condenado à morte (Boyer, 1991). Refira-se, a título de curiosidade, que a ideia de um *sistema decimal de pesos e medidas* foi da responsabilidade de Simon Stevin (1548-1620), mas só os ideais da revolução francesa a tornaram viável (Struik, 1980).

Argumentando que muitas das medições de massa da época diziam respeito a unidades muito mais pequenas que o *grave*, o governo decidiu alterar a unidade de massa. À nova unidade deram o nome de grama. Contudo, se grandes tinham sido as dificuldades envolvidas na determinação da massa do quilograma, maiores seriam para o grama. Daí a justificação do primeiro protótipo oficial da unidade base de massa do sistema métrico francês, depositado em Junho de 1799 nos Arquivos Nacionais Franceses, ter sido o do quilograma. "O *Kilo-gramma* não é propriamente a unidade do Sistema métrico Francês (…) foi com o Kilo-gramma, e não com o Gramma, que realmente se fizeram as experiências de determinar a unidade de peso" (Trigoso, 1815, p. 391).

Só em 1875, na Conferência Diplomática do Metro, se acordou que a unidade base de massa deveria ser o quilograma, definição sancionada na 1ª CGPM (Conferência Geral de Pesos e Medidas) realizada em 1889. Materializado num novo padrão, fabricado numa liga de platina e irídio, e de massa tão próxima quanto possível da do Quilograma dos Arquivos, é, desde então, o padrão da unidade de massa.

Um aspecto particularmente curioso das primeiras tentativas de introdução do Sistema métrico Francês em Portugal é precisamente o facto de se ter escolhido como unidade de base para a massa, uma unidade denominada de *canada*, correspondente a uma *mão travessa cúbica* de água, considerada equivalente ao quilograma francês. Diz Trigoso (Trigoso, 1815, p. 391), membro da Comissão encarregue de apresentar a primeira proposta para a adopção do novo sistema de unidades em Portugal

> Esta pequena alteração[43], que nada influi essencialmente no Sistema, e que de alguma sorte é bem fundada, foi com o Kilo-gramma, e não com o Gramma, que realmente se fizeram as experiências de determinar a unidade de peso

Como já foi referido anteriormente, essa Comissão teve a ideia de relacionar as unidades de massa e de volume com a unidade fundamental de comprimento escolhida. Baseada no argumento de que escolher "a mesma unidade para todas as qualidades de medidas é mais simples e proveitosa", propõe-se:

> A centésima milionésima parte do quarto de Meridiano é a unidade de extensão, a que chamamos *mão travessa*. Esta *mão travessa cúbica* é a unidade de capacidade que chamarmos *canada*, e o peso de água destilada desta mesma *mão travessa cúbica* é a unidade de pesos a que chamamos *libra* (Lopes, 1849, p. 14).

Em Portugal, uma das primeiras determinações legais no que concerne à medição de massa, terá sido a ordenação da construção dos 'pesos' em ferro. Em 1361, D. Pedro I, ciente da manutenção do uso de 'pesos' de pedra para pesar produtos como a carne, a lã e o linho, reforça a proibição do seu uso feita pelos seus antecessores. Porém, esta medida não terá sido nem bem aceite, nem seguida pelo povo. Com efeito, uma certa predilecção popular por um certo padrão de massa usado na pesagem da carne, levou mesmo o monarca a revogar a decisão, continuando a permitir o uso do arrátel conhecido por folforinho[44] (Trigoso, 1815).

---

[43] O autor refere-se ao facto de, em Portugal, estar a ser proposta a adopção como unidade de base, a mão travessa cúbica, equivalente ao quilograma e não ao grama (unidade de base do sistema francês).

[44] Designação devida talvez ao facto da pedra usada no fabrico dos padrões ser a mesma que era usada no fabrico das mós dos moinhos (pedra de natureza siliciosa), mós essas que poderiam ser designadas por fulfurinhas, termo derivado do latim furfur, significando 'farelo' (Trigoso, 1815, p. 353).

Figura 26 – “Pesos” em pedra e em ferro

Vários autores referem que foi a partir das Ordenações Manuelinas de 1499, editadas na sua versão definitiva em 1521, que se conseguiu fixar o sistema de unidades de massa que se usaram em Portugal até à adopção do sistema métrico decimal (Trigoso, 1815; Lopes, 1848; Marques de Almeida, 1994). Podemos observar na figura 27, duas aguarelas que representam os «jogos de pesos» mandados construir, na Flandres, por D. Manuel e que terão sido distribuídos por todas as comarcas de Portugal a fim de se proceder, mais rapidamente, à aferição e uniformização das unidades de massa. Como as duas imagens ilustram, estes jogos eram constituídos por uma caixa profundamente trabalhada e decorada com as armas de D. Manuel I (Gomes, 1940). Essa caixa contém uma pilha de peças com forma tronco-cónica, encaixáveis umas nas outras, e cujas massas, em conformidade com o sistema de unidades instituído (quadro 9), representam submúltiplos, segundo potências de dois, da caixa padrão. A imposição de uma relação binária entre as diferentes unidades de massa é um aspecto particularmente curioso do novo sistema de unidades de massa (manuelino).

Quadro 9 – Sistema de Unidades de Massa de D.Manuel

1 **quintal**	½ arroba	½ arrátel	½ onça
1/2 quintal	¼ arroba	1/4 arrátel	¼ onça
¼ quintal ou 1 **arroba**	1/8 arroba	1/8 arrátel	1/8 onça
	1/16 arroba	1/16 arrátel ou 1 **onça**	1/16 onça
	1/32 arroba ou 1 **arrátel**		

Figura 27 – Ilustrações dos padrões de massa de D. Manuel (Gomes, 1940)

O marco padrão de arroba, representado na figura 27, é constituído por nove peças. A exterior tem uma massa de 1/2 arroba e as seis peças interiores têm massas de 1/4 de arroba, 1/8 de arroba, 1/16 de arroba, 1/32 de arroba (ou arrátel), 1/64 de arroba, 1/128 de arroba e 1/256 de arroba. Note-se que esta última aparece em duplicado.

É particularmente interessante registar a ideia de construir uma pilha de massas cuja massa da pilha, no seu todo, representa a massa de uma das unidades do sistema. A pilha da figura tem uma arroba de massa:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{256}=1$$

Por outro lado, a massa da caixa exterior (vazia) é igual à massa do conjunto dos elementos interiores. O padrão exterior representado na figura, representa assim, uma meia arroba:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{256}$$

Contudo, é de ressaltar que, na Casa da Índia, continuaram a utilizar-se, pelo menos até ao século XIX (Trigoso, 1815), os “pesos velhos”, também conhecidos por “pesos pequenos”, pelo facto das suas massas serem significativamente menores do que as unidades correspondentes, do novo sistema:

> Por este quintal pequeno entrega Sua Majestade na Casa da Índia a pimenta, o gengibre e outras drogas que vende. E para a reduzir ao peso grande se faz ajuntando-lhe a sétima parte de si mesmo. E para de grande fazer pequeno se lhe abate a oitava parte (Pacheco, 1624, fl. 16v).

Também Duarte Barbosa (1516, citado em Trigoso, 1815) aponta no mesmo sentido, explicitando que cada quintal velho são três quartos e meio (ou seja, sete oitavos) do quintal novo.

Em livros de aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1624 (Almeida, 1994a, 1994b; Pacheco, 1624, Mendes, 1540; Nicolas, 1519), bem como nos Regimentos das Casas da Índia e Minas (Luz, 1992; Peres, 1947) encontram-se algumas informações sobre os dois sistemas de unidades de massa que permitem sustentar que:

(i) A relação numérica entre as diferentes unidades dos sistemas de unidades da Casa da Índia e manuelino apenas difere no número de onças por arrátel, ou seja, o arrátel do «peso velho» divide-se em 14 onças enquanto o do «peso novo» se divide em 16 onças;

(ii) As onças dos dois sistemas de unidades são iguais;

(iii) O quintal do «peso pequeno» é igual a 112 arráteis do sistema manuelino e a arroba do «peso pequeno» é igual a 28 arráteis do Sistema manuelino.

Do referido, sobressai que o novo Sistema de Unidades de «peso» introduzido por D. Manuel permite excepções que se traduzem no uso de unidades mais pequenas para a pesagem da pimenta, do gengibre e outras especiarias comercializadas na Casa da Índia. Tal como acontecia com a medição de sedas, muitos produtos provenientes do Oriente, e deveras apreciados na Europa pelas classes mais abastadas, eram medidos com unidades mais pequenas que as usadas para outras mercadorias.

Qualquer abordagem histórica às unidades de massa não ficaria completa sem uma referência, ainda que breve, ao instrumento através do qual se comparam massas e se efectua a medição: a balança. Apoiados na descoberta de *pesos*, isto é, de padrões de massa, datados da 1ª dinastia Egípcia, os historiadores defendem que o uso da balança com o propósito de pesar remonta, pelo menos, ao 4º milénio antes de Cristo (Smith, 1951). Em meados do 2º milénio a.C., registam-se as primeiras massas marcadas, bem como várias ilustrações de balanças nas paredes murais dos templos egípcios. Outras civilizações como a Babilónica, Grega, Romana e Árabe usaram e aperfeiçoaram a balança, sobretudo para fins comerciais e medicinais (ob. cit.).

Figura 28 - Balança em ferro e “pesos” em pedra para a pesagem do linho e da lã[45]

[45] As barras de ferro, nas extremidades dos braços, são designadas por fateixas. São visíveis nas suas extremidades dois ganchos, cuja finalidade é pendurar os padrões de massa, o linho e a lã.

Na Europa da Idade Média, o uso da balança expande-se com a prática da alquimia, mas só o aperfeiçoamento técnico e as exigências da Ciência do séc. XVIII impuseram a necessidade de medir a massa com um elevado grau de precisão e rigor (Paixão, 2002). Lavoisier, um dos mais destacados membros do Comité dos Pesos e Medidas, foi uma das figuras mais marcantes no aperfeiçoamento da balança. Graças à sua imensa fortuna pessoal pôde custear o fabrico de novas balanças, cuja precisão conseguida foi tal que, uma delas, construída em 1788 e paga por 600 libras (cerca de 18 300 euros) podia atingir 10 kg com precisão da ordem de 25 miligramas (Paixão, 2002). Actualmente, algumas balanças apresentam precisão da ordem do micrograma.

5.3. Aspectos Didácticos

A compreensão da grandeza massa, entendida como a quantidade de matéria que um corpo contém, a exemplo de outras grandezas, exige que os alunos sejam envolvidos em experiências práticas de comparação de massas utilizando, para o efeito, uma balança de dois pratos. Dessa comparação deve resultar a compreensão do significado de expressões como “maior massa que”, “menor massa que” e “a mesma massa que”, bem como, é claro, a expressão “em equilíbrio”. Estes são pré-requisitos para a compreensão das noções de massa, de unidade de massa e do processo de medição da massa.

Tal como é salientado no programa de matemática do 1º CEB, a realização de medições de massa com unidades não estandardizadas, deve preceder o uso das unidades do SI e deve permitir compreender a necessidade de subdividir uma unidade em partes iguais bem como as vantagens de unidades estandardizadas.

O quilograma, unidade base de massa, deve ser introduzido através do seu padrão físico e a partir dele podem ser determinadas as massas de algumas embalagens de uso comum (pacote de arroz, de sal, de farinha, …). Essa actividade permite também introduzir massas como o meio quilo e o quarto de quilo (por exemplo equilibrando a balança com um pacote de arroz e dois pacotes de esparguete; com um pacote de esparguete e dois pacotes de massa miúda, …). O recurso a embalagens de uso comum permite também que o aluno desenvolva conhecimento pessoal sobre o tamanho aproximado de uma unidade padrão, condição necessária ao desenvolvimento da aptidão para fazer estimativas. Nesse sentido, o aluno deverá ser encorajado a fazer estimações previamente à actividade de medição e, é claro, à confrontação posterior dos valores estimado e medido.

O quilograma deve também ser definido em termos do seu submúltiplo, o grama. Isto é, o quilograma é igual a 1000 gramas, ou ainda, o grama é a milésima parte do quilograma. Importa ter presente que o grama não é a unidade de base do sistema internacional e que a explicação da razão de ser desse facto, que é histórica, pode contribuir para a compreensão da utilização de um prefixo na formação do nome da unidade de base de massa.

Importa também que as tarefas a propor permitam desenvolver a capacidade de escolher a unidade mais adequada para medir a massa de um determinado objecto.

Uma vez já abordadas as grandezas comprimento, área, volume, capacidade e massa é oportuno debater com os alunos aspectos relacionados com comercialização de determinados produtos em termos da quantidade de uma determinada grandeza. Muitos são os exemplos possíveis de produtos que são vendidos em termos da sua massa (arroz, farinha, fruta, carne, peixe, gomas, …), do seu volume (champô, gel de banho, detergente para a loiça, gasolina, …), do seu comprimento (tecido, rede para fazer uma vedação, …), da sua área (terrenos para construção, propriedades agrícolas, …).

Questões terminológicas

Chama-se a atenção para o facto de, até há bem pouco tempo, ainda se encontrarem em documentos oficiais portugueses para o ensino da matemática expressões como, por exemplo: "Identificar as unidades de peso"; "Relacionar as unidades de peso entre si"; "Relacionação do quilograma com os outros pesos" (MEC, 1980, p. 144). Mesmo em manuais actuais para o 1º ciclo do ensino básico ainda se encontram ambiguidades e contradições na terminologia utilizada.

Como já referido, na linguagem do dia a dia, utiliza-se abusivamente o termo peso como sinónimo de massa. De facto, quando medimos massas ou quando adquirimos algum produto é frequente usarmos ou ouvirmos usar expressões como "*o objecto pesa 1 quilograma*" ou "*o peso do objecto é 1 quilograma*". Este conflito entre linguagem de todos os dias e a linguagem científica pode ser dirimido através da abordagem terminológica a esta grandeza o que coloca a importância da abordagem didáctica da grandeza massa.

Chama-se, em primeiro lugar, a atenção para o facto de, actualmente, os programas oficiais designam por massas marcadas as massas dos padrões das unidades de massa (ME, 2004). As massas marcadas não são mais do que os padrões que usamos para medir/determinar a massa de objectos numa balança, operação que ainda se designa por "pesar". Contudo, parece-nos de evitar tal termo que, por certo, virá a desaparecer, pois nenhuma outra operação de medição tem uma designação particular (referimo-nos simplesmente a medir comprimentos, áreas, volumes, capacidades, tempo, velocidade …). Então, porque não medir a massa? Assim, o primeiro passo para promover o uso de uma terminologia actual e cientificamente correcta deve ser a designação explícita dos padrões que usamos na balança (quilograma, meio quilograma, grama, etc.) como massas marcadas em vez de pesos. Sendo a balança o instrumento usado para medir a massa, o segundo passo, deve ocorrer após o uso da balança de dois pratos na determinação da massa de determinados objectos, chamando a atenção para o facto da balança ficar em equilíbrio colocando num dos seus pratos um pacote de arroz, por exemplo, e no outro uma massa de 1 quilograma. Desta forma, podemos concluir que o pacote de arroz também tem uma massa de 1 quilograma e o aluno deve ser encorajado a dizer “A massa do pacote de arroz é 1 quilograma” (ainda que se reconheça que muita gente diz incorrectamente “o peso do pacote de arroz é 1 quilograma”). O uso da terminologia correcta deve ser reforçada explicitamente através da formulação das questões e problemas propostos aos alunos. São exemplos as seguintes formulações: (a) A massa de um pacotinho de açúcar é 7,3 gramas. Qual é melhor estimativa da massa de 1000 pacotinhos de açúcar? (b) Indica a unidade mais adequada para medir a massa dum saco de batatas.

É possível encontrar na história da matemática exemplos de inúmeros problemas adequados a alunos do ensino básico e que requerem a aplicação dos conhecimentos matemáticos curriculares no âmbito da medida, a par de desenvolverem capacidades de resolução de problemas e de raciocínio. A título ilustrativo sugere-se o seguinte problema recreativo incluído na obra de Nicolas (autor do primeiro livro de matemática português[46]):

> Um homem tinha um peso que pesava 11 arráteis e aconteceu cair ao chão e fazer-se em três pedaços. Com os três pedaços o homem conseguia pesar quantos arráteis lhe pediam de 1 até 11. Ora eu pergunto quanto pesava cada pedaço[47].

Trata-se de um problema cujo plano de resolução envolve: decompor 11 como uma soma de três parcelas (inteiras); perceber que as parcelas das decomposições obtidas representam possíveis soluções e averiguar se os valores das massas obtidas em cada decomposição permite pesar objectos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 arráteis. Assim, trata-se de um problema que, pela sua natureza, permite desenvolver o sentido de número e a compreensão do processo de medir a massa.

[46] Grande parte dos problemas não são originais, aliás o próprio Nicolas refere a influência de Pacioli na sua obra (Almeida, 1994).
[47] Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol.51.

6. Formação de múltiplos e submúltiplos das unidades SI

Qualquer múltiplo ou submúltiplo de uma unidade do SI forma-se por derivação prefixal, isto é, antepondo ao nome da unidade de base um dos prefixos adoptados para esse efeito. O nome da unidade é usado como radical na formação dos nomes dos múltiplos ou submúltiplos e é importante ter presente que os prefixos convencionados pelo SI são indicadores de um factor multiplicativo que exprime a relação desse múltiplo ou submúltiplo com a unidade de base (radical do nome).

Um grande número dos prefixos convencionados pelo SI tem etimologia latina ou grega mas outros são adaptações de outras línguas que não as referidas. Apesar disso, pode afirmar-se que prefixos de origem latina ou adaptados do latim são usados, em geral, para exprimir submúltiplos, enquanto que prefixos de origem grega ou adaptados do grego são usados para exprimir múltiplos.

Nos quadros 10 e 11 apresentam-se os prefixos adoptados pelo SI para formar múltiplos e submúltiplos de todas as unidades actualmente em vigor, bem como o respectivo símbolo e relação com a unidade de base SI. Indica-se também o ano da entrada em uso de cada prefixo e ainda a sua origem etimológica. Registe-se que os prefixos iota, zeta foram acrescentados à lista dos prefixos SI na 19ª CGPM, em 1991, com a grafia original de yotta e zetta. Previamente à leitura dos quadros 10 e 11, chama-se a atenção para o seguinte:

(a) De acordo com o Houaiss (2003, p. 1188) aquando da adopção dos prefixos *mili, centi e deci* (em 1793) definiu-se que estes seriam apenas aplicáveis em fraccionários milesimais, centesimais e decimais, respectivamente, das unidades principais, a saber, o metro, o litro, o are e o grama.

(b) Os prefixos adoptados pelo SI para múltiplos e submúltiplos, na 11ª CGPM, em 1960, derivam de palavras cujo significado está associado, respectivamente, a "coisas" grandes ou pequenas;

(c) A partir da 15ª CGPM, realizada em 1975, os prefixos adoptados para formar os múltiplos da unidade de base apresentam a particularidade do seu significado se associar não a potências de 10, mas sim a potências de 10^3 ou 1 000;

(d) O mesmo princípio, referido no ponto anterior, foi adoptado na 19ª CGPM, em 1991, na formação dos submúltiplos mas, nesta situação, aplicado a potências de 10^{-3} ou 0,001.

Finalmente, refira-se que fazem parte do nosso dia-a-dia, cada vez com maior frequência, unidades como kilobyte, megabyte, gigabyte ou terabyte. Porém, é preciso ter presente que, em informática, nem sempre os prefixos usados têm o significado que o SI lhe confere. Por exemplo, quando nos referimos ao armazenamento de informação, a unidade de medida é o byte, que é por definição igual a 8 bits[48]. Neste contexto, um kilobyte (simbolizado por KB) representa 2^{10} ou 1 024 bytes e não 10^3 ou 1 000 bytes[49]. Nesta situação, os prefixos usados são binários. No entanto, quando se fala em velocidade de transferência de dados, a unidade de medida é o bit e, nesse caso, os prefixos usados assumem o significado do SI: 1 kilobit = 1000 bits.

[48] A cada impulso eléctico dá-se o nome de bit (**bi**nary digi**t**)

[49] Prefixos binários: kilo – símbolo: K – representa 2^{10}; mega – símbolo: M – representa 2^{20}; giga – símbolo: G – representa 2^{30}; tera – símbolo: T – representa 2^{40}; …

Quadro 10 – Prefixos para a formação de múltiplos do Sistema Internacional de Unidades

	Prefixo	Símbolo	Origem etimológica	Factor multiplicativo convencionado	Relação com a unidade de base SI
Formação dos Múltiplos das Unidades SI	**iota** (19ª CGPM, 1991)	Y	Do latim *octo* que significa oito.	10^{24}	Um quatrilião e vezes a unidade de base.
	zeta (19ª CGPM, 1991)	Z	Do latim *septo* que significa sete.	10^{21}	Mil triliões de vezes a unidade de base.
	exa (15ª CGPM, 1975)	E	Do grego *héks* que significa seis.	10^{18}	Um trilião de vezes a unidade de base
	peta (15ª CGPM, 1975)	P	Do grego *penta* que significa cinco[50].	10^{15}	Mil biliões de vezes a unidade de base
	tera (11ª CGPM, 1960)	T	Do grego *téras* que significa monstro.	10^{12}	Um bilião de vezes a unidade indicada.
	giga (11ª CGPM, 1960)	G	Do grego *gigas* que significa gigante.	10^{9}	Mil milhões de vezes a unidade de base
	mega (11ª CGPM, 1960)	M	Do grego *megal* que significa grande.	10^{6}	Um milhão de vezes a unidade de base
	quilo (Abril de 1795)	k	Do grego *khílihoi* que significa mil, milhar.	10^{3}	Mil vezes a unidade de base
	hecto (Abril de 1795)	h	Ddo grego *hekaton* que significa cem.	10^{2}	Cem vezes a unidade de base
	deca (Abril de 1795)	da	Do grego *dekas* que significa grupo de dez, dezena.	10^{1}	Dez vezes a unidade de base

[50] De acordo com Houaiss (2003. p. 2852) o prefixo *peta*- resulta de uma adaptação arbitrária do grego *penta* adoptado na 15ª Conferência Geral de Pesos e Medidas em 1975.

Quadro 11 – Prefixos para a formação de submúltiplos do Sistema Internacional de Unidades

	Prefixo	Símbolo	Origem etimológica	Factor multiplicativo convencionado	Relação com a unidade SI
Submúltiplos ou divisores	**deci** (1793)	d	Do *latim decimus* que significa décimo.	10^{-1}	Uma décima parte da unidade de base
	centi (1793)	c	Do francês *centime* que designava a 'centésima parte do franco', de acordo com o modelo seguido para decime (Houaiss, 2000).	10^{-2}	Uma centésima parte da unidade de base.
	mili (1793)	m	Do francês *millième* e não do latim *millesimus* que significa milésimo (ibidem).	10^{-3}	Uma milésima parte da unidade de base
	micro (11ª CGPM, 1960)	μ	Do grego *mikrós* que significa pequeno, curto.	10^{-6}	Uma millonésima parte da unidade de base
	nano (11ª CGPM, 1960)	η	Do grego *nânos* com significado de anão.	10^{-9}	Um milésimo millonésimo da unidade de base
	pico (11ª CGPM, 1960)	p	Do italiano *piccolo* que significa pequeno.	10^{-12}	Um bilionésimo da unidade de base
	fento (12ª CGPM, 1964)	f	Do dinamarquês e norueguês *femten* que significa quinze.	10^{-15}	Um milésimo bilionésimo da unidade de base
	ato (12ª CGPM, 1964)	a	Do dinamarquês e norueguês *atten* que significa dezoito.	10^{-18}	Um trilionésimo da unidade de base.
	zepto (19ª CGPM, 1991)	z	Do latim *septo* que significa sete.	10^{-21}	Um milésimo trilionésimo da unidade de base
	iocto (19ª CGPM, 1991)	y	Do latim *octo* que significa oito.	10^{-24}	Um quatrilionésimo da unidade de base.

Bibliografia

Almeida, G. (1997). *Sistema internacional de Unidades (SI). Grandezas e Unidades Físicas. Terminologia, símbolos e recomendações.* Lisboa: Plátano Editora.

Boyer, C. (1991). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Caraça, B. de J. (1978). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa.

Casey, R., Koshy, V. (2000). Fractions, decimals and percentages. In Valsa Koshy, Paul Ernest and Ron Casey (Eds), *Mathematics for Primary Teachers* (pp.41-65). London e New York: Routledge.

Decreto-Lei n.º 238/94 de 19 de Setembro, Diário da Republica, I Série-A, nº 217, 19 de Setembro de 1994.

Decreto-Lei n.º 254/2002 de 22 de Novembro, Diário da Republica, I Série-A, nº 270, 22 de Novembro de 2002.

Flores, A. (2002). Profound Understanding of Division of Fractions. In Bonnie Litwiller e George Bright (Eds), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. 2002 Yearbook* (pp.237-246). Reston: NCTM.

Foyos, J. de (1812). Memoria sobre qual convem ser a Geira Portugueza. In *Memórias Económicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa para o Adiantamento da Agricultura, das Artes e da Indústria em Portugal, e suas Conquistas, Tomo IV* (pp. 154-158). Lisboa: Typografia da Academia Real das Sciencias..

Gomes, J. R. da C. (1940). A introdução do sistema métrico e a evolução dos serviços de pesos e medidas. In *Anuário de Pesos e Medidas*, nº 1 (pp.31-54). Lisboa: Ministério da Economia, Repartição de Pesos e Medidas, Editorial Império.

Haylock, D. (2004). *Mathematics Explained for Primary Teac*hers (Second Edition). London: Paul Chapman Publishing Ltd..

Hopkins, C.; Gifford, S.; Pepperell, S. (eds). (1998). *Mathematics in the Primary School. A Sense of Progression.* London: David Fulton Publishers.

Houaiss, A.; Villar, M. S. (2003). *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Tomos I a VI. Lisboa: Círculo de Leitores.

Katz, V. (1998). *A History of Mathematics* (Second Edition). USA: Addison Wesley Longman.

Koshy, P., Casey, R. (2000). Measures. In Valsa Koshy, Paul Ernest and Ron Casey (Eds), *Mathematics for Primary Teachers* (pp. 87-99). London: Routledge.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essencial Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lebesgue, H. (1956). *Sur la Mesure des Grandeurs*. Paris: Gauthier-Villars.

Lima, E. L. (1985). *Áreas e volumes*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Lopes, J. B. (1849). *Memória sobre a Reforma dos Pesos e Medidas em Portugal segundo o Systema Métrico – Decimal.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Luz, F. M. da (1992). *Regimento da Casa da Índia. Manuscrito do século XVII existente no Arquivo Geral de Simancas*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Machado, J. P. (1977). *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa* (3ª Edição). Lisboa: Livros Horizonte.

Mankiewicz, R. (2000). *L'Histoire des Mathematiques*. Paris: Seuil.

Marques de Almeida, A. A. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, Volume I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Marques de Almeida, A. A. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, volume II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico.

ME (2004). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico, 4ª Edição.

MEC (1980). *Programas do Ensino Primário Elementar*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Secretaria de Estado da Educação.

Mendes, R. (1540). *Prática d'Arismética*. Lisboa: Germão Galharde.

NCTM (1991 (1989)). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (Tradução Portuguesa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Nicolas, G. (1519). *Tratado da Prática D' Arismétyca*. Edição fac-similada. Porto: Livraria Civilização Editora,1963.

Pacheco, G. (1624). *Flor da Arismética Necessária*. Lisboa: Geraldo da Vinha.

Paixão, M. F. (2002). Do uso da balança na alquimia ao princípio da conservação da massa. *IIII Colóquio Internacional, Discursos e Práticas Alquímicas*, Lisboa. Disponível em: http://www.triplov.com/coloquio_4/paixao.html (Acesso em: 06/02/05).

Peres, D. (1947*). Regimento das Cazas das Índias e Mina*. Coimbra: Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra.

Pinto, A. P. (1983). Isoléxicas Portuguesas (Antigas Medidas de Capacidade). *Separata da Revista Portuguesa de Filologia, vol. XVIII*, 367-590.

Ponte, J. Pedro; Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Silveira, J. H. F. da (1856). *Compendio do Novo Systema Legal de Medidas*. Lisboa, Typographia do Centro Commercial.

Silveira, J. H. F. da (1868). *Mappas das Medidas do Novo Systema Legal comparadas com as antigas nos diversos concelhos do reino e ilhas.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Smith, D. E. (1951). *History of Mathematics*, Vol. I e II, New York: Dover Publications.

Trigoso, S. F. (1815). Sobre os Pesos e Medidas Portuguezas, e sobre a Introdução do Systema Metro-Decimal. In *Memórias Económicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa para o Adiantamento da Agricultura, das Artes e da Indústria em Portugal, e suas Conquistas, Tomo V* (pp.336-411). Lisboa: Typografia da Academia Real das Sciencias.

http://www1.bipm.org

APÊNDICE 2

PROBLEMAS HISTÓRICOS

DISCUSSÃO E SUGESTÕES PARA EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA NO 2º CICLO DO ENSINO BÁSICO

(Documento de apoio à prática pedagógica no 2º CEB)

ÍNDICE

Página

1. Introdução

A proposta a futuros professores da escolaridade básica de um conjunto de problemas encontrados em livros de Aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1679[51] e envolvendo antigas unidades de medida para exploração didáctica em aulas de Matemática do 2º ciclo do ensino básico, insere-se nos seguintes pressupostos:

(a) envolver futuros professores na resolução conceptual de problemas que envolvem, à partida, unidades de medida desconhecidas que mantêm entre si relações também desconhecidas, permite desenvolver as suas competências de pensamento, de raciocínio e de resolução de problema;

(b) criar condições para que os futuros professores possam planear e explorar em sala de aula ou em ambiente não formal problemas históricos, pode favorecer o desenvolvimento e o aprofundamento do seu conhecimento didáctico, ao nível de uma maior consciencialização dos aspectos que deve ter em conta na orientação da resolução de problemas e das dificuldades de aprendizagem e dos erros dos alunos.

(c) os contextos de muitos problemas históricos, ao favorecem o conhecimento de aspectos da História da Matemática e criarem a oportunidade para reflectir sobre aspectos da natureza da Matemática e da actividade matemática, nomeadamente das suas relações com problemas do quotidiano, contribuem para uma maior cultura matemática do futuro professor e, potencialmente, dos seus alunos.

Para a selecção dos problemas, foi tomado como ponto de partida a obra de Marques de Almeida (1994a, 1994b), *Aritmética como Descrição do Real* (1519-1679). Nesta obra, encontram-se as transcrições de grande parte dos livros de Aritmética publicados em Portugal entre 1519 e 1679 e, apresenta-se e discute-se a modelação aritmética utilizada pelos mercadores do Renascimento, em particular:

> A aplicação específica de utensílios aritméticos a situações concretas e objectivas da realidade económica e social portuguesa da época, como sejam os cálculos dos impostos na Casa da Índia, as associações de mercadores para feitura de negócios e a confluência de várias formas de cabedal na prossecução de um dado negócio (Almeida, 1994a, p. 255).

---

[51] *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas (alvo de 11 edições entre 1519 e 1679), *Arte de Arismética* de Bento Fernandes (editada em 1555) e *Flor da Arismética Necessária* de Afonso Guiral e Pacheco (editada em 1624).

Muitas das situações expostas nesses textos pelos conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos tornam-se susceptíveis de exploração didáctica ao nível do 2º ciclo do ensino básico. Por outro lado, pela época a que reportam favorecem oportunidades para a concretização da interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e História.

Como o próprio Marques de Almeida admite, as Aritméticas Comerciais reflectem a realidade social, económica e mental do seu tempo e, muito particularmente, a experiência da vida dos negócios e as necessidades dos mercadores. É de referir que, apesar dos destinatários principais destes textos serem aprendizes ou mesmo homens de negócios, os seus autores limitam-se a enunciar as questões concretas a que importava dar resposta, apresentando, logo de imediato, os passos a seguir para a obtenção da solução e nunca apresentando qualquer explicação para o processo de resolução. Por exemplo, a abordagem, nas três obras acima referidas, das regras conhecidas por *Regra de três simples* e *Regra de três simples composta* é concretizada através de uma profusão de exemplos aos quais as ditas regras se aplicam. As várias situações que importa ensinar a resolver são, assim, agrupadas segundo determinados processos operatórios através da apresentação exaustiva de exemplos[52].

Nesse sentido, a inclusão de inúmeros problemas envolvendo as unidades de medida usadas para medir diversas grandezas é uma fonte inestimável para o conhecimento dos antigos sistemas unidades[53] e para a elucidação das dificuldades sociais e económicas decorrentes de características dos antigos sistemas, tais como o uso de uma grande diversidade de unidades para medir a mesma grandeza, da existência de um grande número de divisores para certas unidades e da diversidade de divisores de unidade para unidade (Silveira, 1856; Trigoso, 1815; Lopes, 1849).

Em função do exposto, procedeu-se à adaptação de um conjunto de problemas históricos tomando como ponto de partida as transcrições realizadas por Marques de Almeida (1994a, 1994b) das obras: *Tratado da Prática d'Arismética* de Gaspar Nicolas (1519), *Arte de Arismética* de Bento Fernandes (1555) e *Flor da Arismética Necessária* de Afonso Guiral e Pacheco (1624). Relativamente às obras de Gaspar Nicolas e de Guiral e

[52] Pode afirmar-se que a aprendizagem passava pela imitação exaustiva dessa exemplificação (Marques de Almeida, 1998).

[53] Designados à época por *pesos e medidas* Provavelmente esta designação, usada durante séculos, tem uma ligação muito forte ao acto de medir que, no caso da grandeza massa, se refere como pesar. Deste modo ter-se-á também criado o hábito de designar as unidades de massa materializadas (padrões) por pesos e os padrões de volume e comprimento por medidas.

Pacheco, acedeu-se também aos textos originais[54], o que permitiu confrontar as transcrições do investigador referido com os enunciados originais e, sobretudo, identificar outras situações com interesse para o estudo e não transcritas por este.

Na formulação dos enunciados, procurou-se ser fiel ao original em termos de sentido e sua linguagem. Ainda assim, prevaleceu a preocupação de garantir a inteligibilidade dos textos para o público-alvo – professores e os seus alunos do ensino básico.

Parte dos problemas seleccionados são problemas aplicados ao quotidiano passado e, como tal, inserem-se num quadro específico da prática social que importa dar a conhecer ao potencial resolvedor. É o caso dos problemas *O Quarto e Vintena* (imposto pago na Casa da Índia), *A quebra de mercadorias* (envolve as perdas sofridas pelas especiarias adquiridas no Oriente), *A Companhia de mercadores* ou *Baratar mercadorias*. Assim, sempre que considerado pertinente para a compreensão do problema, é feita uma breve introdução ao mesmo na qual se procura fazer uma breve contextualização da situação exposta. Incluem-se, também, alguns problemas de carácter recreativo[55] que, pela sua natureza e conteúdo matemático envolvido, se afiguram adequados à escolaridade básica.

Assim, apresentam-se, nesta brochura, alguns problemas históricos propostos para exploração didáctica em aulas do 2º ciclo do ensino básico. O documento pretende colmatar a escassez de materiais didácticos que apoiem a concretização da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões através do recurso à História da Matemática.

Para cada problema, começa-se por apresentar a tarefa delineada que inclui o enunciado do problema histórico, precedido, nalguns casos, de um texto introdutório e contextualizador da situação apresentada. Segue-se uma proposta de enquadramento do mesmo no Programa de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico (ME, 1991) e indicam-se os objectivos específicos de aprendizagem da Matemática[56] que a sua resolução permite desenvolver. Segue-se uma breve discussão do contexto do problema e a apresentação de um conjunto sugestões de exploração didáctica em sala de aula.

---

[54] Disponíveis na Biblioteca da Universidade de Coimbra. No primeiro caso, recorreu-se à edição fac-similada da Livraria Civilização (Nicolas, 1963).

[55] Na opinião de Almeida (1994a, p. 152,153) os Tratados de Aritmética portuguesa incluem muitos problemas de aritmética cuja finalidade era a aplicação dos conhecimentos sobre *a armação de contas* mas que mais do que isso se constituíram como um veículo para a avaliação das situações e para a formação da mentalidade moderna. A origem desses problemas remonta aos Gregos e aos Árabes, na tradição de Boécio e Beda.

[56] Enunciados em termos de várias dimensões da competência matemática a desenvolver na escolaridade básica: conhecimentos, capacidade e atitudes.

O QUARTO E VINTENA

No século XVI, Lisboa era uma das maiores cidades comerciais do mundo. Continuamente, cruzavam o estuário do Tejo naus carregadas de especiarias e outras mercadorias provenientes do Oriente. Ora, quando as naus atracavam no porto de Lisboa toda a carga era controlada na Casa da Índia e sujeita ao pagamento, a sua Alteza, o Rei, de um imposto conhecido por **Quarto e Vintena**. Um autor da época explica assim este imposto:

> Após a pesagem da mercadoria, o *Quarto e Vintena* consiste em retirar um quarto da carga e, de seguida, da carga restante retirar um vinte avos**.**

Para ficares a conhecer um pouco melhor o *Quarto e Vintena* e como se calculavam os direitos do Rei sobre as mercadorias descarregadas no porto de Lisboa, resolve o problema seguinte, proposto por um mercador do século XVI, relativo ao pagamento do quarto e vintena de um carregamento de pimenta proveniente da Índia:

Eu carreguei na Índia 64 quintais de pimenta e quero pagar deles o quarto e a vintena na Casa da Índia. Quero saber o que hei-de pagar a Sua Alteza e o que me resta[57].

[57]Adaptado de Bento Fernandes, *Tratado da Arte de Arismética*, 1555, transcrito em Marques de Almeida (1994a, pp. 256, 257).

TAREFA

Resolução do problema "O Quarto e Vintena".

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico matemático: Operações com números racionais absolutos. Adição, subtracção e multiplicação.

Propõe-se a resolução de um problema real que expõe uma situação relativa ao pagamento de um imposto sobre a mercadoria descarregada no porto de Lisboa no período áureo dos descobrimentos. O pagamento do Quarto e Vintena é tratado minuciosamente em todos os livros de Aritmética publicados em Portugal a partir de 1519, o que revela a importância que assumia este imposto e o saber calculá-lo. O Quarto e Vintena era inicialmente aplicado na Casa da Índia sobre todas as especiarias e drogarias provenientes do Oriente, mas, como afirma Almeida (1994a, pp. 255 a 259), com o passar do tempo passou a ser um imposto alfandegário de largo espectro.

O facto de se tratar de um problema historicamente datado, que envolve alguns aspectos estudados pelos alunos na disciplina de História e Geografia no 5º ano de escolaridade, permite relevar aspectos interdisciplinares e salientar que as ideias matemáticas sempre foram úteis. Por outro lado, a resolução de problemas que traduzem situações reais de aplicação da matemática em contextos sociais e económicos concretos pode permitir despertar o interesse do aluno e dar sentido à actividade matemática na sala de aula, quer ao nível do desenvolvimento de ideias matemáticas, quer da resolução de problemas e da comunicação e discussão de resultados.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

<u>Conhecimento matemático</u>

- Compreender um número racional como relação parte-todo
- Usar uma fracção como operador
- Adicionar, subtrair e multiplicar números racionais não negativos
- Representar a situação por uma expressão numérica

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Reconhecer as operações que são necessárias à resolução da situação e executar os cálculos, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Apresentar ideias e processos matemáticos, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem quotidiana para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver o interesse por aspectos do seu país
- Apreciar as ligações da Matemática com outras disciplinas escolares e o seu papel para a resolução de problemas em vários sectores da vida social

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – uma cópia da tarefa "Quarto e Vintena"

- ♦ Apresentar a tarefa como um desafio e contextualizar históricamente da tarefa. Na disciplina de História e Geografia de Portugal, os alunos abordam, no 5º ano de escolaridade, vários aspectos relacionados com o comércio marítimo português e, em particular, o papel da Casa da Índia nesse processo, sendo por isso expectável alguns conhecimentos que liguem o problema aos conteúdos abordados nessa disciplina. Por exemplo, a projecção de imagens alusivas à época dos descobrimentos pode contribuir para iniciar um diálogo sobre as principais rotas comerciais dos portugueses no século XVI e os produtos então comercializados.

- ♦ Explorar possíveis conexões entre aspectos abordados na disciplina de História e conceitos matemáticos, como sejam, por exemplo, aspectos relacionados com o pagamento de tributos e impostos. Os alunos podem ser questionados sobre o significado de pagar impostos (o porquê, a razão de pagar impostos) de modo a levá-los a perceber a ligação entre o imposto e o conceito de fracção, isto é, que um imposto representa uma determinada parte de um todo. Neste caso, o todo corresponde à massa da mercadoria descarregada. O Quarto e Vintena correspondem, respectivamente, a um quarto da massa inicial de pimenta e a um vinte avos da massa de pimenta restante depois de retirado o quarto.

- Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas:

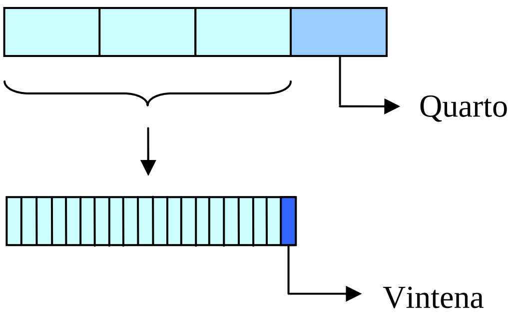
(a) Familiarização e compreensão da situação exposta

Inclui-se nesta etapa a leitura do texto introdutório ao problema e do problema, a formulação, por palavras próprias, do enunciado do problema e do significado do quarto e vintena, bem como a identificação dos dados e daquilo que é pedido.

- Massa do carregamento inicial de pimenta = 64 quintais

- Quarto e vintena $\begin{cases} \text{Quarto: } \frac{1}{4} \text{ do carregamento inicial} \\ \text{Vintena: } \frac{1}{20} \text{ da carga depois de retirado o quarto} \end{cases}$

Esta etapa pode incluir uma representação esquemática do significado do quarto e vintena como parte de um todo:



(b) Estabelecimento de um plano de resolução/percepção das operações que permitem modelar o problema

Se necessário, através de questionamento e, eventualmente, a partir de uma representação como a anterior, orientar os alunos para a identificação das operações que permitem modelar o problema:

Quarto: $\mathbf{\frac{1}{4}}$ do carregamento inicial $\longrightarrow$ Multiplicação

Massa de pimenta depois de retirado o quarto $\longrightarrow$ Subtracção

Vintena: $\mathbf{\frac{1}{20}}$ da massa de pimenta depois de retirado o quarto $\longrightarrow$ Multiplicação

(c) Execução do plano delineado

Identificadas as operações, há que as executar:

$\frac{1}{4}$ do carregamento inicial $\longrightarrow$ $\frac{1}{4}$x64=16

Massa de pimenta depois de retirado o quarto $\longrightarrow$ $64-16=48$

$\frac{1}{20}$ da massa de pimenta depois de retirado o quarto $\longrightarrow$ $\frac{1}{20}\times 48 = 2{,}4$

Quantidade de pimenta entregue ao Rei $\longrightarrow$ $16+2{,}4=18{,}4$ quintais

Quantidade de pimenta que sobra ao mercador $\longrightarrow$ $64-18{,}4=45{,}6$ quintais

À medida que vão executando os cálculos, os alunos devem ser incentivados a verificar os mesmos e a avaliar a sua razoabilidade no contexto da situação. Previamente à escrita da resposta à questão do problema, os alunos devem certificar-se que a solução matemática obtida é efectivamente solução do problema: dos 64 quintais de pimenta embarcados na Índia, o mercador paga ao rei 18,4 quintais, restando-lhe 45,6 quintais.

Relativamente ao *quintal*[58], antiga unidade de massa referida no problema, releva-se que a necessidade de escrever o nome da unidade por extenso permite introduzir em sala de aula algumas questões relacionadas com os símbolos hoje usados para designar as unidades do SI. Em particular, é possível salientar o seu significado e a economia e o poder de síntese dos símbolos convencionados. Paralelamente, a discussão que o termo pode suscitar na aula pode permitir ao professor dar a conhecer aspectos do património cultural português e, simultaneamente, alertar o aluno para a utilização, por

[58] Se os alunos manifestarem interesse em conhecer a ordem de grandeza desta unidade, o professor pode informar que um quintal antigo é igual a cerca de 58,75 kg, dando assim conta da grande quantidade de pimenta referida no problema (aproximadamente 3 760 kg).

esse mundo fora, de unidades *avulsas*, completamente diferentes das unidades do SI que estudam na escola (nomeadamente as do sistema inglês).

(d) Revisão da resolução

Esta última fase da resolução de qualquer problema matemático tem a ver com a apreciação e revisão do processo de resolução, isto é, com a análise da forma como se chegou à solução. Neste caso, a escrita de uma expressão numérica que modele o cálculo do Quarto e Vintena permite sistematizar e aprofundar a compreensão sobre o processo de resolução, conduzindo à percepção desse cálculo como um todo e não como uma sequência de cálculos parcelares:

$$\frac{1}{4}\times 64+\frac{1}{20}\times(64-\frac{1}{4}\times 64)$$

A escrita e o cálculo da expressão numérica afiguram-se assim como potencialmente enriquecedoras da aprendizagem matemática dos alunos, servindo também, entre outros aspectos, como um meio de verificação da solução encontrada e como um meio de consolidação de aprendizagens anteriores, como sejam as que se prendem com o papel dos parênteses e a prioridade das operações:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\times 64+\frac{1}{20}\times\left(64-\frac{1}{4}\times 64\right)=\\
&=16+\frac{1}{20}\times(64-16)=\\
&=16+\frac{1}{20}\times 48=\\
&=16+\frac{12}{5}=\\
&=\frac{92}{5}=\\
&=18{,}4\ \text{quintais}
\end{aligned}$$

A reflexão sobre o processo de resolução deve dar ênfase ao significado fraccionário de qualquer imposto, relevando-se, deste modo a importância da aprendizagem dos números fraccionários e das operações. No cálculo do Quarto e Vintena é também de realçar o uso das fracções $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{20}$ com sentido de operador.

Releva-se ainda, a oportunidade de consciencializar o aluno do papel da matemática na resolução de problemas do quotidiano nas mais variadas áreas.

- Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á, essencialmente, na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação, o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

Extensão da tarefa:

Sugere-se a proposta aos alunos de outros problemas históricos de carácter recreativo tais como os seguintes:

Distribuindo dinheiro pelos pobres

Um homem tinha algum dinheiro e mandou-o distribuir por 4 pobres, pelo amor de Deus. Mas antes de lho dar, olhou-os bem a todos e a quem lhe pareceu, mais mandou dar. Deixemos este melhor se é mais pobre, pensou para si.
Depois de os ter visto bem, mandou que a um dos pobres dessem um terço daquele dinheiro, a outro um quarto, ao terceiro um quinto e ao último um sexto.
Se te dissessem que o dinheiro era 60 000 reais, pergunto quanto calhou a cada um desses homens?[59]

[Sobrou algum dinheiro? Que fracção do dinheiro sobrou?]

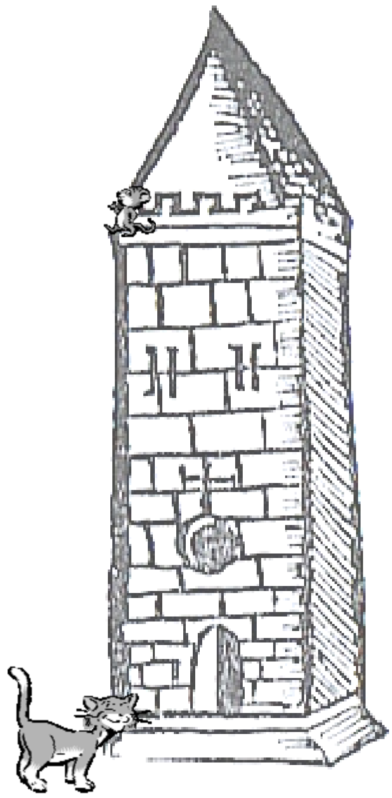
Dividindo o Peixe

Um homem fez de um peixe 3 postas e as postas da barbatana caudal e da cabeça pesavam, respectivamente, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ do peixe e todo o peixe pesava 18 arráteis. Ora eu pergunto: quanto pesava cada uma das postas?[60]

[59] Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismética, 1519, transcrito em Almeida (1994b, p.271).
[60] Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismética, 1519, transcrito em Almeida (1994b, p.262).

O GATO E O RATO

Resolve o problema seguinte:



Um rato está em cima da torre que tem quatro braças de altura e, em baixo, à espera dele está um gato. Ora, o rato desce por dia dois terços de braça. Quanto ao gato, este não anda coisa nenhuma.

(a) Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça? Porquê?

(b) Ao fim de quantos dias o rato chega finalmente ao pé do gato? [61]

[61] Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismética, 1519, transcrito em Almeida (1994b, p.273).

TAREFA

Resolução do problema “O Gato e o Rato”.

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico matemático: Operações com números racionais absolutos. Divisão

As abordagens de ensino tradicionais da divisão de números racionais dão uma grande ênfase ao procedimento algorítmico que requer a transformação da divisão em multiplicação, a escrita do inverso do divisor e a utilização do algoritmo da multiplicação. Mais concretamente, sobressai a regra: para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor. Investigadores como Siebert (2002) e Flores (2002) salientam que, em geral, o aluno não compreende porque é que desaparece o símbolo de divisão e porque é que, simultaneamente, é necessário trocar o divisor pelo seu inverso multiplicativo. De facto, se descontextualizada, a regra da multiplicação pelo inverso do divisor parece nada ter a ver com a divisão e acaba por se reduzir, na mente do aluno, a algo incompressível.

Ainda que a divisão de números racionais tenha muitas interpretações diferentes, situações de divisão como medida revelam-se como particularmente adequadas para a introdução compreensiva do algoritmo da divisão no universo dos números racionais, tornando-se particularmente sugestivo iniciar a abordagem da divisão com uma situação em que a unidade é dividida por um número fraccionário (representando parte dessa unidade ou todo), passando de seguida, para outras de dividendo diferente de um[62]. Interessa sobretudo que o aluno as resolva de modo informal, recorrendo, se necessário, a representações concretas ou pictóricas. O registo da tradução matemática das situações propostas e da respectiva solução, feita de forma sistemática e organizada, permitirá ao professor conduzir o aluno à identificação de um padrão no cálculo do resultado de uma situação de divisão no universo dos números racionais que permita conjecturar um processo de cálculo do quociente de dois números racionais.

[62] Pretende-se, assim, estender ao universo dos racionais a ideia de divisão como subtracções sucessivas. Isto é, as situações em que se pretende dividir uma quantidade em grupos com um determinado número de elementos e em que se quer saber quantos grupos se podem fazer, resposta que se pode obter por subtracções sucessivas.

A situação que se propõe nesta tarefa foi adaptada de um problema de carácter recreativo, proposto por Gaspar Nicólas em 1519. O problema traduz uma situação típica de divisão por medida ou agrupamento, cujo objectivo final é saber quantos dias um rato demora a percorrer 4 braças, sabendo que percorre por dia 2/3 de braça. Ou seja, o problema resume-se a saber quantas vezes o comprimento de 2/3 de braça cabe em 4 braças, isto é, em determinar o quociente de $4 \div \frac{2}{3}$.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

Conhecimento matemático

- Compreender um número racional como relação parte-todo
- Estabelecer a ligação entre a divisão de números racionais não negativos (divisor diferente de zero) e a multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor
- Dividir números racionais absolutos

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Planear e implementar uma estratégia de resolução, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Formular e testar conclusões relativas ao cálculo do quociente da divisão de números racionais
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Representar e explorar a situação com materiais manipulativos
- Interpretar e apresentar as ideias e os conceitos matemáticos presentes na situação, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Apreciar a face social, cultural e humana da Matemática[63]

[63] Muitos problemas matemáticos de carácter recreativo foram introduzidos na Europa pelos árabes há mais de mil anos. A sua divulgação, a partir do séc. XIII (sobretudo por autores como Fibonacci e Pacioli e seus seguidores), deu-lhes muita visibilidade e tornou-os intemporais. Dá-los a conhecer e a resolver aos jovens de

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – uma cópia da tarefa "O gato e o rato";

Para cada par de alunos – uma caixa de barras Cuisenaire

- ♦ Previamente à realização desta tarefa, os alunos devem ter oportunidade de se envolverem na resolução de situações de divisão no universo dos inteiros. É desejável salientar que o alargamento do universo numérico ao conjunto dos racionais absolutos permite dar resposta a impossibilidades de cálculo no conjunto dos números inteiros.
- ♦ Apresentar a tarefa como um desafio. Referir, por exemplo, que se trata de um problema aritmético muito antigo que foi incluído no primeiro livro de matemática publicado em Portugal em 1519, mas que é certamente muito anterior a essa obra. A antiguidade é testemunhada pela utilização do termo braça. Questionar os alunos sobre o significado da expressão "a torre tem quatro braças de altura" e tentar perceber se os alunos a associam a uma medida cuja unidade é a braça.
- ♦ Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas.

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta.

Orientar o aluno para a interpretação do enunciado, para o registo dos dados e da questão do problema:

A altura da torre - 4 braças
Distância percorrida por dia pelo rato - 2/3 de braça
Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça?

Explorar o significado da expressão "o rato desce por dia dois terços de braça", de modo a tornar claro para o aluno que a unidade de comprimento – a braça – é dividida em três partes iguais e que o rato percorre, por dia, uma distância igual a duas dessas partes.

Esta etapa pode incluir a representação com material Cuisenaire[64] dos comprimentos de uma braça e de dois terços de braça, bem como da altura da torre, o que pressupõe uma escolha adequada de barra que representa uma braça. De facto, os alunos deverão

---

hoje (nas suas formulações originais) é um contributo importante para a percepção do papel da Matemática na cultura.

[64] Disponibilizar a cada par de alunos uma caixa de barras Cuisenaire.

fazer a sua escolha de modo a que o comprimento de 2/3 de braça percorrido pelo rato possa também ter uma representação física por intermédio de uma barra (por exemplo, a azul).

(b) Estabelecimento de um plano de resolução/percepção das operações que permitem modelar o problema

O plano de resolução pode passar por uma representação da situação, seja através do recurso a barras Cuisenaire, seja através de uma figura de modo a percepcionar que em ambas as alíneas a resposta à questão do problema exige calcular quantas vezes o comprimento 2/3 de braça "cabe" numa braça (alínea a) ou em 4 braças (alínea b).

Na alínea a) o aluno pode começar por considerar um problema mais simples, supondo, por exemplo, que o rato percorre um terço de braça por dia. Para a modelação do problema através de materiais, o aluno deve identificar qual é a barra que representa um terço da braça[65] e, por justaposição, de barras concluir que o rato demora 3 dias a percorrer uma braça.

Em qualquer dos casos, pretende-se determinar o tempo que o rato demora a percorrer 1 braça, conhecida a distância percorrida num dia. Trata-se, portanto de uma situação modelável pela divisão. O facto do problema envolver um divisor racional pode tornar menos óbvia esta interpretação da situação e, consequentemente, também menos óbvio o raciocínio a seguir para o cálculo do quociente.

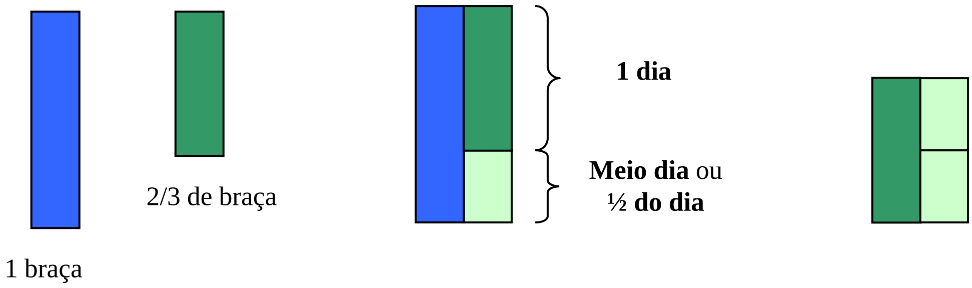
(c) Execução do plano delineado

Sugere-se, assim, que o aluno comece por modelar o problema com barras Cuisenaire. Para tal, identificadas as barras que representam os comprimentos de uma braça e 2/3 de braça e sabendo que, em cada dia, o rato desce dois terços de braça, pretende-se determinar quantas vezes o comprimento 2/3 cabe em 1. As interacções dos alunos com os materiais devem ser cuidadosamente orientadas, de modo a evitar o seu uso errático e brincadeiras que os distraiam do objectivo.

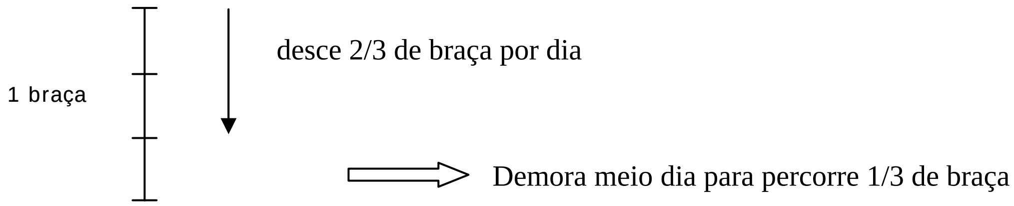
[65] Mais correctamente 1/3 do comprimento da barra usada para representar a braça.

Por comparação e utilizando as barras adequadas, concluir que numa braça cabe uma vez e meia no comprimento 2/3 (notar que a parte em falta para perfazer 1 representa metade de 2/3) [66]. Ou seja, o rato demora um dia e meio a percorrer 1 braça.

Na figura seguinte, representa-se uma estratégia possível de resolução usando barras Cuisenaire:



Estratégia possível de resolução usando um esquema:



Mas um dia e meio pode ser representado como $1+\frac{1}{2}$ dias, ou por $\frac{3}{2}$ dias.

Concluída a resolução manipulativa, há que orientar a atenção dos alunos para o conceito de divisão de números racionais, tendo presente as suas conexões com os conceitos de fracção, de divisão como operação inversa da multiplicação, com os significados da divisão de número inteiros, etc. Assim, os alunos devem ser orientados para a tradução em linguagem matemática das ideias matemáticas exploradas com o material: $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$.

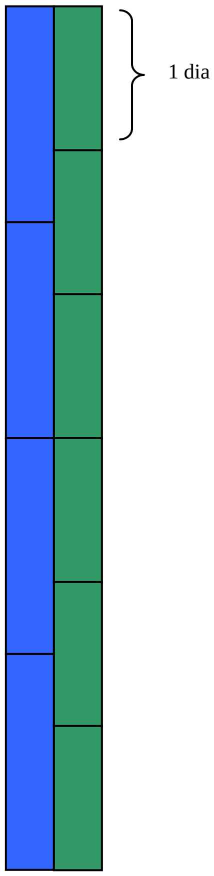
[66] Supondo que a barra azul representa a braça, os alunos deverão identificar qual a barra que representa 2/3 da braça (o que pressupõe a compreensão do conceito de fracção como parte de um todo) e de seguida determinar quantas vezes essa barra (de cor verde escuro) cobre a barra azul. É claro que só é possível justapor uma barra verde-escuro e por isso é necessário identificar qual a barra que permite perfazer o comprimento da barra azul (a barra verde). Põe-se então a questão de saber que parte da barra verde escura representa a barra verde-claro. A justaposição das barras permitirá concluir que o comprimento da barra verde-claro é metade ou ½ do da barra verde-escuro. Portanto, conclui-se que o comprimento da barra azul é igual a 1+ ½, ou 3/2, do comprimento da barra verde escura.

Nesse sentido, importa ajudar o aluno a perceber que o quociente $\frac{3}{2}$ representa quantas vezes o divisor $\frac{2}{3}$ cabe em 1.

Note-se que o quociente representa, neste caso, o inverso do divisor. De facto, o inverso de um número representa quantas vezes esse número cabe na unidade, significado que é crucial para a compreensão do algoritmo da divisão de números racionais.

<u>Alínea b)</u>

Nesta alínea pretende-se saber em quantos dias o rato percorre 4 braças. Recorrendo às barras Cuisenaire, é imediato concluir que o rato demorará 6 dias a chegar ao pé do gato (figura ao lado).



Após a resolução manipulativa, há que orientar a atenção dos alunos para as ideias e conceitos matemáticos que se pretendem explorar e conduzi-los à tradução em linguagem matemática da resolução e solução:

$$4 \div \frac{2}{3} = 6\,.$$

Porém, a situação proposta pode ser encarada de outra forma. Através de um raciocínio multiplicativo (ou mesmo aditivo), o aluno poderá concluir que, se o rato demora um dia e meio a percorrer uma braça, então demorará o quádruplo do tempo a percorrer as 4 braças, pois estas representam o quádruplo de uma braça, isto é, demora 4 vezes um dia e meio.
Assim, há que orientar, através de questionamento, o pensamento do aluno para a relação que se pode estabelecer entre a questão colocada e a solução obtida na alínea a).

Interessa também traduzir o raciocínio seguido em linguagem matemática de forma a poder-se estabelecer a ligação entre o problema e o cálculo do quociente pretendido:

$$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

(d) Revisão da resolução

Nesta fase, em que se pretende que o aluno proceda a uma revisão do caminho seguido para a obtenção da solução, há que dar uma particular atenção à articulação da actividade matemática desenvolvida com os materiais e as finalidades matemáticas da tarefa, nomeadamente a extensão do conceito de divisão no universo dos inteiros ao universo dos racionais e o estabelecimento de uma regra para o cálculo do quociente de dois números racionais. Relativamente a esta última, importa levar o aluno a reconhecer o padrão que existe na resolução de todas as situações de divisão apresentadas e a enunciar um procedimento para o cálculo do quociente. Note-se que a transformação da divisão na multiplicação pelo inverso do divisor ocorre, precisamente, porque o inverso do divisor indica quantas vezes esse número cabe na unidade.

Se necessário, poderá ser pedido aos alunos que indiquem quantos dias o rato demoraria a percorrer, por exemplo, cinco terços de braça. Através de um raciocínio multiplicativo (que poderá ser apoiado pela utilização de materiais), poderá concluir-se que demora 5/3 do tempo gasto a percorrer uma braça, isto é, o rato demora $\frac{5}{3}$ de um dia e meio ou seja, dois dias e meio a percorrer essa distância:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Chamar a atenção do aluno para as expressões:

$$1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

$$4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Se considerado necessário, pode ser pedido ao aluno que calcule outros quocientes (recorrendo ou não às barras Cuisenaire) e que observe atentamente os resultados obtidos e tente descobrir uma regra para calcular o quociente de dois números representados por fracções:

Para dividir dois números racionais na forma de fracção, transforma-se a divisão em multiplicação e substitui-se o divisor pelo seu inverso.

Nesta etapa, o professor deve chamar a atenção dos alunos para a regra estabelecida para o cálculo do quociente de números racionais, em que, pelo menos um está representado na forma de fracção. Alertar para a conexão entre a divisão e a multiplicação, isto é, que a divisão é a operação inversa da multiplicação e, como tal, a verificação da correcção do quociente obtido passa pela comprovação de que o produto do divisor pelo quociente é igual ao dividendo:

$4 \div \frac{2}{3} = 6$. De facto $\frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = 4$.

- Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á essencialmente na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

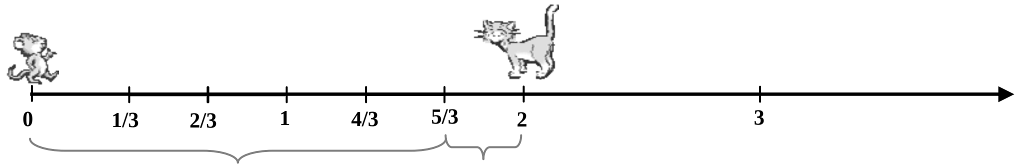
Extensão da tarefa:

Poderá ser interessante propor ao aluno o problema original, que inspirou «O gato e o rato», tal como proposto por Nicolas em 1519:

> Um rato está em cima de uma torre que tem 2 braças e em baixo, à espera dele, está um gato. Ora, o rato desce por dia um terço de braça, mas de noite volta para trás um quarto de braça. Quanto ao gato, este não anda coisa nenhuma. Ora, eu pergunto: ao fim de quantos dias estará o rato em baixo?

Note-se que, neste caso, pode existir a tendência de o raciocínio dos alunos os conduzir à conclusão de que se o rato anda por dia $\frac{1}{12}$ $(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12})$ da braça e a torre tem 2 braças, então demora vinte e quatro dias a descer a torre $(2\div\frac{1}{12}=24)$. Este raciocínio não entra em linha de conta com o facto de, no último dia, o rato já não voltar para trás pois, entretanto, já chegou ao solo e foi, provavelmente, apanhado pelo rato. Assim, não é possível modelá-lo pela divisão de 2 por 1/12 (efectuado o cálculo da distância percorrida por dia). Como obter a solução?

Através de um esquema ou do uso de material manipulativo, é fácil concluir que o rato demora 21 dias. A representação dos dados do problema numa recta numérica sugere claramente que os últimos 1/3 de braça são percorridos num dia, pelo que a expressão $\frac{5}{3}\div\frac{1}{12}+1$ parece um bom modelo para o problema.



$\frac{5}{3}\div\frac{1}{12}+1$=21, pelo que o rato demora, efectivamente, 21 dias a chegar ao pé do gato.

A VENDA DO TRIGO

Resolve o problema seguinte:

Um mercador empregou[67] 30 coroas em 30 alqueires de trigo.

Este mercador quer vender o trigo e, para isso, tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era $\frac{3}{4}$ (três quartos) do dele e vendeu cada alqueire pequeno por uma coroa. E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado onde o alqueire era $\frac{5}{4}$ (cinco quartos) do dele e vendeu cada alqueire grande por uma coroa. Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo[68].

[67] Investiu.
[68] Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, transcrito em Almeida (1994b, p. 172).

TAREFA

Resolução do problema “A venda do trigo”.

ENQUADRAMENTO:

Ano de escolaridade: 6º ano

Tópico Matemático: Operações com números racionais absolutos. Adição, multiplicação, subtracção e divisão

O problema proposto nesta tarefa traduz uma situação corrente em Portugal até há bem poucos anos e que tem a ver com a diferença de capacidades dos recipientes usados para medir o volume de produtos agrícolas, como o milho, o trigo, a azeitona, o vinho, o azeite, etc. O alqueire representa uma antiga unidade de volume (cuja subdivisão em quatro partes originou a unidade conhecida por quarta) cujo uso em Portugal remonta ao período de ocupação árabe. Porém os padrões físicos usados para a sua medição nunca conseguiram ser uniformizados. É assim que se explica, por exemplo, que em 1868 as medições realizadas nos concelhos de Sertã, Covilhã e Monsanto revelassem, respectivamente, os valores díspares de 13,544 L, 16,330 L e 18,460 L para as capacidades dos padrões do alqueire[69] (Silveira, 1868). Neste contexto, mesmo após a adopção em Portugal das unidades do sistema métrico (hoje SI) o problema subsistiu, sendo ainda possível encontrar pessoas que se recordam dessa situação.

Neste contexto, o problema pode ser encarado como um problema que traduz uma realidade social que importa dar a conhecer, quanto mais não seja para que os alunos conheçam aspectos do seu país e percebam a importância da uniformização das unidades de medida e da fiscalização dos padrões usados para a medição.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

Conhecimento Matemático

- Desenvolver a compreensão sobre o significado da divisão de números racionais absolutos
- Usar métodos apropriados para calcular o resultado de operações com números racionais absolutos

[69] À época o alqueire de Lisboa era de 13,8 L (Silveira, 1865).

- Aprofundar a compreensão sobre o efeito de dividir um número racional absoluto por um número menor do que 1 e por um número maior que 1
- Representar a situação por uma expressão numérica

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Reconhecer as operações que são necessárias à resolução da situação e executar os cálculos, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Apresentar e justificar a estratégia utilizada na resolução do problema, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem quotidiana para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver a curiosidade e o interesse por factos da história do seu país, nomeadamente os problemas sociais colocados pelo uso de unidades de medida de volume não estandardizadas
- Apreciar o papel da matemática para a resolução de problemas, na vida quotidiana

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – Uma cópia da tarefa "A venda do trigo"

♦ Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas:

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta.

Interessa começar por levar o aluno a compreender e a registar os dados mais relevantes do problema. Para tal, é necessário contextualizar a tarefa, informando os alunos de que o alqueire era uma antiga unidade usada para medir o volume de produtos agrícolas e que a quarta era também uma unidade de volume que correspondia à quarta parte do alqueire. Esta última informação deve ser explorada de modo a estabelecer conexões entre o problema da Medida e o Número. Há ainda que lembrar que o volume de produtos como o milho é medido com recurso a recipientes cuja capacidade representa esse volume. Informar que, antigamente, esses recipientes eram construídos com pouco cuidado e, por isso, as suas capacidades variavam de localidade para localidade.

Para confirmar que os alunos compreendem a essência do problema, isto é, que o padrão do alqueire num dos mercados é maior do que aquele que foi usado aquando da compra e que, no outro mercado é menor, o professor deve apoiar a tradução do problema por outras palavras, sugerindo-lhes, por exemplo, que designem os alqueires dos dois mercados por alqueire grande e alqueire pequeno[70].

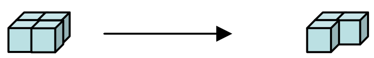
O registo dos dados pode ser acompanhado de uma representação figurativa que exprima a relação entre volume:

- O mercador investe 30 coroas em 30 alqueires de trigo

- Divide os 30 alqueires em duas partes iguais { 15 alqueires para um mercado - A
  15 alqueires para outro mercado - B

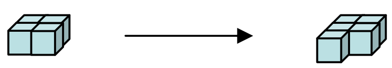
- O trigo foi dividido em duas partes iguais e foi vendido em dois mercados em que não se usavam as mesmas unidades do mercador. Num desses mercados, o alqueire é mais pequeno do que o do mercador e no outro é maior.

- No mercado A o alqueire é três quartos do dele



1 alqueire pequeno = $\frac{3}{4}$ alqueire

- No mercado B o alqueire é cinco quartas do dele



1 alqueire grande = $\frac{5}{4}$ alqueire

[70] Notar que o enunciado dá também a relação entre os volumes do alqueire e do alqueire grande/pequeno em função da quarta

(b) Delinear um plano/percepcionar as operações que permitem modelar o problema

Nesta etapa, poderá ter interesse desdobrar a questão do problema em questões mais simples que orientem o pensamento do aluno para o que se passa em cada um dos dois mercados em que o mercador vende o trigo:

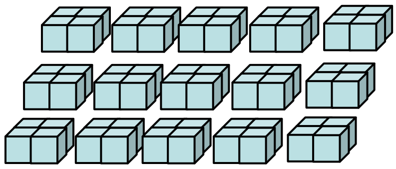
a) Com os 15 alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado, quantos alqueires pequenos conseguiu obter o mercador?

b) No segundo mercado, quantos alqueires grandes vendeu o mercador?

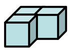
c) O mercador ganhou ou perdeu dinheiro na venda do trigo?

<u>Alínea a)</u>

A interpretação do que se pretende na primeira questão pode passar pela construção de uma representação figurativa da situação, como a ilustrada a seguir[71], de modo a conduzir o aluno a concluir que se pretende determinar quantos grupos de ¾ é possível obter com os 15 alqueires.



15 alqueires



Alqueire pequeno - o seu volume é ¾ do volume do alqueire do mercador

Poderá começar por se perguntar aos alunos se lhes parece que o mercador vai obter mais ou menos do que 15 alqueires. Interessa sobretudo, estar atento à justificação apresentada, porque esta permitirá orientar o pensamento do aluno para a operação que está implícita no problema.

Por vezes é conveniente planear algumas questões alternativas que permitam redireccionar o pensamento do aluno, como, por exemplo, as seguintes:

- Com 15 alqueires, quantos grupos de ¾ de alqueire conseguimos fazer?
- Para sabermos quantas vezes 3/4 cabe em 15, como é que fazemos?

[71] Para alunos com mais dificuldades, o recurso a pequenos cubos pode ajudar a modelar o problema.

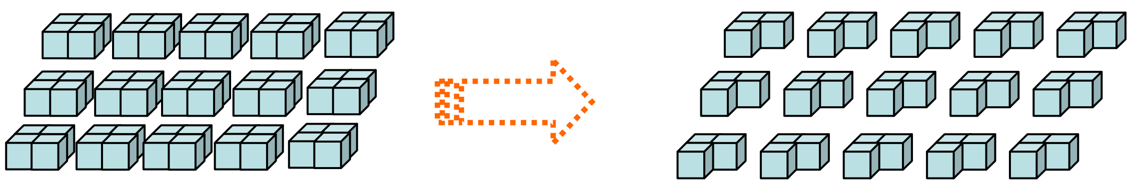
- Qual é a operação que nos permite descobrir quantas vezes uma cabe noutra?

(c) Execução do plano delineado

Uma vez que os alunos tenham reconhecido a situação como uma situação de divisão, há que a traduzir para linguagem matemática (isto é, escrever uma expressão numérica que traduza quantos alqueires pequenos o mercador conseguiu obter) e calcular o valor do quociente: $15 \div \frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3} = \frac{60}{3} = 20$.

O resultado obtido leva a concluir que o mercador consegue obter 20 alqueires pequenos. Neste momento, interessa comparar este resultado com as estimativas feitas pelo aluno, mesmo que estas tenham sido apenas do género “o mercador vai obter mais de 15 alqueires” e pedir aos alunos que justifiquem porque é que isso acontece.

A exploração da representação figurativa poderá apoiar a compreensão de que se trata de um problema modelável pela divisão:



15 alqueires

[O mercador leva para o primeiro mercado 15 alqueires de trigo, mas vende-os usando uma medida mais pequena, igual a ¾ da inicial]

20 alqueires pequenos

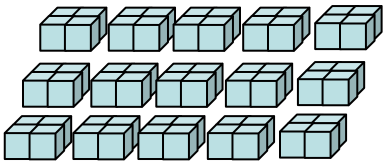
<u>Alínea b)</u>

A alínea b envolve um raciocínio análogo ao da alínea anterior. Previamente ao cálculo do quociente, poderá ser pedido aos alunos que façam uma estimativa do número de alqueires grandes, de forma a avaliar a compreensão da situação e o sentido de número e de quantidade, dos alunos. Afigura-se oportuno questionar os alunos sobre se acham que vão obter mais ou menos de 20 alqueires grandes (a resposta obtida na alínea a9 é um termo de comparação que deve ter tido em conta).

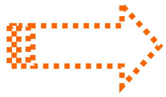
$$15 \div \frac{5}{4} = 15 \times \frac{4}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

Portanto, o mercador consegue obter 12 alqueires grandes.

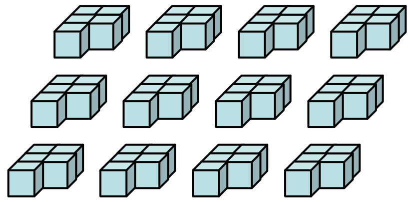
Mais uma vez, importa orientar a discussão para o efeito da divisão de um número inteiro por um número fraccionário (neste caso, maior do que a unidade). Do mesmo modo, o recurso a uma representação figurativa pode ajudar a modelar o problema.



15 alqueires



[O mercador leva para o segundo mercado 15 alqueires de trigo, mas vende-os usando uma medida maior, igual a 5/4 da inicial]



12 alqueires grandes

<u>Alínea c)</u>

Trata-se, finalmente de dar uma resposta à questão do problema: "Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo". Interessa assegurar que o aluno compreende que é necessário calcular o dinheiro conseguido com a venda do trigo em cada um dos mercados e comparar a soma resultante dessas vendas com o investimento inicial do mercador. Para tal, os alunos devem identificar as operações aritméticas que permitem modelar a situação e escrever uma expressão matemática que traduza o dinheiro conseguido pelo mercador na venda do trigo, para então comparar os dois valores e concluir sobre a existência de lucro ou prejuízo.

Vendeu cada alqueire por uma coroa (No primeiro mercado, consegue 20 coroas com a venda e, no segundo mercado, 12 coroas): $20 \times 1 + 12 \times 1$

O mercador investiu 30 coroas nos 30 alqueires de trigo. O seu lucro é a diferença entre o produto da venda e o investimento inicial: $(20 \times 1 + 12 \times 1) - 30 = 2$

Portanto, o mercador ganha 2 coroas na venda do trigo.

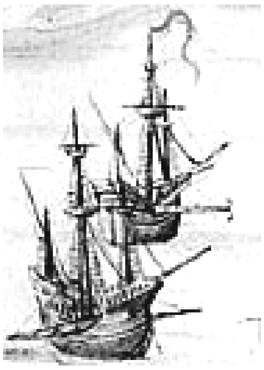
(d) Revisão da resolução

A última etapa da resolução de um problema respeita ao olhar para o caminho seguido, em procurar ligações a outros conceitos, de modo a aprofundar e consolidar a aprendizagem dos conceitos e processos matemáticos utilizados na sua resolução.

Interessa, neste problema, pôr a tónica na exploração das conexões entre a divisão e a multiplicação e no desenvolvimento do sentido de divisão no universo dos racionais não negativos, discutindo o que acontece quando se divide por um número fraccionário menor do que 1 ou maior do que 1.

- Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á, essencialmente, na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

QUEBRA DAS MERCADORIAS

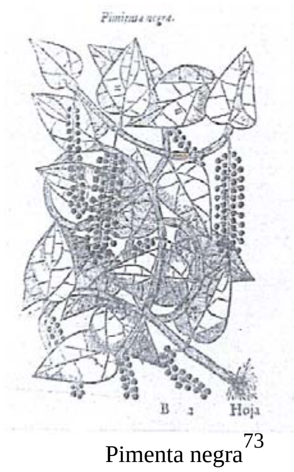


Quando os portugueses, no séc. XVI, passaram a dominar as rotas comerciais no Oceano Índico, a pimenta bem como outras especiarias começam a chegar à Europa, via Lisboa, em grandes quantidades. Contudo, as dificuldades da viagem, sujeita a intempéries naturais, o mau acondicionamento das mercadorias aliado ao facto das especiarias não serem embarcadas completamente secas fazia com que frequentemente uma parte da carga se estragasse. Os mercadores falavam então na **quebra** sofrida na mercadoria, isto é, na quantidade de mercadoria que se estragava durante a viagem.

Propomos-te que resolvas as situações seguintes relativas à quebra sofrida por dois carregamentos, um de pimenta e outro de gengibre, na longa viagem entre a Índia e Portugal[72].

a) Uma nau carregou na Índia 4000 quintais de pimenta e chegou a Portugal com 3600 quintais. Pergunto: quanto quebra por 100?

b) Sabendo que a mesma nau carregou também na Índia 3000 quintais de gengibre e que o gengibre teve uma quebra de 330 quintais, compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual das duas mercadorias sofreu a maior quebra.



Pimenta negra[73]

[72] Adaptados de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d' Arismética (1519, fol.46).
[73] Tratado de Cristóvão da Costa (in Albuquerque, 1994, p. 900).

TAREFA

Resolução do problema "A Quebra das mercadorias"

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico Matemático: Proporção. Percentagem.

Propõe-se nesta tarefa a resolução de situações reais relativas à quebra sofrida pelas mercadorias nas longas viagens marítimas entre o Oriente e Portugal. Anteriormente à descoberta do caminho marítimo para a Índia, a pimenta, produto muito apreciado na Europa, sobretudo pela sua utilização em farmácia e como condimento, chegava a este continente em quantidades muito pequenas e o seu preço era elevadíssimo devido às dificuldades e morosidade do seu transporte. Porém, quando os portugueses, no séc. XVI, passaram a dominar as rotas comerciais no Oceano Índico, a pimenta, bem como outras especiarias começam a chegar à Europa, via Lisboa, em grandes quantidades[74]. Contudo, a pimenta que era colhida entre Dezembro e Janeiro, altura de partida das naus (antes do início das monções), nem sempre era adquirida e embarcada seca. De facto, a compra desta especiaria deveria efectuar-se "por volta de Março, quando já se encontrava bastante seca e dava, por isso, mais garantias de vir a ter a menor quebra e de não se deteriorar"[75]. Há ainda que ter em conta que, associado a isso, as dificuldades da viagem, sujeita a intempéries naturais, e o mau acondicionamento das mercadorias, faziam com que frequentemente, uma parte dessa mercadoria ficasse incapaz de entrar no circuito comercial. Os mercadores falavam, então, em quebras sofridas na pimenta (ou outra especiaria). Nalguns casos, essas quebras eram muito acentuadas, o que lhes criava muitas dificuldades, não só pela perda sofrida nos produtos, mas também porque os impostos pagos ao rei não entravam em linha de conta com as quebras.

A tarefa proposta visa salientar a necessidade de termos um padrão comum para fazer comparações de quantidades/quebras que se referem a totais diferentes. Ou seja, quando se relaciona a quebra sofrida por cada uma das mercadorias com a carga inicial não

[74] Albuquerque (1994).
[75] Santos e Rodrigues (1989)

se tem uma percepção clara de qual das duas sofreu uma maior quebra. A procura de uma argumentação convincente passa pelo cálculo das duas razões ou pela expressão de ambas as quebras em termos de um total comum. As dificuldades decorrentes de comparar quantidades diferentes referidas a totais também diferentes deve conduzir à percepção das vantagens da escolha de um consequente comum às duas razões. A opção pelo 100 como padrão de comparação foi uma convenção genial e cuja escolha não foi arbitrária. Importa fazer notar aos alunos que uma razão de consequente 100 é facilmente representável por um número decimal, fazendo-se sobressair a ligação da escolha desse consequente com o 10, base do nosso sistema de numeração. A noção de percentagem surge assim de forma natural conectada com as noções de razão e proporção[76]. Trata-se pois de uma tarefa que permite salientar a ideia por detrás do conceito matemático de percentagem.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

<u>Conhecimento matemático</u>

- Usar razões para representar a relação entre quantidades
- Utilizar e compreender o conceito de proporção
- Interpretar uma razão de consequente 100
- Compreender o conceito de percentagem e as diferentes formas de o representar

<u>Capacidades matemáticas</u>

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Delinear, implementar uma estratégia de resolução e avaliar a razoabilidade da solução obtida
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos

[76] De acordo com Smith (1951, p. 246), a necessidade das fracções decimais fez-se sentir muito antes da sua invenção, nomeadamente em cálculos de décimos, vigésimos e centésimos e foi essa necessidade que originou uma notação peculiar que tomou o lugar das formas decimais e que persiste nos dias de hoje no símbolo %. O mesmo autor refere que as aritméticas comerciais do século XVI fazem um uso considerável desta ideia matemática em cálculos de juros e de lucros e perdas, em questões envolvendo o uso da Regra de Três Simples ou em problemas isolados (situação mais frequente). O uso de razões referenciadas a um total de 100 torna-se vulgar na Europa sobretudo a partir do século XVII. A este propósito, referindo-se ao cálculo do Quarto e Vintena, Guiral e Pacheco (1624 in Almeida, 1994b, p. 157) escreve: “A meu ver, hé milhor fazer a conta de cento, assim pêra os naturaes, como pêra dar contas aos estrangeiros e commisseonários e ser cousa que se costuma entre todos os homens de negócio que o não nomeão senão por cento”. Acresce ainda dizer que o significado original da expressão “por cento” nada tinha a ver com a noção de número decimal e com a representação decimal hoje utilizada.

- Apresentar ideias e processos matemáticos, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação.
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

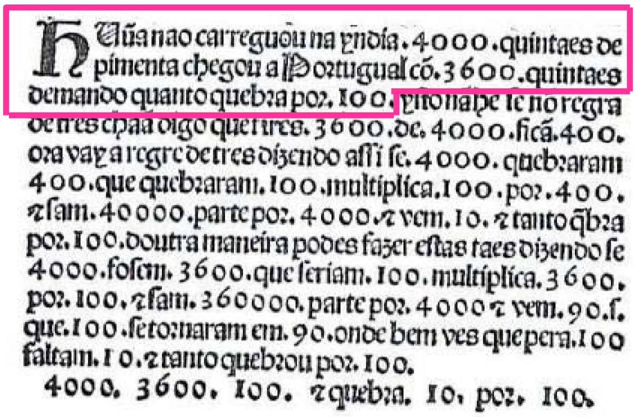
- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver o interesse por aspectos do seu país
- Apreciar as ligações da Matemática com outras disciplinas escolares e o seu papel para a resolução de problemas em vários sectores da vida social

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – Uma cópia da tarefa "A quebra de mercadorias".

♦ Apresentar a tarefa como um desafio e introduzi-la no contexto histórico. Caso os alunos já tenham resolvido o problema do *Quarto e Vintena*, é possível estabelecer a ligação com esse problema, na medida em que ambos se inserem no mesmo contexto histórico. Acresce ainda que o pagamento do Quarto e Vintena incidia sobre as mercadorias descarregadas no porto de Lisboa, não entrando em linha de conta com as quebras sofridas pelas mercadorias, na viagem. Essa situação dava origem a muitas reclamações por parte dos mercadores, pois as quebras eram, frequentemente, muito acentuadas e após o pagamento do Quarto e Vintena, o lucro dos mercadores ficava substancialmente reduzido.

♦ Como motivação para a tarefa poderá ter interesse mostrar aos alunos parte do texto de Gaspar Nicolas, fazendo notar, por exemplo, o estilo gótico da letra e o contraste entre o que tipicamente encontramos hoje num livro de matemática (o manual escolar será certamente o único livro de matemática que alunos de 6º ano conhecem), nomeadamente a forma como o problema é proposto e resolvido. Note-se que de imediato à apresentação da situação são indicados os passos para a sua resolução. Encontrada a solução, esta era sempre verificada (situação hoje raramente encontrada). Sobressai também a ausência de qualquer simbologia que não a escrita dos numerais, o que permite destacar, se oportuno, o poder de síntese e as vantagens do uso de símbolos matemáticos, quer na indicação dos cálculos, quer na apresentação do processo de resolução de um problema.



HUũa nao carreguou na yndia.4000.quintaes de pimenta chegou a Portugal cõ.3600.quintaes demando quanto quebra por.100.ẏsto nã he se no regra de tres e pa a digo que tres.3600.de.4000.ficã.400.ora vay a regre de tres dizendo assi se.4000.quebraram 400.que quebraram.100.multiplica.100.por.400.ꝛ sam.40000.parte por.4000.ꝛ vem.10.ꝛ tanto q̃bra por.100.doutra maneira podes fazer estas taes dizendo se 4000.fosem.3600.que seriam.100.multiplica.3600.por.100.ꝛ sam.360000.parte por.4000 ꝛ vem.90.s.que.100.se tornaram em.90.onde bem ves que pera.100 faltam.10.ꝛ tanto quebrou por.100.

4000. 3600. 100. ꝛ quebra. 10. por. 100.

♦ Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas.

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta

Contextualizada a tarefa, há que orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas, a primeira das quais implica uma leitura atenta do enunciado do problema que permita a sua compreensão. Para tal, o professor deve assegurar-se que o aluno compreende o vocabulário e o contexto do problema, o que pode ser avaliado pedindo aos alunos que o traduzam por palavras suas e/ou colocando-lhes questões de clarificação e incentivando-os a formular as suas próprias questões/dúvidas sobre a situação exposta.

(b) Estabelecimento de um plano de resolução

Esta etapa inclui os modos de abordar o problema, o que pode passar pela colocação de questões mais simples e orientadoras do pensamento dos alunos. Como por exemplo:

- Que quantidade de pimenta ficou danificada durante a viagem? Ou qual foi a quebra (absoluta) sofrida no carregamento de pimenta?
- O que é que representa a razão entre a quantidade de pimenta que ficou danificada durante a viagem (ou quebra) e a quantidade embarcada na Índia?
- De quanto foi a quebra por cada 100 quintais? Que informação obtemos quando chegarmos a essa razão?

(c) Execução do plano delineado

Alínea a)

A quebra sofrida pela pimenta pode ser encarada como a diferença entre a quantidade (massa) de pimenta carregada na Índia e a quantidade descarregada no porto de Lisboa. Assim, a quebra sofrida pelo carregamento de pimenta foi de 400 quintais:
4000-3600 = 400.

Pode pois dizer-se que num carregamento de 4000 quintais de pimenta houve uma quebra de 400 quintais. Esta relação pode traduzir-se matematicamente pela razão $\frac{400}{4000}$[77]. A razão $\frac{400}{4000}$ representa pois a relação entre a quebra de pimenta e a carga inicial.

Ora, a questão do problema consiste em saber quanto foi a quebra por 100, isto é, pretende-se exprimir a razão anterior como uma razão com consequente 100. Somos assim conduzidos a uma proporção em que um dos meios é desconhecido:

$$\frac{400}{4000} = \frac{?}{100}$$

A sua determinação pode passar pela aplicação da propriedade fundamental das proporções ou por cálculo mental.

$$\frac{400}{4000} = \frac{10}{100}$$

Conclui-se que por cada 100 quintais de pimenta a quebra durante a viagem foi de 10 quintais, isto é, a pimenta teve um quebra de 10 quintais por cada 100 quintais.

É de notar que esta passagem representa uma abstracção significativa relativamente à razão inicialmente considerada e que, por isso, é necessário assegurar que os alunos entendem o significado de tal proporção.

[77] Ou seja a relação entre a quebra e o carregamento inicial é descrita através do conceito de razão. Intuitivamente essa razão é uma forma multiplicativa de compararmos duas quantidades **a** e **b**. A divisão é a operação que usamos para comparar a e b, o quociente a/b representa o resultado dessa operação.

Alínea b)

Ainda que, num primeiro olhar, o aluno possa ser tentado a dizer que a quebra foi menor no segundo carregamento (gengibre), este deverá ser conduzido a concluir que o conhecimento da quebra sofrida em cada um dos carregamentos não permite ter uma ideia correcta sobre qual foi o carregamento que sofreu a maior quebra. Ou seja, é necessário orientá-lo de modo a que sinta necessidade de entrar em linha de conta com os totais a que essas quebras se referem. Ora, esses totais são diferentes. No primeiro caso, a quebra de 400 quintais refere-se a um carregamento de 4000 quintais de pimenta e no segundo caso, a quebra de 330 quintais refere-se a um carregamento de 3000 quintais de gengibre.

Assim, para podermos comparar as quebras em cada uma das mercadorias é necessária outra abordagem que não a resultante do cálculo do valor dessa quebra ou da escrita da razão entre a quebra e o total inicial.

Temos dois modos de resolver este problema.

- Um deles consiste em calcular o valor de cada uma das razões. Tendo presente que a operação da razão é a divisão, então o valor de cada uma das razões é o quociente entre as duas quantidades, respectivamente igual a 0,10 e 0,11:

$$\frac{400}{4000} = 0{,}10$$

$$\frac{330}{3000} = 0{,}11$$

- Uma outra forma de encarar o problema é tentarmos exprimir cada uma das razões como uma razão com o mesmo consequente, ou seja com consequente 100.

$$\frac{400}{4000} = \frac{10}{100} \quad \text{e} \quad \frac{330}{3000} = \frac{11}{100}.$$

Podemos assim concluir que por cada 100 quintais de gengibre a quebra durante a viagem foi de 11 quintais e que, portanto, a quebra sofrida pelo gengibre foi ligeiramente superior à da pimenta.

Transmitir aos alunos que uma forma comum de encarar as razões $\frac{10}{100}$ e $\frac{11}{100}$ é a de dizer que a quebra de pimenta foi de 10 por cento e que a quebra de gengibre foi de 11 por cento, respectivamente. Deve ficar claro que a expressão "por cento" significa "por cada cem". O conceito de percentagem surge, assim, como um caso especial de uma razão cujo consequente é igual 100.

Importa também relacionar as diferentes formas de representar uma percentagem, nomeadamente com a sua representação decimal resultante do cálculo da razão:

$$10\% = \frac{10}{100} = 0{,}10 \qquad\qquad 11\% = \frac{11}{100} = 0{,}11$$

A tarefa permite pois salientar vários aspectos relativos ao conceito de percentagem, tais como:

- A percentagem é uma forma de referir uma relação entre quantidades e não é mais do que uma razão cujo consequente é 100;
- Quando é referida uma percentagem devemos começar por identificar a que é que ela se refere (relação entre volumes, massas, …);
- O termo "por cento" e o símbolo % significam "por cada cem";
- A convenção de relacionarmos algo com 100 capacita-nos a fazer comparações de forma eficaz;
- Uma percentagem pode ser representada de forma equivalente através de um número decimal, ou de uma fracção.

(d) Revisão da resolução

A última fase da resolução de qualquer problema matemático tem a ver com a revisão e reflexão do processo de resolução, isto é, com a análise da forma como se chegou à solução de modo a consolidar as aprendizagens matemáticas propiciadas pelo problema, nomeadamente no que diz respeito ao significado de razão, de proporção e de percentagem.

♦ Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á essencialmente na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

BARATAR MERCADORIAS

Durante séculos em muitos países da Europa e, em particular em Portugal, foi comum uma certa forma de negócio que consistia na troca de mercadorias entre si, muitas vezes sem que o negócio envolvesse qualquer pagamento em dinheiro. À forma de fazer negócio dava-se o nome de ***barata***.

Quando dois homens de negócios trocavam as respectivas mercadorias, era hábito aumentar o preço de ambas. Isto é, o preço da mercadoria no *barato* era mais elevado do que se esta fosse vendida a dinheiro. Ora, na tentativa de obter um lucro maior, alguns mercadores tentavam colocar a sua mercadoria à troca a um preço comparativamente mais elevado do que o outro fazia com a dele. Por esse motivo, os mercadores tinham de estar atentos de modo a evitar ser enganados e trapaceados, exigindo-se que soubessem garantir a igualdade do negócio, isto é, que soubessem usar a Matemática.

Resolve o seguinte problema:

Dois mercadores, André e Joane, querem *baratar* ferro por chumbo. André tem o ferro e o quintal do ferro vale, a dinheiro contado, 3 cruzados e, no barato, André põe-o a 4 cruzados. Joane tem o chumbo e o quintal de chumbo vale, a dinheiro contado 6 cruzados. Pergunto: a quanto deve Joane meter o chumbo no barato para que o barato seja igual e nenhum vá enganado?[78]

[78] Adaptado Bento Fernandes, Prática d'Arismética, 1555, transcrito em Marques de Almeida (1994b, p.137).

TAREFA

Resolução do problema “*Baratar* Mercadorias”.

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico matemático: Proporcionalidade directa. Proporções.

O problema proposto nesta tarefa retrata uma situação real respeitante a uma forma de transacção comercial muito habitual em épocas em que o dinheiro escasseava ou, como afirma Almeida (1994b, p. 264), era “escandalosamente caro, por força da usura e dos juros elevados”. Deste modo, *baratar* ou trocar/permutar uma coisa por outra, assumia-se como uma prática comercial corrente da sociedade mercantil dos séculos XVI e XVII.

Apresenta-se aqui uma das formas mais simples que esse tipo de negócio assumia e que corresponde a uma situação em duas pessoas queriam baratar uma só mercadoria. Outra, mais complexa, envolvia também a permuta das mercadorias mas um dos parceiros de negócio queria parte em dinheiro vivo ou contado. Finalmente, existia uma outra forma de *barato* que não envolvia qualquer pagamento em dinheiro vivo mas em que um dos mercadores, não dispondo de imediato da mercadoria, contratava o tempo para a sua entrega. Em qualquer dos casos, subsistia o hábito de aumentar o preço da mercadoria quando esta era posta ao *barato*, o que levantava o problema de tentar garantir, tanto quanto possível, a equidade do negócio. A título de curiosidade, refira-se que, de acordo com vários historiadores, há muitos indícios de que esta forma de negociar foi usada por mercadores menos escrupulosos como uma forma rápida de enriquecimento. Uma das trapaças mais comuns consistia em pôr à troca mercadorias de má qualidade a um preço muito elevado. A esse problema só a experiência do mercador podia dar resposta. Porém, a matemática pode ajudar a garantir a equidade do negócio, exigindo-se que seja igual em ambas as mercadorias, a relação entre o preço no *barato* e a dinheiro contado. Por exemplo, se um dos mercadores duplica o preço da mercadoria no *barato* em relação ao seu preço a dinheiro, então o parceiro de negócio deve fazer o mesmo. Isto é, exige-se que sejam iguais as razões entre os preços no *barato* e a dinheiro contado. O problema remete assim para a aplicação de técnicas matemáticas em contextos sociais e económicos concretos.

O conceito de proporção surge neste problema como uma forma de garantia que a transacção é justa para ambos os intervenientes, independentemente dos produtos transaccionados. Assim, considera-se que o problema pode servir como uma ponte para conectar os conceitos de razão e proporção e, simultaneamente, desenvolver nos alunos o raciocínio proporcional.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

Conhecimento matemático

- Utilizar os conceitos de razão e de proporção para modelar o problema
- Calcular um termo desconhecido de uma proporção

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Delinear uma estratégia de resolução e executar os cálculos, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Apresentar ideias e processos matemáticos, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver o interesse por aspectos do seu país
- Reconhecer e valorizar o papel da matemática para a resolução de problemas em vários sectores da vida social

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – uma cópia da tarefa “*Baratar* Mercadorias”

♦ Introduzir a tarefa como um desafio e contextualizá-la.

- Releva-se como importante a discussão, com os alunos, de vários aspectos envolvidos na situação apresentada. Por exemplo, aspectos de natureza ética como sejam as relacionadas com o princípio da transparência e da boa-fé de ambos os intervenientes. A título de curiosidade, pode ser explicado aos alunos que esta forma de negociar foi usada por mercadores pouco escrupulosos como uma forma rápida de enriquecimento, quando punham à troca mercadorias de má qualidade a um preço muito elevado. Nesse caso, a aplicação de técnicas matemáticas era manifestamente insuficiente para garantir que se tratava de um bom negócio para ambos os intervenientes. De facto, os mercadores que agiam por má fé escondiam-se por detrás da segurança e da aparente transparência que a aplicação de regras matemáticas conferia ao negócio para trapacearem outros e obterem grandes lucros. Este era um problema que só a experiência do mercador permitia contornar, pois a matemática não pode ajudar em situações em que alguns agem por má fé, com a intenção de enganar os outros.
- Será também de questionar os alunos sobre as motivações que, em sua opinião, poderiam estar por detrás da elevação do preço da mercadoria quando esta era posta à troca. Um dos motivos teria, certamente, a ver com o facto de o mercador preferir vender a dinheiro contado, dado que a obtenção de dinheiro vivo era fundamental para a sua actividade.
- Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas:

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta

Após a leitura do problema, devem ser postas aos alunos algumas questões sobre o mesmo, que assegurem a compreensão do enunciado e, em particular, a identificação da questão do problema.
Os alunos devem, nesta fase, ser incentivados a traduzir o problema por palavras suas e a registar os dados e a questão do problemas e, então, a estabelecer um plano de resolução.

(b) Estabelecimento de um plano de resolução

Como verificar que existe equidade na *barata* entre Pedro e Joane? Esta é uma pergunta que deve ser posta aos alunos e discutida de modo a chegar-se à ideia de que é necessário comparar a relação existente entre os preços a dinheiro e à troca, de cada uma das mercadorias.

A representação dos dados na forma de tabela pode ajudar os alunos a identificar alguma regularidade ou a identificar um problema relacionado que lhes permita percepcionar que o problema pode ser modelado por uma igualdade entre razões. Por exemplo:

	Ferro	Chumbo
Dinheiro contado	3	6
Barata	4	?

Por exemplo, os alunos podem observar que o preço do chumbo é o dobro do preço do ferro; essa constatação pode levá-los a intuir que o preço do quintal de chumbo, quando este é posto à troca, também deve ser o dobro do preço do quintal de ferro. Outra possibilidade a que o professor deve estar atento é a do aluno observar que o preço do ferro na *barata* excede em 1 cruzado o preço a dinheiro contado inferindo daí, erradamente, que o preço do quintal do chumbo é de 7 cruzados.

(c) Execução do plano delineado

A resolução do problema passa, assim, por perceber que o negócio só será justo para ambos os intervenientes se forem iguais as razões entre os preços a dinheiro vivo e por permuta (*barata*):

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{?}$$

Os alunos podem observar que o preço do chumbo é o dobro do preço do ferro; essa constatação pode levá-los a intuir que o preço do quintal de chumbo, quando este é posto à troca, também deve ser o dobro do preço do quintal de ferro.

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

Esta etapa inclui ainda a verificação de que a solução faz sentido, no contexto do problema. Comparemos essa relação através do cálculo da razão entre os dois preços:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \ \text{ e } \ \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Poderá ser pedido aos alunos que expliquem o que representa o valor da razão 0, 75 (o preço do quintal de qualquer dos produtos em dinheiro é 0,75 do preço por permuta).

Se algum aluno concluiu, erradamente, que o preço do quintal de ferro na *barata* deve ser de 7 cruzados, o cálculo das razões respectivas mostra claramente que, nesse caso, Joane ficaria prejudicado. De facto, $\frac{6}{7} \approx 0{,}86$. As duas razões têm pois que ter o mesmo valor.

(e) Revisão da resolução

Nesta fase, em que se pretende que o aluno proceda a uma revisão do caminho seguido para a obtenção da solução, há que dar uma particular atenção à articulação da actividade matemática desenvolvida com a ideia de igualar as razões para garantir a equidade do negócio. A apreciação do caminho seguido para se chegar à solução deve tornar claro que a igualdade no negócio ocorre sempre que as razões entre os dois preços são iguais, mantendo-se, dessa forma, constante a relação entre os dois preços. O problema pode assim surgir como um meio para a introdução do conceito de proporção. O professor deve então informar aos alunos que uma igualdade entre razões se designa de proporção[79]. E ainda que, nesta situação, o preço na *barata* é dito proporcional ao preço em dinheiro vivo.

♦ Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á essencialmente na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

[79]Uma proporção é o conceito matemático usado para traduzir que se mantém constante a relação entre duas quantidades (relação essa que é traduzida por meio de uma razão).

Extensão da tarefa:

Propor aos alunos a resolução deste outro problema relativo a outra barata entre André e Joane:

> Os mesmos André e Joane, fizeram outra *barata*. André tinha cera e o quintal dela valia a dinheiro 10 cruzados e na *barata* meteu-o a 15. Joane tinha açúcar e pôs o quintal, na dita *barata*, a 3 cruzados mais do que valia a dinheiro. E assim foi a *barata* boa e sem engano algum. Pergunta-se, agora: quanto valia, segundo isto, o quintal do açúcar de Joane e a como foi metido na *barata*?

COMPANHIA DE MERCADORES

No período áureo dos descobrimentos era frequente, dois ou mais indivíduos associarem-se de forma a poderem concretizar certos negócios, muitas vezes ocasionais. Formavam, então, uma sociedade conhecida por Companhia, para a qual cada um dos sócios entrava com uma determinada quantia de dinheiro. Como muitos desses negócios eram ocasionais, uma vez terminados, era necessário dividir os lucros ou as perdas entre os companheiros. Ora, nem sempre os parceiros entravam com quantias iguais e, por isso, era importante garantir que na repartição dos lucros (ou na partilha de prejuízos) se entrasse em linha de conta com o dinheiro investido por cada um dos companheiros. Para tal, era usual fazer-se um contrato.

Lê e resolve o problema seguinte que fala de uma companhia formada por dois mercadores Pedro e Luís:

Dois mercadores Pedro e Luys fizeram uma companhia na qual Pedro pôs 20 cruzados e Luys 30. Os dois ganharam 35 cruzados. Pergunto: quanto caberá a cada um destes companheiros[80]?

Nota: tem em conta que acabada a sociedade o contrato estabelecia que o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital com que cada um entrou na Companhia.

[80] Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, transcrito em Marques de Almeida (1994a, p. 263).

TAREFA

Resolução do problema “Companhia de Mercadores”

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico matemático: Proporcionalidade directa

Com os descobrimentos portugueses intensificaram-se as actividades comerciais e emergiu uma nova classe social, a dos mercadores. Desde os pequenos negócios ocasionais até aos grandes negócios, era frequente a associação de dois ou mais indivíduos que entravam cada um com uma determinada quantia de dinheiro, isto é com um determinado capital ou cabedal, como então se dizia. A este tipo de associação chamava-se Companhia. De acordo com o contrato normalmente estabelecido entre os companheiros, uma vez terminado o negócio, o lucro ou a perda de cada um dos companheiros era calculado de acordo com o estipulado no contrato. Deste modo, todas as aritméticas portuguesas incluíam um «capítulo» relativo às chamadas regras de companhia que mais não eram do que a aplicação de *regra de três, com variações que contemplam situações sem e com tempo, com definição ou não de juro* (Almeida, 1994a, p. 261). Por exemplo, Ruy Mendes distingue quatro regras de companhia, relativas, respectivamente, ao cálculo dos lucros/perdas de acordo com: (i) a quantia investida por cada companheiro ou seja, proporcionalmente a essa quantia (ii) o contrato de distribuição de lucros segundo uma condição pré-definida entre os companheiros; (iii) a ocorrência de alguma alteração relativamente ao tempo de associação pré-establecido pelos companheiros; (iv) o contrato que estabelecia condições relativamente ao tempo de associação e à repartição dos lucros/perdas (Almeida,1994b, p. 87).

O problema proposto nesta tarefa retrata uma situação real de dois indivíduos que aproveitam uma oportunidade de negócio e se associam, entrando cada um com uma determinada quantia em dinheiro. Uma vez concretizado o negócio, os dois companheiros repartem os lucros, de acordo com o capital de entrada de cada um deles.

Qualquer negócio comporta sempre um certo risco e esse facto é determinante para que se possa compreender que, uma vez terminado o negócio, não faz sentido proceder a uma partilha equitativa dos lucros ou das perdas. Neste caso, um dos sócios entrou com um capital superior ao do outro e, portanto, correu um maior risco no negócio. Assim, a aplicação de um raciocínio proporcional na repartição dos lucros é a melhor forma de garantir uma certa justiça no negócio.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

Conteúdo matemático

- Compreender os conceitos de razão, proporção e proporcionalidade directa
- Reconhecer situações modeláveis por uma proporção
- Utilizar o conceito de proporção para modelar uma situação
- Resolver problemas relativos a situações de proporcionalidade directa

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Reconhecer as operações que são necessárias à resolução da situação e executar os cálculos, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Apresentar ideias e processos matemáticos, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver o interesse por aspectos do seu país
- Apreciar as ligações da Matemática com outras disciplinas escolares e o seu papel para a resolução de problemas em vários sectores da vida social

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno – uma cópia da tarefa “Companhia de mercadores”

- Através da leitura do texto introdutório, contextualizar e apresentar a tarefa como um desafio. A propósito do termo *companhia*, solicitar aos alunos que apresentem exemplos de situações actuais onde o termo seja aplicado (Companhia de Seguros, Companhia Nacional de Bailado, Companhia das Lezírias, Companhia de Teatro, Real Companhia Velha, Companhia de Jesus, …) de modo a salientar a ideia de que este termo pode significar um grupo de pessoas que se organizam em torno de um fim comum. No problema, trata-se de uma associação de duas ou mais pessoas com a finalidade de concretizarem uma oportunidade de negócio. Deve ficar claro para o aluno que uma Companhia exige que os seus elementos fixem um determinado conjunto de regras, nas quais se inclui a decisão de como repartir os lucros ou partilhar os prejuízos.

- Orientar os alunos para a execução das várias etapas de resolução de problemas:

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta

Esta fase implica, antes de mais, uma leitura atenta do enunciado e a compreensão do vocabulário. Por exemplo, importa que os alunos compreendam o significado dos termos Companhia e contrato no contexto do problema (o termo contrato pode ser encarado como um acordo entre os dois sócios/companheiros). Inclui também a identificação dos dados (montante em dinheiro com que cada um entrou na Companhia e o lucro conseguido pela Companhia) e a compreensão de que o contrato estabelecido aponta para uma repartição do lucro de acordo com o montante inicial de cada um.

(b) Estabelecimento de um plano de resolução

O estabelecimento de um plano de resolução passa pelo reconhecimento de que o contrato traduz uma situação de proporcionalidade directa, pelo que o registo organizado dos dados pode ajudar a percepcionar as razões que estão em causa e os cálculos a efectuar.

Uma vez que o enunciado refere explicitamente que estamos perante um problema de proporcionalidade directa, os alunos devem ser orientados no sentido de registarem quais são as quantidades envolvidas no problema e a que é que estas se referem. Concretamente, o problema respeita a quantidades relativas à grandeza dinheiro e envolve um «capital inicial» e um «lucro». Pedro entra na Companhia com 20 cruzados e Luys com 30 cruzados, conseguindo os dois em conjunto um capital inicial de 50 cruzados. Investidos estes 50 cruzados, o lucro resultante foi de 35 cruzados.

O problema envolve duas quantidades, «o capital inicial» e «o lucro conseguido», que são directamente proporcionais por exigência do contrato feito pelos mercadores. Por forma a salientar a relação de proporcionalidade directa entre as duas quantidades, poderá ser vantajosa a representação dos dados num diagrama ou numa tabela de dupla entrada, como a seguinte:

	Companhia	Pedro	Luys
Capital inicial	50	30	20
Lucro	35	**?**	**?**

Pretende-se assim que o aluno conclua que o lucro de cada um dos companheiros deve ser tal que a razão entre este e o seu capital de entrada deve ser igual à razão entre o lucro final da Companhia e o respectivo capital inicial. Isto é, que devem ser iguais os quociente entre o lucro e o capital inicial.

(c) Execução do plano delineado

Para o cálculo do lucro do Pedro, o contrato conduz a uma igualdade de razões ou uma proporção:

$\frac{35}{50} = \frac{?}{30}$, na qual um dos meios é desconhecido.

Para a determinação do lucro que cabe a Pedro, os alunos podem, por exemplo, aplicar a propriedade das proporções segundo a qual qualquer meio é igual ao quociente do produto dos extremos pelo outro meio:

$$35 \times 30 \div 50 = 1050 \div 50 = 21$$

Se os cálculos estiverem correctos, Pedro tem a receber 21 cruzados.

De modo idêntico, calcula-se o lucro de Luys:

	Companhia	Luys
Capital inicial	50	20
Lucro	35	**?**

Da proporção $\frac{35}{50} = \frac{?}{20}$ resulta que:

$$35 \times 20 \div 50 = 700 \div 50 = 14.$$

Isto é, Luys tem a receber 14 cruzados.

Importa que os alunos verifiquem a solução encontrada para o problema, isto é, que confirmem que o lucro e o capital inicial são de facto directamente proporcionais.

O cálculo do quociente entre o lucro e o capital inicial permite concluir que assim é:

$$\frac{35}{50} = \frac{21}{30} = \frac{14}{21} = 0{,}7$$

O quociente é constante e por isso o «lucro» é directamente proporcional ao «capital inicial». A constante de proporcionalidade - 0,7- representa neste caso que por cada cruzado investido, cada um dos companheiros tem um lucro de 0,7 cruzados.

(d) Rever a resolução

Esta fase requer uma apreciação e revisão do processo de resolução e a procura de ligações a conhecimentos já anteriormente adquiridos. É também de destacar, mais uma vez, a presença e o papel da matemática na vida corrente, numa multiplicidade de situações.

- Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á essencialmente na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

O COMÉRCIO DE PANOS ENTRE OS REINOS DE PORTUGAL E CASTELA

O problema seguinte baseia-se numa situação apresentada num livro publicado em Lisboa em 1624 e intitulado Flor da Arismética Necessária. O autor da obra, que terá sido um homem de negócios muito experiente, comerciante na cidade do Porto, apresenta-nos uma situação referente ao comércio de panos entre Portugal e Castela, que te pedimos que ajudes a esclarecer.

O côvado tem três palmos. Seda e panos vendem-se por côvado. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.

Entendido o valor das medidas: pergunta-se porque é que o mercador português ganha sempre no negócio[81]?

[81] Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida (1994b, p. 230).

TAREFA

Resolução do problema "O Comércio de panos entre os reinos de Portugal e Castela"

ENQUADRAMENTO

Ano de escolaridade: 6º Ano

Tópico matemático: Percentagem.

Propõe-se nesta tarefa a exploração de uma situação que expõe o aproveitamento feito pelos mercadores portugueses da falta de uniformidade das unidades de medida existente antes da adopção do sistema de unidades que hoje usamos. Nesse tempo, Portugal e Castela, reinos vizinhos, não usavam as mesmas unidades para medir os panos e, além disso, em Portugal, a unidade usada dependia do tipo de pano que se queria medir. Curiosamente, essa realidade era explorada pelos mercadores portugueses em seu proveito, pois, como é referido no enunciado, consegue sempre obter lucro.

Trata-se de um problema que envolve o conceito de percentagem, mais concretamente a interpretação de uma percentagem de lucro num contexto de comércio de tecidos. De facto, ambas as percentagens referidas na tarefa respeitam a uma fracção de uma unidade de comprimento que sobra ao mercador quando compra o pano usando uma unidade de medida cujo comprimento é maior do que aquela que vai usar posteriormente na revenda. A tarefa exige a identificação da grandeza à qual a percentagem se refere, aspecto que nem sempre é clarificado quando se trabalha com percentagens. Além desse aspecto, a tarefa envolve o estabelecimento de relações entre fracções, decimais e percentagens, sendo de destacar a representação aproximada da fracção 1/3 em percentagem, situação que ocorre sempre que se pretende converter uma fracção não decimal em percentagem.

DIMENSÕES DA COMPETÊNCIA MATEMÁTICA A DESENVOLVER

Conhecimento matemático

- Interpretar o conceito de percentagem no contexto do problema
- Utilizar o conceito de fracção/razão para modelar a situação
- Traduzir uma fracção/razão por uma percentagem

- Relacionar diferentes formas de apresentar uma percentagem

Capacidades matemáticas

- Interpretar a informação relativa ao problema, isto é, identificar os dados, as condições e o objectivo do problema
- Delinear e implementar uma estratégia de resolução, avaliando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados
- Rever e reformular, se necessário, o processo de resolução
- Formular e testar conjecturas
- Expor e justificar o processo de resolução com base em noções e conceitos matemáticos
- Apresentar ideias e processos matemáticos, tanto oralmente como por escrito, utilizando vocabulário e simbologia apropriados à situação
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa

Atitudes

- Desenvolver confiança e autonomia na resolução de situações que envolvam a matemática
- Desenvolver o interesse por aspectos do seu país
- Apreciar o papel da matemática para a resolução de problemas em vários sectores da vida social

PROPOSTA DE EXPLORAÇÃO DIDÁCTICA

Materiais: Para cada aluno - uma cópia da tarefa "O Comércio de panos entre os reinos de Portugal e Castela".

♦ Integrar o problema no seu contexto social e cultural e fazer notar que, na época a que o texto reporta, Portugal estava sob o domínio filipino e, no entanto, o mercador português consegue, até certo ponto, "enganar" o mercador de Castela.

(a) Familiarização e compreensão da situação exposta

A primeira etapa da resolução de qualquer problema prende-se com a compreensão da situação exposta. Isso torna-se particularmente pertinente em problemas históricos que não só têm uma linguagem muito própria e pouco habitual, como envolvem termos e unidades que os alunos não conhecem. Assim, é importante orientar o aluno, através de questionamento, para a compreensão da situação exposta, nomeadamente para a percepção de que:

- O texto refere o comércio de diferentes tipos de panos entre os reinos de Portugal e Castela; o mercador português vendia a Castela linho da Índia e panos de tear e comprava a Castela seda e panos finos.
- Está envolvida a medição de comprimentos e o uso de diferentes unidades de comprimento, algumas de Portugal, outras de Castela.

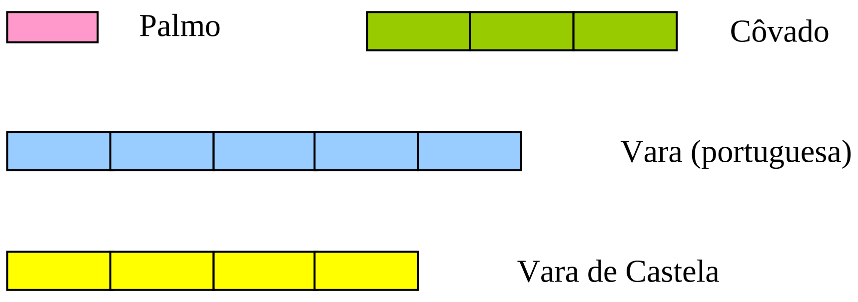
Assim, há que identificar quais eram essas unidades, em que panos eram usadas e como é que se relacionam entre si. Com essa finalidade, o professor pode colocar questões, como por exemplo:

i) Qual era a unidade usada em Portugal para medir e vender a seda? E para os panos de linho da Índia?

ii) O texto fala de uma unidade usada no Reino de Castela. Qual é essa unidade? Em que panos era usada?

iii) O que é que quer dizer a expressão a vara portuguesa é a vara e quarta castelhana? Faz um desenho que explique a tua resposta.

A sugestão da construção de representações figurativas das unidades de comprimento referidas no texto pode contribuir para que os alunos sejam capazes de delinear um plano de resolução. O facto de todas elas poderem ser referenciadas em relação ao palmo, facilita a sua representação.



Esta etapa inclui também a identificação da questão do problema, que pode ser desdobrada em duas sub-questões:

i) Porque é que o mercador português afirma que nas sedas que vêm de Castela se ganha na medida 33%?

ii) Porque é que nos panos de linho que o mercador português vende a Castela, este consegue também ganhar 25%?

(b) Estabelecimento de um plano de resolução

Para que o aluno seja capaz de delinear um plano de ataque ao problema (que passa pelo entendimento de que o ganho do mercador só pode resultar do uso que ele faz das unidades) importa que fique clara a desigualdade dos comprimentos do côvado, da vara portuguesa e da vara castelhana. Outro dado importante a ter em conta, nesta fase, é que, de acordo com o texto, em Portugal, o côvado era usado na venda de panos finos como a seda, mas que, para os panos de linho da Índia, era usada a vara, uma unidade de maior comprimento (note-se que a vara excede o côvado em dois terços de côvado)[82].

Deste modo, é fundamental assegurar que os alunos compreendem o contexto em que decorre a situação exposta. Através de questões claras e objectivas, deve dar-se conta que, não existindo, no texto, qualquer referência a unidades monetárias, o ganho do mercador não deve ser o resultado do aumento do preço dos tecidos na revenda. Ora, como as unidades usadas na época diferiam entre si, pode conjecturar-se que o lucro é um lucro em pano. Aliás, a expressão *ganha-se na medida* parece apoiar esta interpretação.

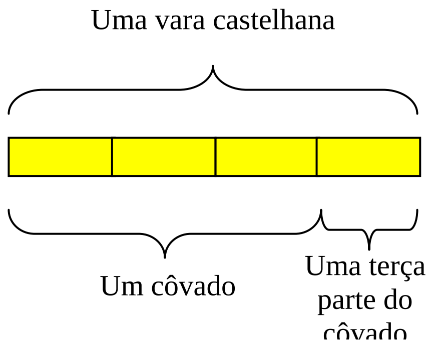
O aluno deve ser orientado no sentido de formular uma conjectura relativa à forma como o mercador português mede os panos em Portugal e em Castela, para que, na revenda dos mesmos, lhe sobre sempre pano. Uma conjectura possível e plausível é que, em Castela, o mercador compra e vende em varas de Castela e, em Portugal, faz uso das unidades de Portugal.

[82] Certamente que, mesmo assim, o preço do côvado de seda seria bastante superior ao do linho da Índia. Porém, o facto de serem usadas unidades com uma diferença de comprimento tão acentuado é um indicador da raridade da seda e de outros panos finos.

(c) Execução do plano delineado

A resolução do problema passa, assim, por testar as hipóteses formuladas na etapa anterior.

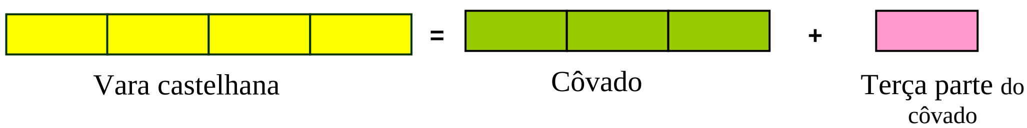
Analise-se o que se passa com o comércio da seda. Em Castela, a seda é medida em varas de Castela e, em Portugal, é medida em côvados.



Uma representação como a anterior, cuja barra rectangular representa uma vara castelhana de pano, permite salientar que com essa vara de pano, o mercador faz um côvado de pano e ainda lhe sobra pano. Esse pano que sobra, após retirar 1 côvado, representa lucro para o mercador. Ora, o pano que sobra representa a terça parte do côvado.

O mercador quando compra seda e outros panos em Castela faz uso das unidades de medida de Castela

O mercador revende a seda e outros panos em Portugal em côvados



Com uma vara castelhana de seda, o mercador obtém um côvado e sobra-lhe um pedaço de seda cujo comprimento é $\frac{1}{3}$ do côvado. A representação decimal de $\frac{1}{3}$ 0,333…. Tomando como seu valor aproximado 0,33, equivalente a $\frac{33}{100}$ ou 33%, justifica-se o lucro referido no problema.

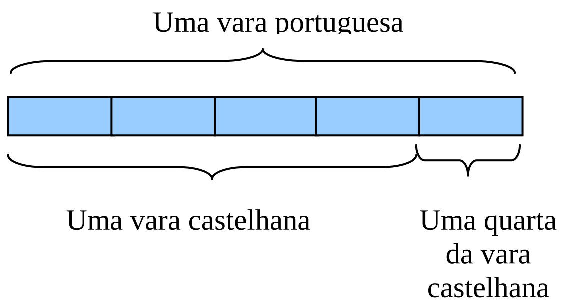
$$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

Mostra-se, desta forma, que nas sedas de panos que vêm de Castela se ganha aproximadamente 33%.

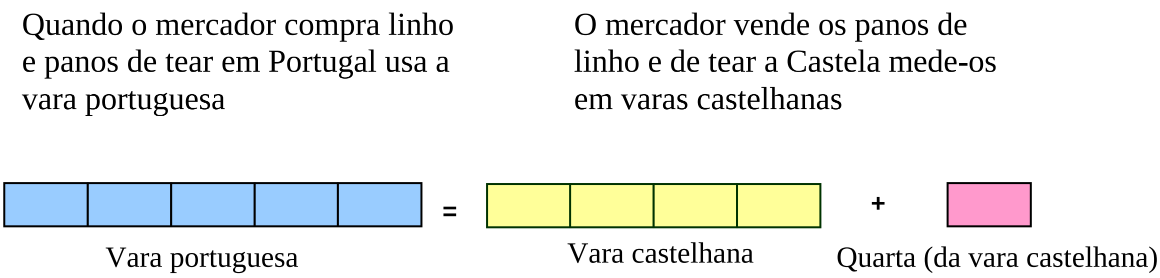
Uma outra forma de encarar o problema pode ser a de considerar que o mercador português, com três varas de seda consegue obter, em Portugal, 4 côvados de seda. Portanto, ganha um côvado em cada três varas. Relação traduzível por meio da razão $\frac{1}{3}$, cuja representação decimal é aproximadamente 0,33 que, em percentagem, se traduz por 33%.

Falta explicar o lucro do mercador português quando vende panos de linho e de tear a Castela. Teste-se a hipótese de o mercador, que compra em Portugal panos de linho e de tear medidos em varas portuguesas, quando os transacciona com Castela, o fazer em varas de Castela (unidade menor que a portuguesa).

Mais uma vez, a representação de uma vara portuguesa, usada na medição do pano de linho e tear, sugere a validade da hipótese formulada:



Torna-se claro que por cada vara portuguesa de pano, o mercador obtém uma vara castelhana e sobra-lhe $\frac{1}{4}$ de vara de pano, isto é, 25% do tecido. Assim se pode explicar a afirmação *nas mercadorias que deste Reino vão para Castela ganha-se 25%*.



Com uma vara de Portugal, o mercador obtém uma vara de Castela e sobra-lhe um pedaço de pano cujo comprimento é $\frac{1}{4}$ da vara de Castela.

Como $\frac{1}{4} = 0{,}25$, pode concluir-se que nos panos que de Portugal vão para Castela se ganha 25%.

(d) Revisão da resolução

Resolvido o problema, isto é, encontrada a solução para o ganho do mercador português, a revisão da resolução deve permitir evidenciar que ambas as percentagens respeitam a uma fracção de uma unidade de comprimento que sobra ao mercador quando compra o pano, usando uma unidade de medida cujo comprimento é maior do que o da unidade que vai usar, posteriormente, na revenda dos panos.

A situação exposta no problema pode ser discutida com os alunos, chamando-lhes a atenção para aspectos curiosos dos antigos sistemas de unidades e que são revelados pelo problema, como sejam:

- o uso em Portugal de unidades de comprimento diferentes para a medição de panos;
- o uso de unidades de medida não uniformes nos reinos de Portugal e Castela;
- o aproveitamento que o mercador português consegue fazer dessa situação.

Este último aspecto conduz inevitavelmente a questões relacionadas com a ética do mercador português que beneficia em proveito próprio da desigualdade das unidades de medida[83] e também à percepção do conhecimento matemático por detrás da situação exposta. A este propósito, a discussão da solução encontrada deve contribuir para o desenvolvimento do sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos em situações do quotidiano.

- Avaliação: A avaliação da actividade matemática desenvolvida pelo aluno a partir desta tarefa basear-se-á, essencialmente, na observação da participação do aluno. Através das explicações verbalizadas oralmente ou por escrito, podem obter-se muitas informações

[83] Durante quanto tempo a manutenção de unidades não uniformes não terá sido do interesse de muitos dos que delas beneficiavam?

úteis acerca do raciocínio e estratégias seguidas na resolução do problema, bem como de eventuais concepções erróneas sobre a modelação matemática do problema seguida pelo aluno. Só com base nessa observação o professor pode formular questões que reorientem, se necessário, o pensamento do aluno.

Referências Bibliográficas

Albuquerque, L. (Dir.) (1994). *Dicionário de história dos descobrimentos portugueses*. Volume II. Lisboa: Círculo de Leitores.

Katz, V. (1998). *A History of Mathematics* (Second Edition). USA: Addison Wesley.

Marques de Almeida, A. A. (1994a). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, Volume I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

Marques de Almeida, A. A. (1994b). *Aritmética como Descrição do Real (1519-1679)*, volume II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

ME (1991). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 2º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico.

ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Básico.

Mendes, R. (1540). *Prática d'Arismética*. Lisboa: Germão Galharde.

Nicolas, G. (1519). *Tratado da Prática D' Arismétyca*. Edição fac-similada. Porto: Livraria Civilização Editora,1963.

Pacheco, G. (1624). *Flor da Arismética necessária*. Lisboa: Geraldo da Vinha.

Peres, D. (1947). *Regimento das Cazas das Índias e Mina*. Coimbra: Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra.

Santos, M. E. M.; Rodrigues, U. L. G. (1989). A feitoria-fortaleza e o comércio transcontinental da Coroa Portuguesa no séc. XVI. Em Luís Albuquerque (Dir.), *Portugal no Mundo*, Vol. II (pp. 557-570). Lisboa: Alfa.

Siebert, D. (2002). Connecting Informal Thinking and Algorithms: The Case of Division of Fractions. In Bonnie Litwiller e George Bright (Eds), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions. 2002 Yearbook* (pp. 247-256). Reston: NCTM.

Smith, D. E. (1951). *History of Mathematics*, Vol. I e II, New York: Dover Publications.

Anexo 1

Questionários (QT1)

Com este questionário pretende-se recolher algumas informações relativas ao seu percurso escolar, em particular, à sua relação com a matemática e às razões que a levaram a ingressar num curso de formação de professores de matemática. Solicita-se que dê uma resposta tão completa quanto possível às questões formuladas. Se necessário pode usar o verso das folhas para completar a sua resposta. As suas respostas serão usadas exclusivamente para fins da investigação e o anonimato e a confidencialidade será completamente respeitado.

- Dados Biográficos –

1. Nome: ____

2. Data de nascimento: __ / __ / __

3. Natural do Concelho de: ________________ Distrito de____________________

4. Em tempo lectivo vive na sua residência habitual? Sim ☐ Não ☐

5. Se não reside com o agregado familiar, em tempo lectivo, com que regularidade vai a casa?

Fins de semana ☐ uma vez por mês ☐ nas férias lectivas ☐

outra periodicidade ☐ Qual? _____________

6. Estado civil: Solteira ☐ Casada ☐ Outra situação ☐

5. Presentemente, é trabalhadora estudante? Sim ☐ Não ☐

Em caso afirmativo indique a sua actividade profissional _____________________

____

Anexo 1

Questionários (QT1)

- Percurso Escolar no Ensino Básico e Secundário –

Recorde o seu percurso escolar nos <u>ensinos básico e secundário</u>.

1. No <u>ensino básico:</u>

1.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê?____

____

1.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☐

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ______________________

1.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? ____

____

1.4 Gostava de Matemática? Sim ☐ Não ☐

Porquê? ____

____

1.5 De entre as áreas da Matemática que fazem parte do currículo da escolaridade básica, ordene as abaixo indicadas de acordo com as suas preferências enquanto aluna.

(A) Álgebra
(B) Estatística e Probabilidades
(C) Geometria
(D) Números e Cálculo
(E) Funções

_____________ /_____________ / ____________ / _____________ / __________

(1ª preferência) / (2ª preferência) / (3ª preferência) / (4ª preferência) / (5ª preferência)

1.6 Da lista anterior, em qual ou quais das áreas sentiu mais dificuldades?

____

Porquê? ____

Anexo 1

Questionários (QT1)

2. No <u>ensino secundário:</u>

2.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? ____

____

2.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☐

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ____________________

2.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? ____

____

2.4 Gostava de Matemática? Sim ☐ Não ☐

Porquê? ____

____

Que classificação obteve a Matemática no final do ensino secundário? __________

(na escala de 1 a 20).

2.6 Como estudava Matemática (por exemplo: sozinha, com apoio, regularmente, resolvendo muitos exercícios, …)? ____________________________

____

3. Relativamente ao ensino básico ou secundário, tente recordar-se de um professor de Matemática de quem tenha gostado (não se refira ao nome).

Porque gostou desse professor? ______________________________

____

____

4. Tente agora recordar-se de um professor de Matemática do ensino básico ou secundário de quem não tenha gostado. (não se refira ao nome).

Porque não gostou desse professor?____________________________

____

____

Anexo 1

Questionários (QT1)

- Percurso Escolar no Ensino Superior –

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação.

1. O curso que frequenta foi a sua primeira opção? Sim ☐ Não ☐

Em caso de resposta negativa, qual foi a sua primeira opção? ________________________

2. Em qualquer dos casos, indique a ou as razões que a levaram a optar por uma Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências? ____________________________

____

3. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente? 1º ciclo ☐ 2º ciclo ☐

Porquê? ____

____

4. Está a terminar a Prática Pedagógica no primeiro ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação, em relação à dimensão lectiva, para ser professora neste ciclo?

Genericamente:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☐ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☐ Muito bom ☐

4.2 Em relação à Matemática:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☐ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☐ Muito bom ☐

5. Qual o balanço que faz da disciplina de Prática Pedagógica:

5.1 Genericamente? ____

____

5.2 No caso específico da Matemática? __________________________________

____

____

Data ___/06/05

Muito obrigada pela sua colaboração.

Anexo 1

Questionários (QT2)

Com este questionário pretende-se recolher a sua opinião sobre a formação desenvolvida na ESE, em geral (Parte I), e, de um modo particular, no que se refere ao percurso que realizámos em conjunto, entre Janeiro de 2005 e Junho de 2006 (Parte II). Relembre-se que o percurso referido envolve o trabalho conjunto desenvolvido nas disciplinas curriculares da área científica de Matemática (Geometria I, Geometria II e História e Metodologia da Matemática) e nas disciplinas de Prática Pedagógica II, IV e V. Solicita-se que dê uma resposta tão completa quanto possível às questões formuladas nas partes I e II. Se necessário pode usar o verso das folhas para responder. As suas respostas serão usadas exclusivamente para fins da investigação e o anonimato e a confidencialidade será completamente respeitado.

PARTE I

- Percurso Escolar no Ensino Superior (ESE) -

Recorde o <u>seu percurso escolar na ESE</u>.

1. No ensino superior considera-se uma aluna de que nível?

   Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐

   Porquê? ____

   ____

2. E nas várias disciplinas da área científica de Matemática (Análise Infinitesimal, Álgebra, Estatística, Teoria da Probabilidade, Geometria, Teoria dos Números, História e Metodologia da Matemática) como considera o seu nível?

   Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐

   Porquê? ____

   ____

   ____

Anexo 1

Questionários (QT2)

3. E nas disciplinas da área de Educação em Matemática (Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino) como considera o seu nível?

   Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco☐

Porquê? ____

____

4. Reprovou alguma vez no ensino superior, em disciplinas da área de Matemática/Educação em Matemática?

   Sim ☐ Não ☐

4.1 Em caso afirmativo, indique quais as disciplinas e o número de reprovações (entenda por reprovação apenas situações que implicaram uma nova matrícula na disciplina).

____

____

5. Gosta de Matemática?

   Sim ☐ Não ☐

Porquê?____

____

6. Tente caracterizar a relação que manteve com a Matemática / Educação em Matemática durante o seu curso na ESE (refira-se aos diferentes domínios do conhecimento matemático com que mais/menos se identificou, às dificuldades sentidas, aos desafios da formação …).

____

____

____

7. Quer deixar algumas sugestões de mudanças possíveis?

____

____

Anexo 1

Questionários (QT2)

8. Está a terminar a Prática Pedagógica no 2º ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação para ser professora de matemática neste ciclo?

A nível científico: Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐

A nível pedagógico/didáctico: Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

____

____

____

9. Que contributo lhe trouxe a realização de Prática Pedagógica no 1º ciclo do ensino básico para a Prática Pedagógico no 2º ciclo?

____

____

____

10. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente?

1º ciclo ☐ 2º ciclo ☐

Porquê? ____

____

____

11. Quais são as suas expectativas em relação à profissão que escolheu?

____

____

____

Anexo 1

Questionários (QT2)

PARTE II

- Percurso de Formação -

<u>Recorde o percurso de formação que fizemos em conjunto a partir de Janeiro de 2005, nas disciplinas de Geometria, História e Metodologia da Matemática e Prática Pedagógica.</u>

1. Explicite a sua opinião sobre a relevância para a sua formação como professora de matemática que atribui aos diferentes momentos do percurso de formação:

1.1. Abordagem dos conteúdos relativos a Medida e resolução de problemas históricos em Geometria

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

1.2. Seminários de sensibilização para a importância da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

1.3. Sessões de apoio à planificação da Prática Pedagógica

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

1.4. Momentos de reflexão sobre a Prática Pedagógica

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

Anexo 1

Questionários (QT2)

2. Como considera, no conjunto, a adequação à sua formação como professora de matemática das tarefas de formação propostas:

Análise de documentos curriculares

Muito adequada ☐ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐.

Análise de manuais escolares

Muito adequada ☐ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

Resolução de problemas

Muito adequada ☐ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐.

Exploração didáctica de problemas históricos

Muito adequada ☐ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

Faça um comentário global às tarefas propostas.

____

____

____

3. Qual o papel que atribui ao trabalho que desenvolveu na planificação e dinamização do módulo que lhe coube explorar na exposição "Problemas com Peso e Medida" para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

____

____

Se explorou na sala de aula um dos problemas da exposição ou algum problema que apelasse a aspectos da exposição, refira-se a essa experiência de ensino/aprendizagem.

____

____

____

Anexo 1

Questionários (QT2)

4. Qual a relevância do contributo, como futura professora de matemática, do percurso de formação a nível de:

4.1. Formação em matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

4.2. Formação em didáctica da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

____

4.3. Mudança de atitude face à matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

4.4. Mudança de atitude face ao processo de ensino e aprendizagem da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? ____

____

____

5. Como avalia a receptividade do(a) Professor(a) Cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos e que integrou na sua Prática Pedagógica?

Muito receptivo ☐ Receptivo ☐ Pouco receptivo ☐ Nada receptivo ☐

Explicite a sua resposta.

____

____

Anexo 1

Questionários (QT2)

6. Que perspectiva tem hoje relativamente à integração da história da matemática na aula de matemática?

____

____

____

7. Como sente o contributo do percurso de formação para conseguir articular na sua prática de ensino, a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (ligações entre a matemática e outras disciplinas curriculares, ligações entre a matemática e problemas do quotidiano das sociedades, ligações entre conceitos / processos matemáticos)?

____

____

____

8. Como caracteriza o ambiente de formação proporcionado (relações com a investigadora, relacionamento com a(s) colega (s) de Prática Pedagógica, relações com as colegas de turma, …)?

Muito bom ☐ Bom ☐ Razoável ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

____

____

____

Data ___/06/05

Nome: ____

Muito obrigada pela sua colaboração.

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT1)

Guião da primeira entrevista

- Prática Pedagógica –

- Gostou desta primeira experiência de Prática Pedagógica, no seu curso?

- Durante a prática de ensino de matemática no 1º CEB sentiu dificuldades na implementação dos seus planos? Quais?

- Que tipo de actividades gostou mais de implementar? Porquê?

- O que sentiu que mais interessava aos alunos? Porquê?

- Lembra-se de algum episódio que considere relevante no âmbito da sua prática de ensino do tema Grandezas e Medidas?

- Qual foi o conteúdo que mais gostou de ensinar? Porquê?

- E qual foi o que menos gostou de ensinar? Porquê?

- No final desta PP, o que é uma aula de matemática no 1º ciclo, para si, neste momento (quando dá uma aula de matemática aos meninos o que é que tem em mente)? O que é que valoriza mais no ensino da matemática no 1º ciclo?

- Qual lhe parece ter sido a reacção dos alunos à presença da câmara de filmar na aula? E a sua?

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT1)

Guião da primeira entrevista (cont.)

- Percurso de Formação –

Pense no trabalho que desenvolvemos em Geometria I e II e durante a PP.

- O nosso trabalho em conjunto serviu-lhe para a PP, isto é, teve algum reflexo na sua prática de ensino? Um apoio desses ocorreu em mais alguma área? Vale a pena? Porquê?

- O que é que achou das situações problemáticas envolvendo antigas unidades de medida propostas em Geometria? Achou-as adequadas e interessantes para a sua formação? Porquê?

- Qual ou quais lhe pareceram mais interessantes?

- Propôs alguma delas aos seus alunos de PP? Porquê?

- Além dos aspectos abordados, que outras questões gostaria que tivessem sido trabalhadas no âmbito da disciplina de Geometria e seminários de apoio à planificação para a PP do tema Grandezas e Medidas.

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT2)

Guião da segunda entrevista (Joana)

- Da resposta à questão 1.3 depreende-se que encara as sessões de apoio à prática pedagógica como muito relevantes. Refere que estas lhe proporcionaram momentos de aprendizagem ao nível de técnicas, formas e estratégias para explorar as actividades e conduzir os alunos de encontro ao que pretendia. Salienta também como muito gratificantes para o seu desempenho na prática de ensino, as discussões mantidas com a investigadora nessas sessões. Era isto que pretendia dizer?
- Relativamente à questão 2, o comentário que faz sugere que não percebeu que pergunta lhe é dirigida a si. Por favor releia a sua resposta e esclareça-me se se refere às tarefas propostas aos alunos. Creio que afirma que as considera com muito interesse e que terão tido da parte dos alunos uma aceitação muito positiva, mas eu pretendo saber a sua opinião sobre o contributo para a sua formação, enquanto professora.
- Clarifique o que quer dizer com a resposta à questão 4, em que lhe peço que avalie o contributo da participação neste percurso de formação relativamente ao enriquecimento do seu conhecimento matemático.
- Considera também como muito relevante o contributo da formação no que respeita à mudança de atitude face à matemática e ao processo ensino/aprendizagem da matemática. No que respeita à sua atitude em relação à matemática a resposta que dá é um pouco ambígua pois limita-se a afirmar que sente um maior interesse pela história da matemática. Relativamente ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, salienta a consciencialização de que o ensino não deve ser expositivo, mas que deve procurar despertar a curiosidade e o interesse dos alunos. Importa-se de clarificar estas respostas?

Guião da segunda entrevista (Joana) (cont.)

- Na questão 6, quando afirma que após a experiência de integração da HM na aula de matemática sente uma perspectiva muito boa, o que quer dizer com isto?
- Na questão 7, afirma sentir que o percurso de formação teve, na sua prática de ensino, um contributo muito positivo para conseguir articular dimensões como a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática, acrescentando que em termos pessoais pode verificar que a matemática sempre esteve presente na vida do homem e que evoluiu ao longo do tempo. Ou seja, não respondeu à questão colocada. Pode responder agora?

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT2)

Guião da segunda entrevista (Inês)

- Na resposta que dá à questão 1.2, a Inês responde que considera os seminários como um momento relevante para a sua formação, pois encara a história da matemática como importante e “uma ajuda ao enquadramento”. A que enquadramento se refere?
- Ainda na mesma questão, peço-lhe que clarifique se a resposta que dá se refere à valorização da resolução de problemas no processo ensino/aprendizagem dos pequenos alunos ou na formação de professores? Ou refere-se a ambas as situações?
- Não respondeu à questão das conexões, porquê?
- Na questão 2, a Inês afirma considerar como adequada à sua formação, quer a análise de documentos curriculares, quer a análise de manuais escolares. Quanto às tarefas de resolução de problemas e à exploração didáctica de problemas históricos classifica-as como muito adequadas. No comentário que faz às tarefas centra a sua atenção apenas na exploração didáctica dos problemas históricos, julgando-as como bem seleccionadas e adequadas ao conteúdo e aos alunos. Refere-se aos alunos do ensino básico? Peço-lhe que se centre em si própria e que responda enquanto aluna em formação.
- Na questão 3.1, refere apenas a reacção dos alunos nomeadamente o muito interesse revelado em resolver um dos problemas da exposição sem recurso aos materiais manipuláveis. Em termos de formação para a profissão, qual é a sua opinião sobre o contributo dessa experiência de ensino?
- Na questão 4, questiono-a sobre o nível do contributo do percurso de formação em várias dimensões, a Inês considera-o relevante em todas elas. Peço-lhe que procure clarificar/justificar as respostas dadas. Por exemplo, em 4.2 o que quer dizer é que as tarefas históricas que resolveu ou propôs aos alunos admitiam várias estratégias de resolução e que isso melhorou o seu conhecimento ao nível da didáctica?

Guião da segunda entrevista (Inês) (cont.)

- Na questão 6 especifique o que quer dizer quando afirma que a integração da história da matemática na aula de matemática pode ser uma mais valia para o ensino da disciplina, mas que esta não é muito bem integrada.
- Na questão 7, reconhece que tem algumas dificuldades em estabelecer conexões, mas que sente que a participação no percurso de formação pode futuramente facilitar essa articulação. Quando diz que o percurso de formação a ajudou em muitos aspectos, sente que relativamente a essa dimensão isso não ocorreu?

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT2)

Guião da segunda entrevista (Beatriz)

- Comecemos pela II parte do questionário. Na questão 1, pedi-lhe para recordar percurso que fizemos em conjunto e para dar a sua opinião sobre a relevância para a sua formação de diferentes momentos desse percurso. Da resposta que dá parece poder depreender-se que a Beatriz considera as sessões de reflexão sobre a prática pedagógica como **muito relevantes**, por estas lhe permitirem reflectir sobre o que correu melhor e o que correu menos bem na aula. E depois faz uma série de reflexões sobre o papel da reflexão na formação de professores. Porém a sua resposta não incide sobre o trabalho que fizemos em conjunto. Quer acrescentar algo à sua resposta?
- Nesta questão 4, também não dá uma resposta muito concreta e eu gostaria de saber qual a relevância para si e não para os seus "pequenos" alunos. Ou seja, o que eu lhe pergunto é se acha que o trabalho que fizemos em conjunto contribuiu para a sua formação em matemática, ou seja, para o aprofundamento do seu conhecimento matemático. Por favor, releia a sua resposta e tente clarificar o que quer dizer.
- Quando se refere ao contributo em termos de formação didáctica (questão 4.2), ou seja, mais virado para o ensino da matemática, o que quer dizer com a sua resposta?
- Na questão 4.3, por favor releia a pergunta e sua resposta e tente também clarificá-la.
- Quando, na questão 5, a questiono sobre a receptividade da professora cooperante parece depreender-se das suas palavras que foi devido à muita receptividade desta que a Beatriz reconheceu valer a pena a integração da história da matemática. Concorda com esta leitura?

Guião da segunda entrevista (Beatriz) (cont.)

- Relativamente à questão 6 peço-lhe que leia a sua resposta e que me diga se concorda com a interpretação que faço da mesma e que é a seguinte: anteriormente à participação no PF, não encarava o estudo da história da matemática como fundamental; agora, considera que conhecer aspectos do desenvolvimento da Matemática lhe deu uma melhor visão da Matemática e uma maior cultura e, consequentemente, preparou-a para enfrentar a profissão docente.
- Na questão 7, admite que conseguiu articular história da matemática e resolução de problemas mas não faz qualquer referência às conexões. Não se importa de o fazer agora?
- Finalmente, peço-lhe que tente esclarecer a resposta que dá à questão 6 da Parte I do questionário.

Anexo 2

Guiões de entrevistas (ENT)

Guião de entrevista aos professores cooperantes de 2º CEB

- Prática Pedagógica –

Centre a sua atenção na prática de ensino da aluna X.

- Usando uma escala de insuficiente, suficiente, bom e muito bom, qual considera ser o nível de preparação científico de X? E em termos de nível de preparação didáctica para a leccionação de matemática no 2º ciclo?

- Na sua opinião houve evolução ao longo do ano lectivo?

- Acha que X gosta de matemática? E de ensinar matemática?

- Procure identificar pontos fortes e pontos fracos na Prática Pedagógica de X.

- Percurso de Formação –

- Como considera, no seu conjunto, a adequação dos problemas históricos que X explorou na sua prática de ensino em termos dos conteúdos programáticos e das competências a desenvolver nos alunos de 5º/6º anos?

- Como avalia a capacidade de exploração dos problemas históricos manifestada por X? E o envolvimento de X com os problemas?

- Sente que os problemas históricos explorados por X propiciaram o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática? Como/Porquê?

- Considera que o acompanhamento proporcionado pela investigadora teve algum eco na prática de ensino de X? E de modo particular nas situações envolvendo problemas históricos?

- Até que ponto lhe parece relevante que a integração da história da matemática no 2º ciclo seja feita através de problemas históricos?

Guião de entrevista aos professores cooperantes de 2º CEB (cont.)

- Que relevância atribui para a formação das alunas em Prática Pedagógica, às propostas de exploração didáctica de problemas históricos? (muito relevante, relevante, pouco relevante, nada relevante).

Anexo 3

Plano de Estudos da Licenciatura em Professores do Ensino Básico

(Quadriénio 2000-2004)

Professores do Ensino Básico
Variante de Matemática e Ciências
da Natureza

Organização curricular

Disciplina	*Tipo*	*Escolaridade (horas semanais)*
1° Ano		
Psicologia do Denvolvimento e Aprendizagem I	Sem 1	3
Fundamentos da Educação	Sem 1	3
Aquisição da Linguagem e Linguística Portuguesa	Sem 1	3
Educação Visual e Manual	Sem 1	4
Geologia	Sem 1	3
Estatística	Sem 1	3
Química Estrutural	Sem 1	3
Organização do Mundo Vivo I	Sem 1	4
Psicologia do Desenvolvimento e Aprendizagem II	Sem 2	3
Teoria do Texto e Literatura para a Infância	Sem 2	3
Expressão Dramática	Sem 2	4
Socioantropologia	Sem 2	3
Análise Infinitesimal	Sem 2	4
Química Geral	Sem 2	4
Organização do Mundo Vivo 11	Sem 2	4
2° Ano		
Sociologia da Educação	Sem 3	3
Desenvolvimento Curricular e Avaliação	Sem 3	3
Metodologia Geral e Tecnologia Educativa	Sem 3	4
História de Portugal	Sem 3	3
Aprendizagem da Leitura e da Escrita	Sem 3	3
Física Geral	Sem 3	4
Ecologia	Sem 3	3
Álgebra Linear	Sem 3	4
Metodologia do Ensino da Língua Materna	Sem 4	3
Educação Musical	Sem 4	4
Metodologia do Ensino da Matemática	Sem 4	3
Teoria dos Números	Sem 4	3
Algoritmos e Computação	Sem 4	4
Bioquímica	Sem 4	4
Física das Radiações Óptica	Sem 4	3
3° Ano		
Introdução às Necessidades Educativas Especiais	Sem 5	3
Geometria I	Sem 5	4
Biologia Celular	Sem 5	3
Metodologia do Ensino das Ciências I	Sem 5	3
Estruturas Matemáticas e Teorias de Ensino	Sem 5	3
Genetica Humana e Fisiologia	Sem 5	4
Teoria da Probabilidade	Sem 5	3
Investigação em Educação	Sem 6	3
Organização e Gestão Escolar	Sem 6	3
Geometria II	Sem 6	4
Metodologia Integrada do Ensino Primário	Sem 6	4
Prática Pedagógica (I/II)		12
4° Ano		
Metodologia do Ensino das Ciências II	Sem 7	3
História e Metodologia da Matemática	Sem 7	3
Prática Pedagógica (III/IV)	Sem 7	12
Epistemologia e História das Ciências	Sem 8	4
Prática Pedagógica V	Sem 8	12

Anexo 4

Documento para a validação da análise de conteúdo realizada

A análise que lhe apresento recaiu sobre as suas respostas aos questionários (QT), entrevistas (ENT), prática de ensino (aula) e às reflexões que fizemos nas sessões de trabalho (ST) que realizámos em conjunto. Peço-lhe, agora, que se pronuncie nos seguintes itens:

1. Em termos globais concorda com a análise feita?

   Sim ☐ Não ☐

2. Faça algum comentário que considere pertinente e indique em concreto os aspectos sobre os quais não concorda (pode mesmo sublinhar no texto e desenvolver com comentários à margem).

Anexo 5

Tarefas propostas para exploração em ambientes não formais

MÓDULO I - DINHEIRO

Tarefa 1 – As bolsas de dinheiro

Quatro homens têm, cada um, uma bolsa com dinheiro; o que cada um tem não se sabe, mas os três sem o primeiro têm 13 réis; e os outros, sem o segundo, 12 réis; e os outros, sem o terceiro, têm 11, e os outros, sem o quarto, têm 9. Pergunta-se: quanto tinham todos e quanto tinha cada um.

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 285)

Tarefa 2 – As ovelhas

Um homem comprou um certo número de ovelhas e não se lembra quantas eram, nem quanto lhe custaram; mas lembra-se que, naquele dia que as comprou, as tornou a vender por 240 réis e que ganhara 1600 réis e que se as vendesse a 320 réis, ganharia 2400 réis. Pergunta-se: quantas ovelhas comprou e quanto lhe custaram?

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 284)

Anexo 5

Tarefas propostas para exploração em ambientes não formais

MÓDULO II - COMPRIMENTO

Tarefa 1 – À descoberta das antigas unidades de comprimento

O povo dava a certas partes do côvado nomes como **meia**, **terça ou palmo**, **quarta**, **sesma** e **oitava**. Descobre qual a razão de ser desses nomes por comparação dos respectivos padrões com o padrão do côvado.

Mede o comprimento e a largura de um retalho de tecido usando essas antigas unidades de comprimento.

Tarefa 2 – Resolver problemas com as antigas unidades de comprimento

Imagina que um comerciante de um mercado medieval vendeu a dois clientes uma peça de seda. O primeiro comprou *três côvados e meio e uma sesma e o segundo comprou quatro côvados e uma terça. Qual o comprimento da peça de seda?*

(Adaptado de Guiral e Pacheco, *Flor da Arismética Necessária*, 1624, in Almeida, 1994b, p. 210)

Anexo 5

Tarefas propostas para exploração em ambientes não formais

MÓDULO III - MASSA

Tarefa 1 – À descoberta das antigas unidades de massa

Nos pesos de Portugal, é necessário somar dois arráteis, um meio-arrátel, três quartas e cinco onças de coisas de valor com três arráteis, um meio-arrátel, duas quartas e quatro onças. Pergunto: qual é a soma?

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 209)

Tarefa 2 – Resolvendo problemas com as antigas unidades de massa

Um arrátel de pimenta custa 64 reais e uma onça 4 reais. Pergunto: quando me vendem 6 onças de pimenta por 48 reais, a quanto fica o arrátel?

(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, in Almeida, 1994b, p. 86)

Anexo 5

Tarefas propostas para exploração em ambientes não formais

MÓDULO IV- VOLUME

Tarefa 1 – À descoberta das antigas unidades de volume

Tenho necessidade de somar sete alqueires, três quartas e 6 oitavas de milho com dez alqueires, duas quartas e 7 oitava de milho. Pergunto: quanto é a soma?

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 210)

Tarefa 2 – Resolvendo problemas com as antigas unidades de volume

Um mercador empregou 300 réis em 30 alqueires de trigo. Ora este mercador quer vender o trigo. Tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era de três quartas e vendeu cada três quartas por 10 réis. E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado, onde cada alqueire era de cinco quartas e vendeu cada cinco quartas por dez réis. Pergunto se este mercador ganhou ou perdeu na venda deste trigo.

(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, in Almeida, 1994b, p. 172)

Anexo 5

Tarefas propostas para exploração em ambientes não formais

MÓDULO V- CAPACIDADE

Tarefa 1 – Comparação de capacidades

Usa os padrões da canada, do quartilho e do meio quartilho para estabeleceres a relação entre as capacidades desses padrões.

Tarefa 2 – Resolvendo problemas envolvendo a capacidade de um recipiente

Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 quartilhos de água numa cabaça e outro levava 8 quartilhos de água em duas cabaças, a saber, cinco quartilhos de água numa e três na outra. Beberam a água da cabaça grande que tem 8 quartilhos e querem apartar-se e dividir a água das outras duas cabaças. Querem que nenhum leve mais água do que o outro e não têm medida nenhuma. Ora, eu pergunto, de que maneira devem cambar[1] a água de uma das cabaças para as outras para que nenhum vá enganado?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, in Albuquerque, 1973, p.118)

[1] Trocar ou permutar algo.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Tarefa 1[1] - Transacção de panos entre Portugal e Castela

A actividade que a seguir propomos baseia-se num livro de Aritmética intitulado Flor da Arismética Necessária, publicado em 1624 na cidade de Lisboa. O autor da obra, Afonso de Villafanhe Guiral e Pacheco, terá sido, na opinião de Marques de Almeida (1994a, p.89 e 90) um homem de negócios, comerciante na cidade do Porto, natural da vila beirã de Almeida e um dos maiores peritos em aritmética do seu tempo. A sua aritmética reflecte a sua enorme experiência nos negócios nomeadamente no que respeita aos câmbios e práticas comerciais internacionais. Escrevia Guiral e Pacheco:

> *O côvado tem três palmos. Seda e panos vendem-se por côvado. Excepto alguns panos baixos que chamam de varas, que se medem por varas de cinco palmos. O pano da Índia de linho e outras coisas de tecer se vendem por varas de cinco palmos, que é vara e quarta castelhana. De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.*
>
> (Guiral e Pacheco, fls 17v./18r. transcrito em Marques de Almeida, 1994a, p. 230)

Interprete, do ponto de vista comercial, a afirmação: De maneira que nas sedas e panos que vêm de Castela se ganha na medida 33% e nas mercadorias que deste Reino vão para Castela se ganha 25%.

[1] Proposta em 07/01/05.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Algumas observações sobre a tarefa 1:

Importa começar por salientar que a transacção comercial descrita no texto se refere à compra e venda de tecidos ao Reino de Castela e portanto envolve a medição de comprimentos. Um aspecto curioso é o facto de o mercador português, em qualquer das situações, ter sempre lucro, e o ganho parecer não depender do preço de compra e venda dos tecidos. Importa, por isso, fazer uma leitura e interpretação cuidadosa do texto tendo em conta a referência a vários tipos de pano (panos da Índia, panos de tear e sedas) e a identificação das unidades usadas na transacção desses produtos.

Estabelecida a equivalência entre as unidades (1 *côvado* = 3 *palmos*, 1 *vara portuguesa* = 5 *palmos*, 1 *vara portuguesa* = 5/4 *vara castelhana*,1 *vara castelhana* = 4 *palmos* = 4/3 *côvado*), cabe reflectir sobre o motivo pelo qual o mercador português tem sempre lucro na transacção.

Uma leitura atenta do texto permite concluir que os panos da Índia de linho e de tear são vendidos pelo mercador português a Castela. Ora, só é possível o lucro de 25% se o mercador, que compra em Portugal panos de linho e de tear medidos em *varas portuguesas*, quando os transacciona, com Castela, o fizer numa unidade menor que a portuguesa. Testada a hipótese de o fazer em *varas de Castela*, conclui-se que por cada *vara portuguesa* de pano o mercador ‘faz’ uma *vara castelhana* e sobra-lhe ¼ do tecido inicial, isto é, tem efectivamente um lucro de 25% em pano. De modo similar, se conclui o lucro na transacção dos panos finos.

Este problema permite também reflectir sobre alguns problemas decorrentes da utilização de diferentes unidades de medida para a mesma grandeza e explorar algumas ideias relacionadas com a medição, tais como a importância e a necessidade da medição, a importância da unidade de medida, as dificuldades criadas pela utilização da unidades não estandardizadas e pelo uso de diferentes divisores, bem como da necessidade de relacionar entre si diferentes unidades.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Tarefa 2[2] - Pesos de Portugal e Valência

Cada uma das situações seguintes foi elaborada com base em enunciados originais e respectivas soluções. Leia atentamente os excertos apresentados e procure identificar todas as unidades referidas e estabelecer as relações entre elas. Em cada caso indique a grandeza a que essas unidades dizem respeito.

(a) Nos pesos e medidas de Portugal, é necessário somar dois quintais, três arrobas, vinte arráteis e dez onças com um quintal, duas arrobas, quinze arráteis e sete onças. Pergunto: qual é a soma?

(...)

Solução: A soma das duas parcelas é igual a quatro quintais, duas arrobas, quatro arráteis e uma onça, tal como representado na figura.

2.	3.	20.	10
1.	2.	15.	7
4.	2.	4.	1

(Adaptado de Guiral e Pacheco, transcrito em M. Almeida, Vol II, p. 209)

(b) Proponho que nos pesos de Valença[3] se calcule a soma de três arrobas, quatro arráteis e seis onças de coisas de valor, com uma arroba, vinte e oito arráteis e catorze onças.

(…)

Solução: E, assim, se responderá que a soma é igual a cinco arrobas, três arráteis, oito onças, tal como representado na figura.

3.	4.	6.
1.	28.	14.
5.	3	8

(Adaptado de Guiral e Pacheco, transcrito em Marques de Almeida, Vol II, p. 211)

[2] Proposta em 07/01/05.
[3] Actual Valência e pertencente à época ao Reino de Aragão.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Algumas notas e observações sobre a tarefa 2:

Estas duas situações são apresentadas por Guiral e Pacheco após a indicação das relações entre as unidades mais usadas para medir o pão, o vinho, o azeite, as especiarias, a carne, o pescado, a seda, o linho, …Trata-se, por isso, de aplicações que visam familiarizar com os sistemas de unidades em uso, mas sobretudo ensinar o modo de operar com elas: *Tendo ensinado por taboada as medidas deste Reyno, hé rezão mostrar pello meúdo o modo de proceder com ellas, que, entendidos os valores, ficará mais fácil tratá-las com affavilidade* (Marques de Almeida, 1994b, p. 209).

Qualquer uma das situações apresentadas envolve a necessidade de estabelecer quantas unidades de cada tipo são necessárias para perfazer uma nova unidade de ordem superior. Sendo muito semelhantes em termos de enunciado e processo de resolução, tem como finalidades dar a conhecer algumas das antigas unidades usadas para medir a grandeza massa e dar a perceber a diversidade de divisores usados de unidade para unidade, a diversidade de divisores que uma mesma unidade possuía e as dificuldades daí decorrentes, sobretudo se atendermos à coexistência de unidades com o mesmo nome, mas com diferentes relações entre si.

Na resolução da 1ª situação pode-se concluir que sendo a soma de 10 *onças* com 7 *onças* igual a 1 *onça*, isso significa que 16 *onças* perfazem uma nova unidade, o *arrátel*. De modo similar, se conclui que 32 *arráteis* são equivalentes a 1 *arroba* e 4 *arrobas* perfazem 1 *quintal*. Porém, em Valença, a relação entre as mesmas unidades altera-se: 12 *onças* = 1 *arrátel* e 30 *arráteis* = 1 *arroba*.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Tarefa 3 – O vestido e a peça de tafeetá

Resolva os seguintes problemas:

O vestido[4]

Um alfaiate fez-me um vestido de um pano com 8 côvados de comprimento por sete palmos de largura. Ora, eu tenho outro pano com 9 palmos de largura. Pergunto: quantos côvados deverá ter este pano para poder fazer-se outro vestido?

(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, transcrito em M. Almeida, 1994b, p. 80)

Tarefa 4 - A peça de Tafetá[5]

Um mercador comprou uma peça de tafetá com 33 côvados de comprimento e um peso de 44 onças. Pagou por cada arrátel 5 coroas[6]*. Pergunto: quanto lhe custa o côvado em moeda portuguesa?*

(adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, transcrito em M. Almeida, 1994b, p. 1650)

[4] Proposto em 14/01/05.
[5] Proposto em 14/01/05.
[6] A coroa era uma unidades monetárias de Portugal. À época uma coroa valia 379 reais. O ssitema monetário português incluía outras moedas como o cruzado (= 4 tostões), o tostão (= 5 vinténs), o vintém (= 20 reais) e o ceitil (= 1 real).

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Algumas notas e observações sobre a tarefa:

Entende-se que a resolução de problemas que envolvam o trabalho com unidades cuja relação não é decimal releva, em particular, a importância da compreensão dos aspectos conceptuais que estão por detrás das realização de reduções. É nessa linha que se integram todos os problemas que se incluem nesta tarefa e que envolvem antigas unidades de comprimento, de massa e monetárias. Ambos traduzem situações do quotidiano passado que permitem desenvolver alguma compreensão do valor e papel da matemática na sociedade da época. O simples facto de envolverem sistemas de unidades desconhecidos, com uma imensa diversidade de relações, permite que se encarem como problemas verdadeiramente novos que permitem revisitar e reflectir sobre conceitos e processos, considerados rotineiros quando se trabalha no SI.

Relativamente ao problema do vestido, nada é dito, no texto, relativamente a exigências mínimas nas dimensões do tecido para que se possa confeccionar o vestido. Por outro lado, dado que se fala em largura e comprimento de panos, é natural considerar que estes tivessem uma configuração rectangular. Pode-se pois pressupor que o segundo pano deve ter uma área igual ao primeiro, isto é, que os dois panos têm de ser equivalentes, ou seja, devem ser iguais as medidas das respectivas áreas. Coloca-se também a questão de decidir que unidade de área se deve considerar: o *palmo* quadrado (a área de um quadrado de lado igual a um *palmo*), o *côvado* quadrado (a área de um quadrado de lado igual a um *côvado*), ou se se pode considerar a área de um rectângulo de largura um *palmo* e comprimento um *côvado*? Do ponto de vista teórico, nada invalida que esta seja a estratégia a seguir, esta é, aliás, a resolução adoptada por Bento Fernandes por aplicação directa de uma regra a que chama *regra de três em que o terceiro é o partidor ou divisor*), tratando-se, por isso, de um problema de proporcionalidade inversa.

Porém, o mais natural parece ser trabalhar com os comprimentos expressos numa mesma unidade de comprimento ou seja, *palmos* ou *côvados*. Efectuadas as reduções e os cálculos necessários, conclui-se que o comprimento do segundo pano deve ser de 6 e $\frac{2}{9}$ *côvados* ou, representando a medida na forma de numeral misto, $6\frac{2}{9}$ *côvados*.

Já o segundo problema diz respeito ao cálculo do preço de um côvado de tafetá, conhecido o preço de uma peça com um determinado comprimento e massa/peso. Tal situação remete a existência de tafetás de diferentes qualidades - quanto maior a relação entre a massa e o comprimento, tanto mais resistente o tecido.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Tarefa 4 – Três problemas sobre a construção de paredes[7]

Resolva os seguintes problemas:

A construção de uma parede

Um homem manda fazer uma parede e levam-lhe 600 reai[8]*s por braça quadrada. Ora esta parede tem de comprido 20 varas e 4 palmos e de altura tem 3 varas. Pergunto: quanto levam a este homem pela parede?*

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 92)

Outro sobre a construção de uma parede

Considera uma parede que de comprido tem 20 braças e dois palmos, que são um quinto de braça, e de altura tem 4 braças e 3 palmos que são três dez avos de braça. Pergunto: quantas braças quadradas são?

(Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 94)

Ordenações para a construção de paredes

Já sabes que uma parede de 20 braças de comprido e 3 de altura a 400 reais a braça, tem 60 braças quadradas de área e custa-te 24 000 reais. Ora nesta parede, por ordenação desta cidade, a braça quadrada corresponde a dois palmos e meio de grossura. Acertou-se fazer a parede mais grossa 1 palmo, com 3 palmos e meio de grossura. Pergunto: quanto pagarei assim pelas 60 braças quadradas?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 94v)

---

[7] Proposta em 18/02/05.

[8] O real, antiga unidade monetária do tempo da monarquia, foi substituído pelo escudo em 1911, ano de implantação da República em Portugal. O escudo correspondia, quer no valor, quer no peso de ouro fino, à moeda de 1 000 réis (forma do plural de real que também assumiu a forma reais). Durante muito tempo a expressão "mil réis" foi usada entre nós como sinónima de "um escudo". Hoje, se não entrarmos em linha de conta com a desvalorização do dinheiro, uma quantia como 60 000 reais pode ser considerado como equivalente a 60 escudos, ou seja, cerca de 0,30 euros. Mas, para termos uma ideia aproximada do real valor desta quantia, consultámos algumas aritméticas comerciais do século XVI, onde encontramos referenciados os preços de alguns bens de uso comum nos dias de hoje, mas muito valiosos à época como por exemplo o açúcar. Por exemplo, em 1519, 1 quintal de açúcar que custava cerca de 1200 reais. A mesma quantidade de açúcar vale hoje aproximadamente 25 € (Equivalência calculada com base no preço máximo atingido pela tonelada de açúcar na bolsa de Londres, Jornal de Notícias, Suplemento de Economia de 13 de Janeiro de 2006).

Anexo 6

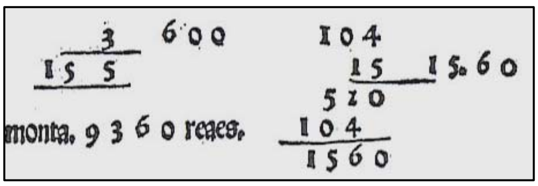
Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

<u>Algumas notas e observações sobre a tarefa:</u>

Propõe-se a resolução de problemas de aplicação a matemática a um contexto real que refere antigas unidades de comprimento e que desafia o aluno. Trata-se de três situações relativas ao custo total de construção de uma parede, conhecido o preço de construção de uma determinada superfície. Em termos de conhecimento matemático mobilizável para a sua resolução, este não excede conteúdos curriculares de Geometria e de Números e Cálculo para o 1º / 2º ciclos do ensino básico.

Entende-se que a resolução de problemas que envolvam o trabalho com unidades cuja relação não é decimal releva, em particular, a importância da compreensão dos aspectos conceptuais que estão por detrás das realização de reduções. É nessa linha que se integram todos os problemas que se incluem nesta tarefa, que envolvem antigas unidades de comprimento e unidades derivadas de área e de volume e permitem reflectir sobre questões relacionadas com a redução de unidades para a medição de grandezas como o comprimento, a área e o volume.

Questões como a forma geométrica da parede, o cálculo da área da mesma, a eventual necessidade de redução da medida encontrada à unidade pedida terão de ser tidas em conta na resolução dos problemas. Por exemplo, no segundo problema as dimensões da parede não são exprimíveis num número inteiro de *braças*, pois a parede tem um comprimento de 20 *braças* e um quinto de *braça*, ou seja $20\frac{1}{5}$ de *braça* e uma altura de 4 *braças* e 3 palmos ou $4\frac{3}{10}$ *braças*. É de notar que Gaspar Nicolas na indicação dos passos necessários à resolução do problema, reduz as dimensões lineares da parede a palmos. Certamente na base dessa opção está o facto de a relação entre o palmo quadrado e a braça quadrada ser facilmente estabelecida, pois uma braça é igual a 10 palmos, pelo que a uma braça quadrada é igual a 100 palmos quadrados. No final reduz a área obtida novamente a braças quadradas.



Nicolás (1519, fol. 92v)

Na figura chama-se a atenção que a notação 15.60 não representa um número decimal, mas sim o quociente e o resto da divisão de 1560 por 100, como, aliás, pode ser comprovado à esquerda em que é indicado o produto de $15\frac{3}{5}$ por 600 (custo total da construção da parede).

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Tarefa 5 – Dois problemas de volumes

Resolva os seguintes problemas:

A arca quebrada[9]

Um homem emprestou a outro uma arca cúbica cheia de trigo, cujas arestas mediam 10 palmos. Ora este homem deixou cair a arca por uma escada abaixo e quebrou-a. Quer pagar o trigo, mas não tem senão uma arca de 5 palmos, também cúbica. Ora eu pergunto: quantas vezes lha dará cheia?

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 88v)

Medir volumes com cabaças[10]

Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 canadas de vinho numa cabaça e outro levava 8 canadas de vinho em duas cabaças, cinco canadas de vinho numa e três na outra. Beberam o vinho da cabaça grande que tem 8 canadas e querem se separar e dividir o vinho das outras duas cabaças, cinco numa e três na outra. Querem que nenhum deles leve mais vinho do que o outro, ou seja que cada um leve 4 canadas e não têm medidas nenhumas. Ora eu pergunto de que maneira devem cambar o vinho de uma das cabaças para as outras para que nenhum vá enganado.

(Adaptado de Gaspar Nicolas,, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, fol. 51v)

[9] Proposto em *15/04/05*.
[10] Proposto em *15/04/05*.

Anexo 6

Problemas históricos propostos na disciplina de Geometria

Algumas notas e observações sobre a tarefa

Embora os dois problemas propostos nesta tarefa tenham essencialmente carácter recreativo, devem encarar-se as suas potencialidades no desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e de raciocínio matemático. Parece ser também esse o entendimento que nos é sugerido pelo subtítulo do capítulo XXXXII da aritmética *Flor da Arismética necessária*, da autoria de Guiral e Pacheco (1624), onde se incluem problemas desta natureza: «De algunas questões e preguntas pêra abrir o entendimento aos mininos e poco contadores posto que sejão velhas”.

O problema intitulado *a arca quebrada* integra a primeiro livro de Aritmética publicado em Portugal, em 1519, num capítulo que o autor denomina de perguntas de geometria prática («Segue-se algunas preguntas em pratica geometria»). Infere-se pois que todas as «perguntas que coloca são relativas a situações de aplicação de conhecimentos geométricos. São poucas as questões que envolvem o cálculo de volumes. Entre estas conta-se este problema e um outro relativo ao cálculo do preço da construção de uma parede quando se manda fazer a parede com uma espessura superior ao habitual (proposto na tarefa 4). Curiosamente refira-se que em ambos os problemas é calculado o volume sem que o nome da grandeza seja referido explicitamente e, além disso, o resultado é apresentado incorrectamente em termos de unidade de área e não de volume.

O segundo problema pode integrar-se num certo tipo de problemas muito comuns na Europa a partir do século XIII relativos à medição de um certo volume de líquido (normalmente água ou vinho), usando para o efeito um determinado número de vasilhas com capacidades conhecidas «medir volumes com vasilhas». Por envolver o uso de vasilhas não graduadas subentendia o uso da capacidade máxima das vasilhas para efectuar com sucesso a medição desejada. Para além disso, o problema permite discutir as diferenças entre os conceitos de capacidade e volume e explorar a ligação entre os dois conceitos em termos de unidades de medida para a medição de volumes.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

- Dados Biográficos –

1. Nome: Joana

2. Data de nascimento: 26/02/83

3. Natural do Concelho de: Guarda Distrito de Guarda

4. Em tempo lectivo vive na sua residência habitual? Sim ☐ Não ☒

5. Se não reside com o agregado familiar, em tempo lectivo, com que regularidade vai a casa?

   Fins de semana ☒ uma vez por mês ☐ nas férias lectivas ☐

   outra periodicidade ☐ Qual? ______________

6. Estado civil: Solteira ☒ Casada ☐ Outra situação ☐

5. Presentemente, é trabalhadora estudante? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo indique a sua actividade profissional ______________________

____

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Básico e Secundário –

Recorde o seu percurso escolar **nos ensinos básico e secundário**.

1. No **ensino básico**:

1.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Era uma aluna muito participativa motivada, o que fazia com que fosse uma aluna de nível bom, sabendo sempre todos os conceitos.

1.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ____________

1.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Entendia e realizava com facilidade todas as actividades propostas.

1.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? Porque era uma área em que me sentia à vontade e me dava muito gosto trabalhá-la

1.5 De entre as áreas da Matemática que fazem parte do currículo da escolaridade básica, ordene as abaixo indicadas de acordo com as suas preferências enquanto aluna.

(A) Álgebra
(B) Estatística e Probabilidades
(C) Geometria
(D) Números e Cálculo
(E) Funções

D / A / B / C / E
(1ª preferência) / (2ª preferência) / (3ª preferência) / (4ª preferência) / (5ª preferência)

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

1.6 Da lista anterior, em qual ou quais das áreas sentiu mais dificuldades? Na área das funções

Porquê? A área das funções sempre foi a que menos gostei, daí sentir mais dificuldades.

2. No **ensino secundário:**

2.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Apesar de algumas dificuldades que a sentindo, sempre tentei colmatá-las, o que me levava a finalizar as actividades sempre com algum sucesso.

2.2 Reprovou alguma vez? Sim ☒ Não ☐

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? 12º

2.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☒ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? Devido à mudança de escola, de colegas e de no 10º ano ter estado 3 meses sem matemática, dada a ausência do professor fez com que me desorganizasse no estudo.

2.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? Sempre achei a área da matemática muito cativante no sentido de que nos permite explorar e pensar.

2.5 Que classificação obteve a Matemática no final do ensino secundário? 12

(na escala de 1 a 20).

2.6 Como estudava Matemática (por exemplo: sozinha, com apoio, regularmente, resolvendo muitos exercícios, …)? Por vezes ~~com~~ com os meus colegas para de certa forma retirar certas dúvidas, mas a maior parte muitas vezes sozinha.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

3. Relativamente ao ensino básico ou secundário, tente recordar-se de um professor de Matemática de quem tenha gostado (não se refira ao nome). Porque gostou desse professor? No ensino básico tive a professora de matemática que ainda hoje tenho saudades. As suas aulas eram organizadas havendo sempre uma sequência lógica em toda a matéria. Fazia os alunos pensar e descobrir, mas de uma forma cativante, conseguindo assim cativar toda a turma e a mim fundamentalmente.

4. Tente agora recordar-se de um professor de Matemática do ensino básico ou secundário de quem não tenha gostado ? (não se refira ao nome). Porque não gostou desse professor Tive uma professora no ensino secundário que nas suas aulas não existia organização por parte dela o que levava também a que por parte dos alunos houvesse. Dava a matéria de uma forma muito complexa, baralhando os alunos, o que era simples ele tornava-o complicado. Não nos levava a descobrir e a explorar os conteúdos, perdendo assim um pouco o gosto pela matemática.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Superior –

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação.

1. O curso que frequenta foi a sua primeira opção? Sim ☐ Não ☒

Em caso de resposta negativa, qual foi a sua primeira opção? Enfermagem

2. Em qualquer dos casos, indique a ou as razões que a levaram a optar por uma Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências?

Apesar de não ser o curso que inicialmente queria, a segunda opção foi Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências, porque sempre me despertou grande interesse tanto a área da matemática como a área das Ciências. Apesar das dificuldades que comecei a sentir a matemática no secundário, não perdi o gosto e o interesse por esta área.

3. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente? 1º ciclo ☐ 2º ciclo ☒

Porquê? Estou interessada em exercer actividade no segundo ciclo, pois considero que a matéria é mais interessante e que nós somos mais preparadas para aí exercer actividade.

Apesar de gostar muito do 1º ciclo considero que o 2º ciclo me desperta mais entusiasmo.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT1)

Questionário

4. Está a terminar a Prática Pedagógica no primeiro ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação, em relação à dimensão lectiva, para ser professora neste ciclo?

4.1 Genericamente:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

4.2 Em relação à Matemática:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

5. Qual o balanço que faz da disciplina de Prática Pedagógica:

5.1 Genericamente? Apesar do imenso trabalho que se faz sentir e a falta de tempo, quer para preparar as actividades, quer para a escola e para a família, considero que a prática pedagógica é extremamente importante, pois só assim temos de certa forma a realidade de ser professor. Um aspecto negativo a apontar é que muitas das vezes não se dá o devido valor ao trabalho que se tem.

5.2 No caso específico da Matemática? No caso específico da matemática, acho que a prática pedagógica me permite ter uma visão mais ampla de como podemos explorar essa área, novas técnicas, novos métodos. Permite-me colocar em prática tudo aquilo que já me foi ensinado. Considerando por isso, quer ao nível científico, quer ao nível pedagógico bom

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

Nome: Joana

Data: 20 /06/2006

PARTE I - Percurso Escolar no Ensino Superior (ESE)

Recorde o seu percurso em geral na ESE.

1. No ensino superior considera-se uma aluna de que nível?

Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☒ Fraco ☐

Porquê? Sempre consegui fazer todas as cadeiras, ~~tendo~~ ia por frequência tendo só recorrido a exame só a três cadeiras ~~em todos os anos~~ durante os anos todos que frequentei.
As minhas notas nunca foram muito diferentes das minhas colegas ou seja, encontraram-se sempre dentro da média.

2. E nas várias disciplinas da área científica de Matemática (Análise Infinitesimal, Álgebra, Estatística, Teoria da Probabilidade, Geometria, Teoria dos Números, História e Metodologia da Matemática) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☒ Fraco ☐

Porquê? Tendo sentido algumas dificuldades para fazer as cadeiras de Geometria (I e II), mas no que diz respeito às outras cadeiras, o fiz-las sem grandes dificuldades, tendo noção que me poderia ter aplicado um pouco mais.

3. E nas disciplinas da área de Educação em Matemática (Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Na medida em que as notas até foram bastante positivas.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

4. Reprovou alguma vez no ensino superior, em disciplinas da área de Matemática/Educação em Matemática?

Sim [X] Não [ ]

4.1 Em caso afirmativo, indique quais as disciplinas e o número de reprovações (entenda por reprovação apenas situações que implicaram uma nova matrícula na disciplina).

Reprovei na frequência de Geometria I tendo de recorrer a exame para fazer a cadeira.

5. Gosta de Matemática?

Sim [X] Não [ ]

Porquê?

Desperta-me o interesse a curiosidade pelos resultados. Motiva-me o ter que relacionar determinados aspectos com áreas completamente diferentes mas que se relacionam e que a matemática de forma perfeita. Fascina-me saber que a matemática, tal como todas as ciências, também ~~está~~ evolui.

6. Tente caracterizar a relação que manteve com a Matemática / Educação em Matemática durante o seu curso na ESE (refira-se aos diferentes domínios do conhecimento matemático com que mais/menos se identificou, às dificuldades sentidas, aos desafios da formação …).

Durante o meu percurso na ESE a minha relação com a matemática tentou ser a melhor, na medida em que, mesmo que por vezes os conteúdos, os conceitos, os teoremas me aborrecessem, tentei ~~tes~~ nunca perder o interesse e a motivação de saber qual o motivo de tudo aquilo ser assim. As dificuldades sentidas foram na área de geometria no sentido em que por vezes as ~~ritera~~ noções na minha opinião não eram claras, ou seja bem esclarecidas.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

7. Quer deixar algumas sugestões de mudanças possíveis?

Tentar transpor os exemplos para o real, e as técnicas, metodologias utilizadas motivarem mais os alunos.

8. Está a terminar a Prática Pedagógica no 2º ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação para ser professora de matemática neste ciclo?

A nível científico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

A nível pedagógico/didáctico: Muito bom ☒ Bom ☐ Médio ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

Ao nível científico considero bom na medida em que com a prática, com o passar do tempo, penso que vou adquirir muito mais conhecimentos, o que fará alargar o meu leque de aprendizagens feitas nesse sentido.

Ao nível pedagógico/didáctico, penso que foi bastante bom, pois a orientadora (cooperante) foi uma pessoa excelente que me motivou, orientou e ensinou da melhor forma.

9. Que contributo lhe trouxe a realização de Prática Pedagógica no 1º ciclo do ensino básico para a Prática Pedagógico no 2º ciclo?

O saber estar perante os alunos, o "dominar" da turma, o expor os meus conhecimentos, tendo isso foi desenvolvido ao longo da prática pedagógica no 1º ciclo. Sendo esta desenvolvida muito mais, uma vez que não é a primeira vez, no 2º ciclo.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

A escolha de actividades para os alunos, o saber o que motiva os alunos, embora estes se encontrem numa sala diferente, tudo isto a prática pedagógica no 1º ciclo ajudou.

10. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente?

1º ciclo ☐ 2º ciclo ☒

Porquê? As actividades realizadas no 1º ciclo despertam-me mais o interesse, bem como o ambiente que envolve.
A mentalidade das crianças é um pouco diferente, dando para realizar situações problemáticas mais complexas, bem como as conversas que se podem realizar com os alunos.

11. Quais são as suas expectativas em relação à profissão que escolheu?

Apesar de gostar imenso da profissão que escolhi, e de me fascinar ensinar e entender que o aluno está a perceber correctamente o conhecimento que estou a transmitir, e de achar extremamente bonito poder transmitir conhecimentos, as minhas expectativas são muito más, pois dado as notícias que constantemente ouvimos sobre a o estado da educação em Portugal e das novas leis que querem estabelecer.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

PARTE II – Percurso de Formação

Recorde o percurso de formação que fizemos em conjunto a partir de Janeiro de 2005, nas disciplinas de Geometria, História e Metodologia da Matemática e Prática Pedagógica.

1. Explicite a sua opinião sobre a relevância para a sua formação como professora de matemática que atribui aos diferentes momentos do percurso de formação:

1.1 Abordagem dos conteúdos relativos a Medida e resolução de problemas históricos em Geometria

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Muito relevante, pois penso que ~~[illegible]~~ resolver problemas históricos permitiu-me ter a noção de que a matemática evolui e que sempre esteve presente nas necessidades mais íntimas do homem. Resolver problemas históricos fez-me regredir no tempo e conhecer determinadas medidas, grandezas e linguagens que desconhecia, despertando-me ~~[illegible]~~ o interesse.

1.2 Seminários de sensibilização para a importância da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Penso que os seminários foram muito relevantes para a reflexão do que sabemos e darmos a conhecer isso porque a história da matemática é muito importante. Este tipo de seminários serviu-me também para ficar, obter o conhecimento que é necessário escolher, seleccionar muito bem as actividades propostas aos alunos, pois nem todas ~~são~~ as mais adequadas às situações, conceitos, que queremos tratar.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

1.3 Sessões de apoio à planificação da Prática Pedagógica

Muito relevante [X] Relevante [ ] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? Várias vezes me reuni com a professora, e de todas as vezes aprendi muito. Aprendi técnicas, formas, estratégias para explorar as actividades e levar os alunos ao encontro daquilo que pretendia que fosse explorado.
Durante as várias sessões muitas foram as orientações pedidas e "discutidas" com a professora que segundo o nosso [illegible] foram muito gratificantes para o meu desempenho de trabalho.

1.4 Momentos de reflexão sobre a Prática Pedagógica

Muito relevante [X] Relevante [ ] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? Estes momentos de reflexão permitiram-me ter consciência de que existem situações que quando exploradas de modo diferente estas podem ser mais lucrativas. Penso que me ajudou a corrigir ~~[illegible]~~ muitas imperfeições evitando a que as repetisse.

2. Como considera, no conjunto, a adequação à sua formação como professora de matemática das tarefas de formação propostas:

2.1 Análise de documentos curriculares

Muito adequada [X] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.2 Análise de manuais escolares

Muito adequada [X] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.3 Resolução de problemas

Muito adequada [X] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.4 Exploração didáctica de problemas históricos

Muito adequada [X] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

2.5 Faça um comentário global às tarefas propostas.

Todas as tarefas propostas despertaram nos alunos muito interesse, surpreendendo-me muitas vezes (quase sempre) pela positiva.
Segundo a minha opinião, apenas uma actividade colocada/proposta aos alunos gerou mais confusão, pois penso que era um pouco confusa, mas após a minha orientação os alunos conseguiram entender e rapidamente e com muito interesse, resolveram a situação problemática.

3. Qual o papel que atribui ao trabalho que desenvolveu na planificação e dinamização do módulo que lhe coube explorar na exposição "Problemas com Peso e Medida" para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Através da exposição, pude verificar mais uma vez que, usando materiais adequados para a motivação dos alunos, estes resolvem as actividades de forma lúdica e muito enriquecedora para a compreensão.

3.1 Se explorou na sala de aula um dos problemas da exposição ou algum problema que apelasse a aspectos da exposição, refira-se a essa experiência de ensino/aprendizagem.

Sim, explorei dois dos problemas propostos na exposição, embora ~~sendo~~ sendo um pouco diferentes, mas que me surpreenderam muito pela positiva no sentido em que os alunos voltaram novamente a demonstrar interesse.
Apesar de na exposição a motivação e o interesse ter sido mais relevante (dado ao espaço e aos materiais utilizados, à decoração), também nas aulas os alunos participaram de forma ilariante.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

4. Qual a relevância do contributo, como futura professora de matemática, do percurso de formação a nível de:

4.1 Formação em matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Foi muito relevante no sentido em que mudou o meu ponto de vista face à formação em matemática, tendo ficado com a perspectiva de que a história da matemática é muito importante para a resolução de problemas, bem como para o despertar de interesses.

4.2 Formação em didáctica da matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Mostrou-me que a história da matemática pode tornar-se muito interessante quando esta é bem utilizada, bem explorada e que quando usada em contexto de aula resulta bastante bem e permite mostrar aos alunos que desde sempre a matemática foi necessária e que esteve presente em todas as áreas.

4.3 Mudança de atitude face à matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Passei a interessar-me mais pela história da matemática e que é muito importante e interessante conhecer os conceitos matemáticos que caíram em desuso ou foram substituídos por outros.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

4.4 Mudança de atitude face ao processo de ensino e aprendizagem da matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Consegui alterar ainda mais a minha opinião formada pelo processo de ensino e aprendizagem de matemática, no sentido em que este não deve ser expositivo mas sim através da descoberta e do despertar curiosidades e interesses.

5. Como avalia a receptividade do(a) Professor(a) Cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos e que integrou na sua Prática Pedagógica?

Muito receptivo ☒ Receptivo ☐ Pouco receptivo ☐ Nada receptivo ☐

Explicite a sua resposta.

A professora Cooperante aceitou da melhor forma o uso de problemas históricos, mostrando-se muito interessada para a sua aplicação nas aulas. Estando sempre de espírito aberto para novas propostas de problemas históricos.

6. Que perspectiva tem hoje relativamente à integração da história da matemática na aula de matemática?

Hoje tenho uma perspectiva muito boa, pois já tenho desenvolvido e explorado este tipo de integração com os alunos em contexto de aula.

Anexo 7
Respostas de Joana aos questionários (QT2)

Questionário

7. Como sente o contributo do percurso de formação para conseguir articular na sua prática de ensino, a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (ligações entre a matemática e outras disciplinas curriculares, ligações entre a matemática e problemas do quotidiano das sociedades, ligações entre conceitos / processos matemáticos)?

Foi um contributo muito bom pois como já referi anteriormente permitiu-me verificar que a matemática desde sempre esteve muito presente na vida do homem e que também que esta evoluiu com o tempo não tendo ficado parada.

8. Como caracteriza o ambiente de formação proporcionado (relações com a investigadora, relacionamento com a(s) colega (s) de Prática Pedagógica, relações com as colegas de turma, …)?

Muito bom ☒ Bom ☐ Razoável ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

Todas as relações que estabeleci com a investigadora, colegas de estágio e de turma, foram extremamente gratificantes para o meu desenvolvimento quer como futura professora de matemática, quer como cidadã que sou.

Muito obrigada pela sua colaboração.

Fátima Regina Jorge

Fátima Regina Jorge

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

- Dados Biográficos –

1. Nome: Inês ____________________

2. Data de nascimento: 01 / 07 / 83

3. Natural do Concelho de: Lisboa Distrito de Lisboa

4. Em tempo lectivo vive na sua residência habitual? Sim ☒ Não ☐

5. Se não reside com o agregado familiar, em tempo lectivo, com que regularidade vai a casa?

Fins de semana ☐ uma vez por mês ☐ nas férias lectivas ☐

outra periodicidade ☐ Qual? ______________

6. Estado civil: Solteira ☒ Casada ☐ Outra situação ☐

5. Presentemente, é trabalhadora estudante? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo indique a sua actividade profissional ____________________

____

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Básico e Secundário –

Recorde o seu percurso escolar **nos ensinos básico e secundário**.

1. No **ensino básico**:

1.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? As notas eram geralmente boas e não tinha dificuldades de maior em nenhuma disciplina.

1.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ——

1.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Tinha notas razoáveis apesar de notar que a minha aprendizagem ficou um pouco afectada porque houve uma lacuna no ensino ~~no~~ do 2º ciclo

1.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? A Matemática é uma disciplina que utilizamos no dia-a-dia, mesmo quando não damos conta, por isso, me despertava maior interesse.

1.5 De entre as áreas da Matemática que fazem parte do currículo da escolaridade básica, ordene as abaixo indicadas de acordo com as suas preferências enquanto aluna.

(A) Álgebra
(B) Estatística e Probabilidades
(C) Geometria
(D) Números e Cálculo
(E) Funções

B / D / C / A / E

(1ª preferência) / (2ª preferência) / (3ª preferência) / (4ª preferência) / (5ª preferência)

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

1.6 Da lista anterior, em qual ou quais das áreas sentiu mais dificuldades? Nas funções.

Porquê? É uma área que não gosto muito e talvez por isso tenha havido um maior desinteresse da minha parte, o que conduziu a maiores dificuldades.

2. No **ensino secundário:**

2.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☒ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? Consegui sempre concluir as disciplinas com notas razoáveis.

2.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ——

2.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☒ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? No início do secundário tive algumas dificuldades a Matemática mas depois comecei a melhorar, também porque o nível de exigência da escola era maior.

2.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? Apesar da Matemática leccionada no secundário ser mais abstracta, continuava-se a encontrar a sua utilização no quotidiano. Além do mais, tinha uma professora que nos incentiva muito

2.5 Que classificação obteve a Matemática no final do ensino secundário? 11 (na escala de 1 a 20).

2.6 Como estudava Matemática (por exemplo: sozinha, com apoio, regularmente, resolvendo muitos exercícios, …)? Em casa estudava sozinha não todos os dias mas regularmente e resolvendo exercícios. Depois tinha apoio (explicação) onde resolvia exercícios

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

3. Relativamente ao ensino básico ou secundário, tente recordar-se de um professor de Matemática de quem tenha gostado (não se refira ao nome). Porque gostou desse professor? Gostei muito da minha professora de Matemática dos 3 anos do secundário porque nos transmitia os conhecimentos de uma forma simples e preocupando-se sempre connosco. O ambiente nas aulas era muito agradável e mesmo que as notas nos testes não fossem as melhores, ela encorajava-nos sempre.

4. Tente agora recordar-se de um professor de Matemática do ensino básico ou secundário de quem não tenha gostado ? (não se refira ao nome). Porque não gostou desse professor? Não gostei de uma professora que tive no 3º ciclo (9º ano) porque não só não conseguia explicar os conteúdos como não tinha respeito por nós. A relação professora - aluno era quase inexistente.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Superior –

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação.

1. O curso que frequenta foi a sua primeira opção? Sim ☐ Não ☒

Em caso de resposta negativa, qual foi a sua primeira opção? Enfermagem

2. Em qualquer dos casos, indique a ou as razões que a levaram a optar por uma Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências?

O ano que ingressei no Ensino Superior não consegui entrar na 1ª opção e acabei por "entrar" na EST de Castelo Branco, em Engenharia Informática e das Tecnologias de Informação. Como não gostei, no ano seguinte pedi transferência para a ESECB.
Este pedido de transferência foi feito porque, desde pequena, sempre tive uma inclinação para o ensino, principalmente o do 1º ciclo. Mas como gostei muito do 2º ciclo, optei pela variante Matemática/Ciências

3. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1° e 2° ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente? 1° ciclo ☒ 2° ciclo ☐

Porquê? Para mim é o mais estimulante porque é onde os alunos aprendem imensas coisas.
Também gosto mais do 1º ciclo porque adoro trabalhar com crianças.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

4. Está a terminar a Prática Pedagógica no primeiro ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação, em relação à dimensão lectiva, para ser professora neste ciclo?

4.1 Genericamente:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☒ Bom ☐ Muito bom ☐

4.2 Em relação à Matemática:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

5. Qual o balanço que faz da disciplina de Prática Pedagógica:

5.1 Genericamente? É muito estimulante e gratificante porque a prática é muito mais importante que a teoria

5.2 No caso específico da Matemática? A Matemática no 1º ciclo é uma das áreas onde mais se aprende e que ajuda a desenvolver o raciocínio

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

Nome: Inês

Data: 20 /06/2006

PARTE I - Percurso Escolar no Ensino Superior (ESE)

Recorde o seu percurso em geral na ESE.

1. No ensino superior considera-se uma aluna de que nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Neste período de tempo que durou 4 anos aqui na ESE passei por muitas tarefas. Algumas consegui resultados mais positivos e noutros mais baixos. No entanto, sempre ~~tentei~~ cumpri os prazos para entrega de trabalhos e realizei todas as frequências. Para além disso participei em todas as aulas de forma voluntária.

2. E nas várias disciplinas da área científica de Matemática (Análise Infinitesimal, Álgebra, Estatística, Teoria da Probabilidade, Geometria, Teoria dos Números, História e Metodologia da Matemática) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☒ Fraco ☐

Porquê? Houve algumas nas quais tive imensas dificuldades, principalmente a Análise Infinitesimal que ainda não fiz resolver 1 ou 2 exames. Mas também houve algumas que considerei mais acessíveis talvez porque seja uma área de que gosto muito, refiro a Estatística e Teoria da Probabilidade. No caso da Álgebra tem conteúdos de que gostei muito, mas na avaliação não obtive uma nota elevada.

3. E nas disciplinas da área de Educação em Matemática (Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Gostei muito de MEM e talvez por isso tenha tirado uma nota tão elevada. As aulas eram diferentes: não tão teóricas e testando-nos consecutivamente. Para além disso também trabalhamos com materiais manipuláveis. Estruturas e Teorias de Ensino vem no mesmo enquadramento apenas de algumas diferenças. Penso que ambas nos prepararam um pouquinho para a prática.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

4. Reprovou alguma vez no ensino superior, em disciplinas da área de Matemática/Educação em Matemática?

Sim ☒ Não ☐

4.1 Em caso afirmativo, indique quais as disciplinas e o número de reprovações (entenda por reprovação apenas situações que implicaram uma nova matrícula na disciplina).

Análise Infinitesimal

5. Gosta de Matemática?

Sim ☒ Não ☐

Porquê?

Apesar de ser 1 "bicho papão" considero a Matemática muito útil no nosso quotidiano. No fundo tudo tem 1 pouco de Matemática, o segredo é [illegible].
Sempre gostei da Matemática até que no 10º ano me deparei com uma mudança de escola e o decréscimo das notas. Aí começaram as dificuldades. Esse ano foi complicado. Mas no ano seguinte superei as dificuldades e melhorei as notas o que fez renascer o gosto pela Matemática.

6. Tente caracterizar a relação que manteve com a Matemática / Educação em Matemática durante o seu curso na ESE (refira-se aos diferentes domínios do conhecimento matemático com que mais/menos se identificou, às dificuldades sentidas, aos desafios da formação …).

Houve alguns domínios com que não me identifiquei. Acho que algumas disciplinas são importantes num curso de formação de professores para o 1º e 2º ciclo do EB no entanto também acho que algumas disciplinas são pouco adequadas, como por exemplo, a Análise Infinitesimal ou a Álgebra.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

7. Quer deixar algumas sugestões de mudanças possíveis?

Penso que seria importante haver mais disciplinas relacionadas com a didáctica da matemática. Assim, como mais direccionadas para o ensino dos conteúdos que nos compete leccionar na nossa prática.

8. Está a terminar a Prática Pedagógica no 2º ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação para ser professora de matemática neste ciclo?

A nível científico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

A nível pedagógico/didáctico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

Na minha opinião a formação de professores ainda tem algumas lacunas. Aprendemos a "ensinar" na Prática Pedagógica porque por muita teoria que tenhamos assimilado não há nada como o contacto directo com as situações.

Nesta etapa foi muito importante a ajuda do professor supervisor e do cooperante que nos orientou e indicou as melhores estratégias facilitando-nos um pouco as dificuldades iniciais.

9. Que contributo lhe trouxe a realização de Prática Pedagógica no 1º ciclo do ensino básico para a Prática Pedagógico no 2º ciclo?

Gostei muito da Prática Pedagógica no 1º ciclo fascina-me o contacto com alunos mais novos. E esta prática fez-me ter uma primeira perspectiva, não muito real, do que é o ensino.

No entanto foi completamente diferente da do 2º ciclo que para mim foi algo

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

complicado no início

10. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente?

1º ciclo [x] 2º ciclo [ ]

Porquê? Como já disse atrás gosto muito de trabalhar com os mais novos. Além disso o 1º ciclo permite-nos uma relação mais estreita com as crianças já que passamos mais tempo com elas.

11. Quais são as suas expectativas em relação à profissão que escolheu?

Neste momento não são muito animadoras. Apesar de ser optimista por natureza não posso deixar de ser realista. Está muito complicado!
Assim sendo terei de procurar qualquer outra actividade que as minhas habilitações me permitam exercer.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

PARTE II – Percurso de Formação

Recorde o percurso de formação que fizemos em conjunto a partir de Janeiro de 2005, nas disciplinas de Geometria, História e Metodologia da Matemática e Prática Pedagógica.

1. Explicite a sua opinião sobre a relevância para a sua formação como professora de matemática que atribui aos diferentes momentos do percurso de formação:

1.1 Abordagem dos conteúdos relativos a Medida e resolução de problemas históricos em Geometria

Muito relevante [ ] Relevante [X] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? A Geometria permitiu-me 1 contacto com uma área que eu desconhecia. Acho interessante e importante trabalharmos problemas históricos.

1.2 Seminários de sensibilização para a importância da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática

Muito relevante [ ] Relevante [X] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? É sempre importante haver uma referência à história da matemática porque nos ajuda no enquadramento.
A sensibilização para a resolução de problemas também foi importante até porque é uma das estratégias mais utilizadas.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

1.3 Sessões de apoio à planificação da Prática Pedagógica

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Alertou-nos para alguns aspectos que possivelmente nos teriam "passado ao lado" e ajudou-nos na escolha das actividades.

1.4 Momentos de reflexão sobre a Prática Pedagógica

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Permitiu-nos analisar a nossa prática e detectar-mos os nossos erros para depois os podermos corrigir.

2. Como considera, no conjunto, a adequação à sua formação como professora de matemática das tarefas de formação propostas:

2.1 Análise de documentos curriculares

Muito adequada ☐ Adequada ☒ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.2 Análise de manuais escolares

Muito adequada ☐ Adequada ☒ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.3 Resolução de problemas

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.4 Exploração didáctica de problemas históricos

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

2.5 Faça um comentário global às tarefas propostas.

De um modo geral as tarefas propostas ~~est~~ foram bem seleccionadas e estavam adequadas ao conteúdo e aos alunos.

3. Qual o papel que atribui ao trabalho que desenvolveu na planificação e dinamização do módulo que lhe coube explorar na exposição "Problemas com Peso e Medida" para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A exposição permitiu-nos resolver um problema utilizando materiais manipuláveis o que nos deu uma outra perspectiva da resolução de problemas e que motivou os alunos.

3.1 Se explorou na sala de aula um dos problemas da exposição ou algum problema que apelasse a aspectos da exposição, refira-se a essa experiência de ensino/aprendizagem.

Os alunos mostraram-se muito interessados em resolver um problema que tinha resolvido na exposição mas sem os materiais manipuláveis. A maioria resolve-o sem dificuldades de maior, e alguns até ainda se lembravam do resultado.

sic

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

4. Qual a relevância do contributo, como futura professora de matemática, do percurso de formação a nível de:

4.1 Formação em matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Trabalhar com problemas históricos permitiu-me ter contacto com uma outra área da Matemática que a formação académica não engloba

4.2 Formação em didáctica da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Algumas das tarefas podiam ser resolvidas utilizando materiais manipuláveis. Permitiram também desenvolver outras estratégias.

4.3 Mudança de atitude face à matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Permitiu-me ver a matemática de uma outra perspectiva englobando mais conteúdos

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

4.4 Mudança de atitude face ao processo de ensino e aprendizagem da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Inserem-se outros conteúdos no ensino/aprendizagem da Matemática.

5. Como avalia a receptividade do(a) Professor(a) Cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos e que integrou na sua Prática Pedagógica?

Muito receptivo ☐ Receptivo ☒ Pouco receptivo ☐ Nada receptivo ☐

Explicite a sua resposta.

O professor cooperante nunca pôs quaisquer entraves à realização das actividades.

6. Que perspectiva tem hoje relativamente à integração da história da matemática na aula de matemática?

Penso que não é muito bem integrada e que poderia ser uma mais valia para o ensino da Matemática.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

---

7. Como sente o contributo do percurso de formação para conseguir articular na sua prática de ensino, a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (ligações entre a matemática e outras disciplinas curriculares, ligações entre a matemática e problemas do quotidiano das sociedades, ligações entre conceitos / processos matemáticos)?

~~Pens~~ De um modo geral penso que sim vai facilitar porque também me ajudou em muitos aspectos da prática pedagógica já que tenho algumas dificuldades em estabelecer conexões.

8. Como caracteriza o ambiente de formação proporcionado (relações com a investigadora, relacionamento com a(s) colega (s) de Prática Pedagógica, relações com as colegas de turma, …)?

Muito bom ☒ Bom ☐ Razoável ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

O ambiente foi sempre descontraído e num clima de democrática discussão de ideias o que beneficiou tudo e todos.

Muito obrigada pela sua colaboração.

Fátima Regina Jorge

Fátima Regina Jorge

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

- Dados Biográficos –

1. Nome: Beatriz

2. Data de nascimento: 1 / 5 / 83

3. Natural do Concelho de: Pampilhosa da Serra Distrito de Coimbra

4. Em tempo lectivo vive na sua residência habitual? Sim ☐ Não ☒

5. Se não reside com o agregado familiar, em tempo lectivo, com que regularidade vai a casa?

   Fins de semana ☒ uma vez por mês ☐ nas férias lectivas ☐

   outra periodicidade ☐ Qual? ____________

6. Estado civil: Solteira ☒ Casada ☐ Outra situação ☐

5. Presentemente, é trabalhadora estudante? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo indique a sua actividade profissional ____________

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Básico e Secundário –

Recorde o seu percurso escolar **nos ensinos básico e secundário**.

1. No **ensino básico**:

1.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Era uma aluna bastante aplicada e trabalhadora e tinha muita ajuda em casa dos meus pais, que me acompanhavam e auxiliavam nos trabalhos de casa.

1.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ________________

1.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Resolvia sem grandes dificuldades os problemas propostos.

1.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? porque era uma disciplina em que me sentia à vontade, ~~podendo~~ percebia rapidamente e sem dificuldades os problemas que me eram colocados.

1.5 De entre as áreas da Matemática que fazem parte do currículo da escolaridade básica, ordene as abaixo indicadas de acordo com as suas preferências enquanto aluna.

(A) Álgebra
(B) Estatística e Probabilidades
(C) Geometria
(D) Números e Cálculo
(E) Funções

D / B / A / C / E

(1ª preferência) / (2ª preferência) / (3ª preferência) / (4ª preferência) / (5ª preferência)

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

1.6 Da lista anterior, em qual ou quais das áreas sentiu mais dificuldades? Da lista anterior, a área que senti mais dificuldades foi funções

Porquê? As funções foi uma área em que sentia algumas dificuldades, não entendia logo como eu queria, desmotivando-me.

2. No **ensino secundário:**

2.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco [ ] Médio [ ] Bom [X] Muito Bom [ ]

Porquê? Porque fui uma aluna que me aplicava bastante, apesar de me ter que levantar muito cedo e chegar tarde a casa ainda tinha tempo para estudar, aproveitando também tempos livres na escola para fazer os trabalhos e estudar.

2.2 Reprovou alguma vez? Sim [X] Não [ ]

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? 12º

2.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco [ ] Médio [X] Bom [ ] Muito Bom [ ]

Porquê? Acho que o professor não explicava devidamente os conteúdos, tornava-os muito confusos, era tudo muito teórico. A mudança de escola também alterou a minha maneira de estudar.

2.4 Gostava de Matemática? Sim [X] Não [ ]

Porquê? A matemática foi sempre uma área que eu gostei, não sei explicar o verdadeiro motivo talvez fosse aquela em que sem grande esforço percebia e entendia a matéria.

2.5 Que classificação obteve a Matemática no final do ensino secundário? 11
(na escala de 1 a 20).

2.6 Como estudava Matemática (por exemplo: sozinha, com apoio, regularmente, resolvendo muitos exercícios, …)? Estudava matemática na cozinha e no quarto resolvendo exercícios regularmente, recorrendo aos professores quando não os conseguia resolver ou a colegas.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

3. Relativamente ao ensino básico ou secundário, tente recordar-se de um professor de Matemática de quem tenha gostado (não se refira ao nome). Porque gostou desse professor? Sim recordo, foi no meu segundo ano do 12º, foi um professor que explicava claramente e corretamente os conteúdos, resolvendo e aplicando problemas de uso corrente. Esse professor se fosse dos meu 3 anos do ensino secundário, acho que os meus conhecimentos de matemática eram muito mais profundos e claros, assim como a média do ensino secundário teria sido melhor.

4. Tente agora recordar-se de um professor de Matemática do ensino básico ou secundário de quem não tenha gostado ? (não se refira ao nome). Porque não gostou desse professor Não gostei do meu professor do ensino secundário ~~que~~ do 11º ano, era um professor já um pouco velho, além disso, nem era professor era engenheiro e limitava-se a colocar exercícios no quadro para resolver sem explicar os conteúdos anteriormente, penso que ele próprio ~~nem~~ alguns deles nem ele os sabia resolver, pois os exercícios que colocava no quadro era de um livro de exercícios resolvidos que posteriormente viemos a descobrir.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Superior –

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação.

1. O curso que frequenta foi a sua primeira opção? Sim ☐ Não ☒

Em caso de resposta negativa, qual foi a sua primeira opção? enfermagem

2. Em qualquer dos casos, indique a ou as razões que a levaram a optar por uma Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências?

Devido ao facto de sempre ter gostado de matemática e ciências, mesmo apesar da má experiência do 10º ano e do 11º ano. Estas áreas sempre me cativaram, as ciências pelo estudo das coisas, dos factos, porque é que isto acontece e não aquilo sempre foi uma coisa que me apaixona. A matemática pelo facto de gostar de ~~de perceber~~ Resolver exercícios que englobam números e de os perceber.

3. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente? 1º ciclo ☐ 2º ciclo ☒

Porquê? porque são áreas que eu gosto mais, adoro explicar matemática, é a área que eu gosto mais, sinto-me motivada, empenhada, talvez o facto de gostar mais dela influencie, as ciências também gosto, para poder realizar experiências, contar muitos factos que para eles são desconhecidos. E além disso, estou a lidar com crianças um pouco maiores, penso com um pouco mais de maturidade, não se distraem tão facilmente.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT1)

Questionário

4. Está a terminar a Prática Pedagógica no primeiro ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação, em relação à dimensão lectiva, para ser professora neste ciclo?

4.1 Genericamente:

A nível científico - Insuficiente [ ] Suficiente [ ] Bom [X] Muito bom [ ]

A nível pedagógico - Insuficiente [ ] Suficiente [ ] Bom [X] Muito bom [ ]

4.2 Em relação à Matemática:

A nível científico - Insuficiente [ ] Suficiente [ ] Bom [X] Muito bom [ ]

A nível pedagógico - Insuficiente [ ] Suficiente [ ] Bom [X] Muito bom [ ]

5. Qual o balanço que faz da disciplina de Prática Pedagógica:

5.1 Genericamente? A área da prática pedagógica é muito favorável e benéfica, pois colocamos em prática os conteúdos que adquirimos, e uma ~~se~~ coisa é a teoria, outra é a prática, aprendemos a lidar e a trabalhar com as crianças, a saber colocar o tom de voz correctamente, entre outras situações que são favoráveis, pois também nós próprios recordamos conteúdos simples que por vezes nos passaram despercebidos.

5.2 No caso específico da Matemática? Na área da Matemática, acho que saímos com um conhecimento bastante razoável, para além dos conhecimentos que são necessários para o 1º e 2º ciclo, ficamos com outros que ~~nos~~ ~~servem~~ também nos ajudam e servem de colheita para situações do dia-a-dia, e quem sabe futuramente ir mais ~~e~~ longe. A prática pedagógica ajuda-nos a colocar em prática todos estes conhecimentos que aprendemos nestes anos, é muito favorável.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

Nome: Beatriz

Data: 20 /06/2006

PARTE I - Percurso Escolar no Ensino Superior (ESE)

Recorde o seu percurso em geral na ESE.

1. No ensino superior considera-se uma aluna de que nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Sou uma aluna que tenho as minhas limitações, tal como tudo. Contudo sou uma aluna aplicada em tudo o que me empenho e é graças a isso que consigo obter o sucesso que tenho neste momento. É certo que

2. E nas várias disciplinas da área científica de Matemática (Análise Infinitesimal, Álgebra, Estatística, Teoria da Probabilidade, Geometria, Teoria dos Números, História e Metodologia da Matemática) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? acho que consegui atingir de uma maneira geral os objectivos propostos, conseguindo resolver várias as várias situações com um grau relativamente bom, sempre empenhando-me em cada tarefa.

3. E nas disciplinas da área de Educação em Matemática (Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? fiquei com bastantes conhecimentos de matemática, assim como de metodologias do ensino para poder aplicar ~~me~~ na minha prática.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

4. Reprovou alguma vez no ensino superior, em disciplinas da área de Matemática/Educação em Matemática?

Sim ☐ Não ☒

4.1 Em caso afirmativo, indique quais as disciplinas e o número de reprovações (entenda por reprovação apenas situações que implicaram uma nova matrícula na disciplina).

5. Gosta de Matemática?

Sim ☒ Não ☐

Porquê?

Desde criança que a área da matemática
sempre me motivou, não sei se pelo facto de
resolver com alguma facilidade as situações
que me eram colocadas. Lembro-me que já
nesse tempo dizia que queria ser professora
de matemática, apesar de haver uma altura
em que dizia que não, mais propriamente no 10º ano.
A professora que nos orientou deixou muito
a desejar, o que me desorientou um pouco.
Contudo a área das ciências sempre me
motivou, pelo facto da descoberta, motiva-me.

6. Tente caracterizar a relação que manteve com a Matemática / Educação em Matemática durante o seu curso na ESE (refira-se aos diferentes domínios do conhecimento matemático com que mais/menos se identificou, às dificuldades sentidas, aos desafios da formação …).

~~[illegible]~~
A minha relação com a Matemática / Educação
em Matemática foi boa, permitiu-me
aprofundar mais diferentes domínios do
conhecimento matemático, penso que a Didáctica
da matemática e a História da ~~mais~~ matemática
foram as disciplinas com as quais me identifiquei
pois pelo enfrentarmos desafios que nos
permitiram formar melhores professoras.

7. Quer deixar algumas sugestões de mudanças possíveis?

Apenas quero dizer, que o nível de algumas disciplinas e que são indispensáveis para a formação deveriam ser um pouco mais práticas.

8. Está a terminar a Prática Pedagógica no 2º ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação para ser professora de matemática neste ciclo?

A nível científico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

A nível pedagógico/didáctico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

Penso que é Bom, porque acho, que consigo transmitir os objectivos propostos aos alunos. tento sempre arranjar estratégias diferentes e motivantes, e nos quais eles possam participar. É claro que ainda tenho pontos que preciso melhorar, mas com o tempo vou tentar melhorá-los de forma a ser uma boa profissional.

9. Que contributo lhe trouxe a realização de Prática Pedagógica no 1º ciclo do ensino básico para a Prática Pedagógico no 2º ciclo?

Ajudou bastante, ficamos com uma ideia como se planificavam as aulas, a maneira de estar e agir com a turma. Saber motivar os alunos arranjando estratégias diferentes e motivadoras.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

10. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente?

1º ciclo ☐ 2º ciclo ☒

Porquê? Porque no 2º ciclo encontro mais em específico as áreas que gosto de leccionar. Os alunos também já são um pouco mais crescidos, o que penso que conseguimos implementar estratégias e metodologias mais diversificadas e ~~ter~~ motivadoras.

11. Quais são as suas expectativas em relação à profissão que escolheu?

Eu tenho boas expectativas, e o facto da situação a nível do ensino não ser fácil. Eu na área que gosto de fazer, trabalhando com crianças e sinto-me realizada. Neste momento posso não encontrar trabalho, mas posso noutra, o importante é não desistir e lutar por aquilo que queremos e se for preciso fazer mais formações vamos fazer.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

PARTE II – Percurso de Formação

Recorde o percurso de formação que fizemos em conjunto a partir de Janeiro de 2005, nas disciplinas de Geometria, História e Metodologia da Matemática e Prática Pedagógica.

1. Explicite a sua opinião sobre a relevância para a sua formação como professora de matemática que atribui aos diferentes momentos do percurso de formação:

1.1 Abordagem dos conteúdos relativos a Medida e resolução de problemas históricos em Geometria

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? acho que os manuais fazem pouca referência a factos históricos do nosso país. E penso que para sermos bons professores a história nas aulas de matemática é importante. O facto de as conhecermos como hoje são, alguém teve que "trabalhar" por nós e penso que é importante saber como apareceram, como eram utilizados nesse tempo.

1.2 Seminários de sensibilização para a importância da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? os seminários ajudaram-nos a explorar, usar e analisar mais correctamente diversos materiais como manuais, os ~~[illegible]~~ documentos curriculares, situações problemáticas e a forma como os exploramos. Isto permite-nos ter deste modo, ~~[illegible]~~ no fundo uma melhor prática pedagógica e uma melhor formação como docente.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

1.3 Sessões de apoio à planificação da Prática Pedagógica

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Na minha opinião estas secções ajudaram-nos a planificar as nossas aulas, colocando nelas estratégias e actividades sempre diversificadas e diferentes. Com ~~as~~ estas situações conseguimos obter uma turma mais participativa e motivada para as situações que lhes são propostas.

1.4 Momentos de reflexão sobre a Prática Pedagógica

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Penso ~~p~~ mim é nos momentos de reflexão que "reflectis" sobre ~~[illegible]~~ os aspectos bons e negativos que deveriam ser melhores. Para me formar uma boa professora, deve-se "meditar" sobre os factos ocorridos para melhorar os próximos. Por exemplo, quando acabamos de leccionar uma aula, e corre bem, à primeira vista, parece não haver aspectos negativos, mas se formos reflectir em pormenor sobre os assuntos verificamos que há aspectos por mais pequenos que sejam deveriam ser melhorados, é por isso que acho importante a reflexão.

2. Como considera, no conjunto, a adequação à sua formação como professora de matemática das tarefas de formação propostas:

2.1 Análise de documentos curriculares

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.2 Análise de manuais escolares

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.3 Resolução de problemas

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

2.4 Exploração didáctica de problemas históricos

Muito adequada ☒ Adequada ☐ Pouco adequada ☐ Nada adequada ☐

Questionário

2.5 Faça um comentário global às tarefas propostas.

Penso que uma docente deve considerar todos os aspectos indispensáveis à sua formação como professora, quanto mais materiais usar, explorar, mais facilidade terá futuramente para desempenhar o seu papel como docente, arranjando sempre metodologias diversificadas, e com a aplicação em situações reais.

3. Qual o papel que atribui ao trabalho que desenvolveu na planificação e dinamização do módulo que lhe coube explorar na exposição "Problemas com Peso e Medida" para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Foi um projecto que nos deu grande trabalho mas que no fim foi compensado por todas as crianças que vieram e se mostraram motivadas e interessadas por aspectos diferentes fora do texto de aula, sem se aperceberem aprenderam aspectos importantes do seu país envolvendo situações de matemática que se fossem dados na aula "só calhar" não lhe motivaria. Este trabalho possibilitou-nos a ter uma melhor noção como a matemática é divertida e temos que passar isso aos nossos alunos, organizando futuramente exposições deste tipo.

3.1 Se explorou na sala de aula um dos problemas da exposição ou algum problema que apelasse a aspectos da exposição, refira-se a essa experiência de ensino/aprendizagem.

Esta experiência que tive com os problemas foi muito gratificante como futura professora, e penso que os alunos ficam a conhecer factos históricos do seu país, aplicam ao mesmo tempo a matemática em situações reais.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

4. Qual a relevância do contributo, como futura professora de matemática, do percurso de formação a nível de:

4.1 Formação em matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A área de matemática e sendo nós futuros professores de matemática, esta área é fundamental, sem dúvida que nos forma melhores docentes e com um conhecimento mais aprofundado nesta área.

4.2 Formação em didáctica da matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A maneira como se ensina é importante, e o facto de saber como se ensina, de saber mudar de metodologias sempre que necessário é fundamental, e esta disciplina acho que nos proporcionou um pouco isso.

4.3 Mudança de atitude face à matemática

Muito relevante ☒ Relevante ☐ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A maneira como encaramos a matemática é fundamental, eu praticamente sempre vi a matemática como uma disciplina engraçada, com grandes desafios o que me motivava e estou aqui hoje por isso, porque estou naquilo que gosto de fazer. E se vemos a matemática como "chatisse" como vamos nós dar aulas com metodologias diversificadas e motivadoras aos alunos

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

4.4 Mudança de atitude face ao processo de ensino e aprendizagem da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A minha atitude pelo processo de ensino e aprendizagem da matemática foi sempre de "respeito", ou seja, não mudei muito a minha opinião face ao ensino, penso que temos um papel fundamental na aprendizagem dos alunos e temos que implementar uma aprendizagem motivadora e interessante com aplicações do dia-a-dia para assim obterem sucesso escolar.

5. Como avalia a receptividade do(a) Professor(a) Cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos e que integrou na sua Prática Pedagógica?

Muito receptivo ☒ Receptivo ☐ Pouco receptivo ☐ Nada receptivo ☐

Explicite a sua resposta.
A orientação de um professor cooperante é indispensável, ele orienta-nos sempre que precisamos, ajuda-nos a implementar metodologias e estratégias que sejam motivadoras para causar interesse nos alunos e consequentemente a sua aprendizagem.

6. Que perspectiva tem hoje relativamente à integração da história da matemática na aula de matemática?

Eu penso que é fundamental estudar a história da matemática, visto que anteriormente não tinha conhecimento como as coisas acontecem e foram em tempos permite-nos ter uma melhor visão e uma maior cultura e facilidade para "enfrentar" o mundo e a carreira como docente.

Anexo 9
Respostas de Beatriz aos questionários (QT2)

Questionário

7. Como sente o contributo do percurso de formação para conseguir articular na sua prática de ensino, a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (ligações entre a matemática e outras disciplinas curriculares, ligações entre a matemática e problemas do quotidiano das sociedades, ligações entre conceitos / processos matemáticos)?

Este percurso de formação é muito relevante, fundamental para deste modo conseguirmos uma prática de ensino com maior sucesso articulando com outros aspectos por exemplo a história da matemática, o que nos permite também resolver situações problemáticas com maior facilidade dentro e fora da matemática.

8. Como caracteriza o ambiente de formação proporcionado (relações com a investigadora, relacionamento com a(s) colega (s) de Prática Pedagógica, relações com as colegas de turma, ...)?

Muito bom [X] Bom [ ] Razoável [ ] Fraco [ ]

Explicite a sua resposta.

De facto o bom ambiente que temos tido de formação proporciona-se um clima mais agradável para aprender e esclarecendo de dúvidas ao qual sabemos que podemos contar com alguém é muito bom para a aprendizagem e neste caso para a nossa formação.

Muito obrigada pela sua colaboração.

Fátima Regina Jorge

Fátima Regina Jorge

Anexo 10
Validação da Análise de Conteúdo realizada (Beatriz)

A análise que lhe apresento recaiu sobre as suas respostas aos questionários (QT), entrevistas (ENT), prática de ensino (aula) e às reflexões que fizemos nas sessões de trabalho (ST) que realizámos em conjunto. Peço-lhe, agora, que se pronuncie nos seguintes itens:

1. Em termos globais concorda com a análise feita?

   ☒ Sim ☐ Não

2. Faça algum comentário que considere pertinente e indique em concreto os aspectos sobre os quais não concorda (pode mesmo sublinhar no texto e desenvolver com comentários à margem).

Começando por fazer um balanço relativamente a todos os aspectos que me foram dirigidos, tenho a dizer que em termos globais concordo com a análise que me foi feita, contudo há aspectos que não concordo por inteiro.

Relativamente à resolução de problemas históricos, tenho a dizer que muitas vezes não apresento justificações ou falta a resposta, porque era uma resolução para mim, eu entendo e consigo tirar conclusões do que escrevi. É claro se for para outra pessoa ler e interpretar a resolução teria que ser exposta de outra forma, de modo a facilitar a compreensão ao outro leitor.

Quanto à minha execução na P.P., acho que melhorei satisfatoriamente de unidade para unidade e foi perceptível a minha preocupação de forma a manter os alunos interessados sobre a matéria. É claro que houve falhas e aspectos que tinha que melhorar e que ao longo da minha carreira profissional vou tentando aperfeiçoar cada vez mais.

Mas também, o facto de sabermos que estamos sob avaliação e a ser observados relativamente à nossa prestação, o nosso nervosismo e inquietação aumenta, e além disso, o facto de estarmos sob a pressão do tempo e para que tudo corra da melhor forma, faz com que nos apercebamos de certos aspectos, um pouco mais direccionados para aquilo que tínhamos preparado, levando-nos a estar um

Data 3 / 10 / 2007

Nome: Beatriz

Obrigada pela sua colaboração

Anexo 10
Validação da Análise de Conteúdo realizada (Joana)

A análise que lhe apresento recaiu sobre as suas respostas aos questionários (QT), entrevistas (ENT), prática de ensino (aula) e às reflexões que fizemos nas sessões de trabalho (ST) que realizámos em conjunto. Peço-lhe, agora, que se pronuncie nos seguintes itens:

1. Em termos globais concorda com a análise feita?

   Sim ☒ Não ☐

2. Faça algum comentário que considere pertinente e indique em concreto os aspectos sobre os quais não concorda (pode mesmo sublinhar no texto e desenvolver com comentários à margem).

Em termos globais concordo com a análise realizada, tal como referi anteriormente, embora hoje alguns aspectos a considerar. Na resolução conceptual de problemas históricos, a forma como eu apresentei a resolução nas minhas folhas, não é acompanhada por uma justificação completa, devido ao facto de as folhas serem apontamentos meus, não precisando de desenvolver as explicações todas para compreender como se resolve o problema. Caso tivesse de apresentar uma resolução dos problemas às crianças, esta seria organizada de outra forma, de modo claro para os alunos e seria acompanhada de todas as justificações necessárias.

Em relação à exploração do contexto dos problemas não fiz nenhuma referência, de que os problemas que os alunos iam resolver eram já conhecidos deles, da exposição realizada na ESE, uma vez que tinha

Obrigada pela sua colaboração

Data ___ / ____ / 2007

Nome: _ _______________

ficado acordado com a professora cooperante, para desta forma termos a noção de quais os alunos que se aperceberiam e se manifestariam. Esta situação tinha também como intuito de chegar-

Anexo 10
Validação da Análise de Conteúdo realizada (Joana)

ma à conclusão de que o ambiente/meio onde os mesmos problemas são dados influência no interesse e na compreensão dos problemas.

Para terminar, considero que esta experiência do uso de problemas antigos, foi muito gratificante e muito relevante no contributo da minha formação em didáctica da matemática, bem como a ajuda prestada durante a prática pedagógica, pela professora Fátima Regina.

É de referir que a história da matemática se torna extremamente interessante quando é bem explorada, permitindo passar aos alunos que a matemática é fundamental e que desde sempre, esta foi necessária em todas as áreas.

Anexo 10
Validação da Análise de Conteúdo realizada (Inês)

A análise que lhe apresento recaiu sobre as suas respostas aos questionários (QT), entrevistas (ENT), prática de ensino (aula) e às reflexões que fizemos nas sessões de trabalho (ST) que realizámos em conjunto. Peço-lhe, agora, que se pronuncie nos seguintes itens:

1. Em termos globais concorda com a análise feita?

   Sim ☒ Não ☐

2. Faça algum comentário que considere pertinente e indique em concreto os aspectos sobre os quais não concorda (pode mesmo sublinhar no texto e desenvolver com comentários à margem).

   Já li o documento e não tenho nada a acrescentar ou comentar. Parece-me uma análise bastante real e não acho que tenha sido demasiado "agressiva". De qualquer modo é sempre bom ouvirmos outras opiniões!

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

Entrevista realizada na sala 1 em 21 de Junho de 2005

Inv (I)	Gostou da primeira experiência de PP?
Joana (J)	Gostei, apesar de haver muito trabalho. É tudo muito em cima da hora. Gostei muito. Aprendi muitas coisas. Houve situações que nunca imaginava que fossem assim.
I	Por exemplo?
J	Não sei. Acho que houve … estar lá à frente, acho que é completamente diferente. Foi engraçado. E houve certas coisinhas básicas de que eles já nem sequer me lembrava. A pesquisa toda que tivemos de fazer para preparar as aulas.
I	E foi surpreendida nas aulas com alguma coisa? Com alguma reacção dos alunos?
J	Ah, sim. Coisas que nós às vezes pensávamos que eles não sabiam e já sabiam e outras que pensávamos que eles sabiam e afinal … Havia lá uma aluna que tinha grandes dificuldades na aprendizagem e eu mandei-a ir ao quadro e ela nem sequer era capaz de ler o número que lá estava escrito. Acho que era mil. Era mil. Ela não era capaz de ler que era mil. Coisas assim. Não sei, coisas que nós nunca pensámos que acontecessem
I	Então foi surpreendida pela prática?
J	Eu acho que sim.
I	Agradavelmente surpreendida?
J	Sim, mas também há muitas coisas negativas. Uma pessoa pensa que é de uma maneira e depois sai de outra.
Inv	Como por exemplo?
J	Não sei. Eu acho que foi muito trabalho. Uma pessoa deixa de ter tempo para nós e para muita coisa. Eu acho que nos faz falta para nos sentirmos bem. Deixamos de ter tempo para muita coisa.
I	E essa foi a parte mais negativa do estágio?
J	Eu acho que sim. Sem dúvida.
I	No questionário a Joana refere o muito tempo dispendido na construção de materiais e a pouca valorização que foi dado a esse trabalho.
J	Também, também. Primeiro porque eu não tenho grande jeito para essas coisas, para materiais. Não tenho grande jeito e … acho que havia certas coisas que nós chegávamos lá [à sala de aula] e expúnhamos e muitas das vezes já nem interessava.
I	Mas acha que esse trabalho não foi valorizado?
J	Eu acho que sim.
I	Pelos alunos …
J	Pelos alunos acho que sim..
I	Pela professora cooperante, também?
J	Acho que sim.
	Então quem é que não valorizava?
J	Eu acho que somos nós próprios, porque temos a noção da trabalheira que aquilo nos deu, o material que nós levamos. O trabalho que nos deu e chegamos lá e em 2 minutos ou nem tanto, está tudo explorado.
I	Mas quando o construíam tinham noção da brevidade?
J	Tínhamos. E tinha de ser. As coisas não podem ser extensas, porque senão as

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

	crianças perdem a motivação, perdem o interesse. Ainda para mais aquela turma.
I	Das actividades que desenvolveu no âmbito do ensino da matemática, de quais é que mais gostou?
J	Não sei, mas eu acho que foi na minha primeira semana. Uma aula em que estivemos a resolver situações problemáticas. Eu gostei muito disso.
I	Depois não repetiu essa experiência de ensino?
J	Sim, repeti. Mas eu acho que a primeira vez deu mais gozo. Eu acho.
I	Então porquê?
J	Não sei.
I	As situações foram melhor escolhidas?
J	Também porque … como era no início, as crianças não andavam tão fartas. Andavam mais entusiasmadas. Agora, com o calor, estavam a perder a motivação. Tornava-se um bocado desesperante. A sala é muito quente. Bate lá o sol. Nós temos lá uma ventoinha, mas a ventoinha está a gerar a vento quente. Por isso é que os miúdos muitas vezes perdiam o interesse e tinham mais tendência para a conversa. Coitadinhos, eles estavam completamente a transpirar, estavam constantemente a pedir-nos para ir beber e parecendo que não isso aí perturba um bocado. Perdem a a atenção toda.
I	Portanto a experiência de ensino que mais apreciou em matemática relacionou-se com a resolução de problemas?
J	Eu acho que sim.
I	Procurou dinamizar aulas de trabalho de grupo?
J	Ah sim fizemos, mas não foi na área da matemática. Ah foi, porque o material não chegava para todos e então decidimos fazer em grupinhos. Mas, como a turma era muito faladora, aquilo gerou
I	Achou que não correu bem?
J	Não, correu até correu. A actividade como é em grupo já gera barulho, então com aquela turma pior é. Mas esteve engraçado.
I	E da parte dos alunos, o que é que sentiu que mais interessava aos alunos em termos de experiências de aprendizagem?
J	O que é que mais interessava aos alunos? Era mesmo quando colocava situações problemáticas e que eles tinham que resolver.
I	Acha que era quando conseguia envolver o maior número de alunos?
J	Sim, sim. Eu acho que as coisas funcionam melhor quando estão todos envolvidos do que só um.
I	Houve situações em que sentiu que nem todos estavam envolvidos na realização das actividades?
J	Senti, mas tentava orientá-los. Mas há sempre, porque havia duas crianças que quando os outros já tinham feito tudo eles ainda estavam a escrever o problema.
I	Teve dificuldade em gerir os diferentes ritmos de aprendizagem?
J	Não. Não sei. No início, um bocadinho. Primeira aula é complicado, mas depois acho que não.
I	Acha que ao longo deste período de PP houve evolução?
J	Sim, apesar de eu achar que as minhas primeiras aulas foram melhores do que as últimas. Melhores ao nível do interesse dos alunos, porque lá está foi a situação de que eu estava a falar, do calor. E depois nas últimas aulas já estávamos a rever muita matéria que eles já tinham falado e eles perdem o interesse. Então perde o interesse por causa disso e depois com o calor pior ainda. E aquela turma

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

	é muito faladora, muito, muito.
I	Esse foi um aspecto que a incomodou?
J	Bastante. Porque não sei, nós preparávamos tudo com tanto agrado e acreditávamos que eles iam gostar. Chegávamos lá, nós queríamos dar as coisas e falar como tínhamos planeado e muitas vezes tínhamos que improvisar na hora, porque a situação não era aquela que nós queríamos. Não é? Aquela questão do barulho. Bem temos que fazer doutra maneira para os calar. Tem de ser um bocado de improviso.
I	Dentro das Grandezas e Medidas o que é que gostou mais de ensinar?
J	Dentro das Grandezas e Medidas? Não sei. Eu acho que gostei muito de ensinar as reduções do metro para decímetro, para centímetro, apesar de ter sido um conteúdo dado por uma das minhas colegas. Não sei se foi pela Beatriz. Mas ela referiu, mas os miúdos ainda não tinham bem aquela noção. E a parte do quilograma também. Essa deu bastante prazer.
I	Porquê?
J	Não sei. Porque … primeiro eles ainda não conheciam, muitos já falavam no quilograma e o grama, mas … e depois aquela turma são muito … de ir ver. Por exemplo, estamos a dar qualquer coisa e vão ao livro que é para dizer, para atrapalhar a aula. E são muito isso.
I	E então que conteúdo gostou menos de ensinar.
J	O que menos gostei .. não sei.
I	Gostou de todos.
J	Sim, acho que sim. Gostei de todos. De matemática, acho que sim.
I	E das outras áreas?
J	Das outras áreas a que menos gostei foi uma actividade que realizei a português.
I	Não correu de acordo com o planeado?
J	Mais ou menos. Gerou muito barulho e … eu já tinha consciência quando propus aquela actividade que ia gerar muito barulho, mas aquelas crianças são de uma falta de imaginação. Não têm imaginação. Precisam de ser muito trabalhadas a nível da escrita, da criação de textos. Têm uma falta de imaginação que me surpreendeu muito. Não estava nada à espera, porque normalmente estamos habituadas a crianças com uma imaginação fantástica. E naquela turma não. É impressionante, porque nós dizíamos: continuem esta história, criem um enredo, dai-lhe outro final. E numa linha estava escrito. Morreu. Pronto (risos). Havia uma história qualquer relativa a um senhor micróbio, é aquela história que é muito conhecida, que lava as uvas em água e depois perde a água. Acho que a professora deve conhecer
I	Sim, não essa mas outras parecidas.
J	Então nós pedimos que criassem o final, que dissessem o que é que acontecia ao senhor se tinha de ir para o hospital. E eles escreveram coisa como: ah foi ao médico e ele disse par ir para casa, que estava tudo normal. Assunto arrumado. Eles estão muito habituados a chamar e a pedir ajuda. As ideias nossas são nossas, não são deles. Têm uma falta de imaginação que eu nunca tinha visto em crianças.
I	Se agora tivesse oportunidade de dar mais uma aula ao 1º CEB o que é que valorizava, quer na planificação, quer na implementação da planificação?
J	Não sei, mas eu acho que valorizava a participação dos alunos, o interesse deles. Ver se eles estavam interessados ou não.

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

I	Na planificação das experiências de aprendizagem, a que é que dá mais importância?
J	Na planificação da aula? Eu acho que o método utilizado a partir do qual iria tentar introduzir o conceito.
I	E qual seria?
J	Depende do conteúdo que fosse dar.
I	Acha que o método depende do conteúdo?
J	Eu acho que sim, que há muitas formas de se introduzirem os conteúdos. Depende dos conteúdos.
I	Portanto, o que está a querer dizer é que valoriza a introdução do conteúdo.
J	Sim, mas eu acho que sempre que nós pudermos levar situações reais, coisas concretas para lhes mostrar, isso é muito bom. Para além de lhes cativar a atenção e de os manter sossegados, porque estão sempre à espera de ver o que é que vai acontecer. De ver o que é que é. Ah, eu acho que é sempre bom levar material desse.
I	Refere-se a trabalho prático com materiais.
J	Sim e com material que eles possam ver, tocar. Dizer-lhes como funciona e dizer-lhes isto está relacionado com isto …
I	Para finalizar, Qual lhe parece ter sido a reacção dos alunos à presença da câmara de filmar na aula?
J	Eu acho que as crianças reagiram melhor do que eu.
I	Porquê, a Joana sentiu-se perturbada?
J	Um bocadinho. Eu não gostei de ter a câmara na sala.
I	Mas não gostou desde o início ou quando começou a ver as gravações?
J	Também de me ver. Não gostei de me ver.
I	Eu também fiquei com essa sensação.
J	Não gostei. Eu acho que foi pior. Antes de me ver pensava que estava ali a câmara, tudo normal. Depois de me ver aquilo incomodava-me imenso a câmara. Sei lá. Estava sempre com aquele pensamento, o que é que eu vou ver.
I	Então já não quer ver as outras gravações.
J	Ah, eu até gostava.
I	Então eu arranjo-lhe cópias para ver nas férias.
J	Para ver nas férias. É boa ideia, porque mesmo que fique traumatizada tenho as férias para recuperar.(risos)
I	Mas o que é que a incomodou?
J	Não sei. Primeiro a voz parece que é distorcida. Acho que nós não temos a noção do som da nossa voz. Ou melhor, temos uma noção diferente. E quando vemos o filme, a voz fica ridícula e sei lá é a posição, a postura. Eu não gostei de me ver (risos).
I	E o ruído de fundo torna-se muito evidente na gravação.
J	Horrível. Eu acho que aquelas crianças gostam muito de falar. Eu acho também que deve ser porque há ali muitas crianças que têm problemas em casa, a nível familiar. Nota-se que há ali muitas carências afectivas e então eles vão para ali e têm necessidade de falar, porque se calhar, vão para casa e não têm isso. Têm um ambiente um bocado fechado quer não é bom para uma criança. E então eu acho que é por isso que eles são tão faladores e com tanta falta de imaginação.
I	De todos os elementos do grupo, na sua opinião qual é que conseguiu controlar

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

	melhor a turma?
J	Ah, não sei.
I	E no seu caso?
J	No meu caso, eu acho que sim. Consegui um bocadinho.
I	Sentiu que evoluiu a esse nível?
J	Sim e ao mesmo tempo não. Porque é, lá está. É a tal coisa. Na minha primeira semana, senti-me evoluir naqueles três dias e notei que a turma, o domínio da turma naqueles três dias evoluiu. Depois na minha segunda semana também foi … No primeiro dia, eles estavam muito agitados porque tinha sido feriado, no segundo dia estiveram melhor e no terceiro dia já estavam mais agitados. Se calhar foi quando fiz aquela actividade de português e aquilo gerou muita confusão. E na minha terceira semana sei que as crianças estavam muito desesperadas com o calor, tudo a transpirar, a pedir-me para beber água, para ir à casa de banho. Mas eu acho que a nível de domínio da turma fui melhorando.
I	Esse é um aspecto importante, não acha? Os alunos reconhecerem que dentro da sala de aula há espaço para todos, mas que deve haver respeito mútuo.
J	Mas eu acho que aquelas crianças não têm bem aquela noção de que os estagiários mandam ali.
I	Sentiu isso.
J	Senti. Não só senti eu, como também as minhas colegas. Sentimos muito isso. Não sei, ou a mensagem não lhes foi bem transmitida… porque nós falamos com eles e eles dizem-nos: - vocês não mandam nada – e nós respondemos: - mas agora somos professoras aqui dentro, agora nós somos a vossas professoras. E eles respondem: - ah, não são nada, vocês são estagiárias. Os próprios miúdos criam a ideia de que as estagiárias não mandam nada ali. Quem manda é o professor.
I	E sente que isso dificultou o vosso papel na sala de aula?
J	Dificultou muito, porque mandamos estar sossegados e repreendemos e eles sabem que nós não poderíamos tomar algumas atitudes, como por exemplo, escrever uma nota para os pais.
I	Agora vamo-nos centrar no trabalho que desenvolvemos em Geometria I e II e durante a sua Prática Pedagógica. A primeira questão que quero fazer-lhe é seguinte. Em sua opinião, o trabalho que desenvolvemos teve algum reflexo na sua prática de ensino?
J	Ah, teve.
I	A que nível?
J	A que nível? Por exemplo, quando nós demos o metro, o decímetro, as unidades de comprimento. Quando foi da área também. Do volume também.
I	Na sua prática em concreto.
J	Na minha parte… Hm… a parte da massa. O quilograma, o grama. Mesmo aquelas folhinhas que a professora nos deu. Aquele livrinho que a professora nos deu sobre as grandezas e medidas. Ajudou-nos muito.
I	Utilizou-o?
J	Eu utilizei. Acho que tem lá definições que é bom nós sabermos, embora não sejam ditas na aula. Porque dizer aos alunos certas coisas que estavam lá, só os ia baralhar, não é? Porque são situações assim já bastante abstractas para eles e nós não vamos tanto além. Se calhar, podiam ser ditas no 4º ano. Quando eles estão no 3º ano dão as coisas muito mais superficiais, mas é bom para nós

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

	sabermos porque estamos um pouco mais seguras daquilo que estamos a dizer.
I	Portanto acha que a esse nível ajudou?
J	Eu acho que sim.
I	Creio que a Joana teve sempre um cuidado particular com a linguagem.
J	Eu acho que sim. Tentei utilizar sempre linguagem matemática correcta. Dizer as coisas com … tipo num português sempre dentro da linguagem matemática. Uma coisa em que eu também tive preocupação foi dizer-lhes: - ah, isto normalmente diz-se assim, mas em linguagem matemática não se diz assim. E perguntava-lhes: - Como é que é?. Referi sempre linguagem matemática para eles ficarem com a ideia de que existe uma linguagem matemática.
I	A Joana só deu aulas de grandezas e medidas ou entrou noutros temas’
J	E dei a terça, a décima parte, …
I	Em que trabalhou com barras Cuisenaire.
J	Em que recorri à professora.
I	Eu quero também perguntar-lhe se sentiu falta de apoio em alguma área em particular.
J	A professora deu-me uma grande ajuda e eu acho que correu bem. A professora viu depois a aula.
I	Sim eu observei a aula. Sente que conseguiu orientar a atenção dos alunos para o que pretendia?
J	Nós temos as coisas organizadas de uma forma … quando chegamos lá ou é falta de tempo ou porque os alunos estão muito barulhentos (…) temos que improvisar sempre. Por mais que as coisas vão orientadinhas, chego lá digo isto e depois isto e depois aquilo … nunca se consegue (…) foi essa a noção que me foi transmitida.
Inv	Então, assim globalmente, acha que esse apoio durante a prática valeu de alguma coisa?
J	Eu acho que sim.
I	Sentiu falta dele em Ciências, em Português ou recorreu às professoras das áreas?
J	Recorri muitas vezes à professora … à cooperante, à professora que está com os meninos.
I	E aqui a colegas minhas da escola?
J	Colegas suas da escola..?
I	Ciências da Natureza, história, português.
J	Português recorremos uma vez à professora X, sobre uma situaçãozinha que estava num texto e nós estávamos em dúvida.
I	Estou a colocar-lhe esta questão porque como sabe a PP no 1º CEB não é acompanhada por professores das áreas científicas. Por norma um professor de matemática ou de portuguesa não acompanha a vossa prática no 1º CEB. Por isso, a questão que lhe ponho é a de saber se acha que isso teria algum interesse.
J	Eu acho que sim, porque nós quando vamos para ali, vamos um pouco desorientadas e … sinto, eu senti isso na 1ª semana de observação, havia imensas coisas, conteúdos de que eu não me lembrava como é que era.
I	Mas porque não foram revisitados durante o Curso?
J	Um bocado isso, também e porque, não sei, há aquelas coisinhas básicas, aqueles métodos de ensino, de levar os miúdos a …

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

I	Mas isso trabalharam aqui na escola nas disciplinas das áreas de educação.
J	Sim, mas muitas das vezes são assim muito por alto, eu acho. Faz falta acompanhar … porque nós temos que introduzir os conceitos, dar os conceitos da forma mais correcta possível, não é? E acho que uma orientação que nos chame a atenção para isso, tipo: eu acho que não é correcto fazer assim, é melhor fazer assim … eu acho que seria muito bom..
I	Agora nem sempre as orientações funcionam como deve ser, não é?
J	Pois, tantas vezes o que nos aprece bem a nós é mau para os outros, o que parece bom aos outros é mau para nós..
I	Então recorreu várias vezes à cooperante?
J	Sim, recorremos.
I	E agora passemos aos problemas que resolvemos em geometria, envolvendo antigas unidades. O que é que pensa delas? Gostou, não gostou? Achou que eram adequadas para a sua formação?
J	Eu achei engraçado … aquela parte dos sistemas de unidades, que demos … Eu acho que sim, foi engraçado.
I	Mas ficou pelo engraçado? Isto é, teria preferido resolver problemas similares com unidades do SI ou acha que resolver essas situações com unidades desconhecidas por vocês…
J	Eu acho que é bem mais interessante, apesar de nos causar uma certa confusão, porque nós nunca ouvimos falar nessas unidades, não é? E depois conseguir fazer a relação entre elas é um pouco complicado, mas eu acho que nos ajuda a pensar e a conseguir relacionar as coisas.
I	Portanto achou-as adequadas, ou achou-as uma coisa ali metida um tanto .. forçadamente?
J	Se calhar. Acho que foi um bocadinho … metido a meio, porque, por exemplo, nós estamos a seguir aula a aula, uma sequência. Depois metido ali a meio, quebra um bocado o ritmo, mas não deixa de ser interessante, eu acho.
Inv	O que está a querer dizer é que os problemas não foram introduzidos de maneira integrada na disciplina?
Joana	Não, não estou a dizer que não tenha sido da melhor maneira. O que estou a dizer é que nos quebra um pouco o raciocínio … Isso, por um lado, também é bom, porque nos permite abstrair do que estávamos a fazer, não é? Mas isso também tem o seu lado negativo, porque depois quando voltamos outra vez ao mesmo, temos de ver como é que isto é.
Inv	Mas estavam a trabalhar a medição de comprimentos …
Joana	Pois estávamos.
Inv	Em abstracto?
J	Sim
Inv	Propôs algum desses problemas na prática?
Joana	Ah, não. Porque aquelas crianças não são nada por aí além. Se colocasse uma questão dessas não seriam capazes de resolver, até porque as questões que nós lhe colocámos eram questões sempre muito simples ou muito básicas.
Inv	Muito básicas ou adequadas aos alunos?
Joana	Adequadas aos alunos.
Inv	Mas desadequadas a um 3º ano?
J	Não, não são desadequadas a um 3º ano, mas se calhar outra turma de 3º ano … dá aquilo e ainda explora um pouco, ainda mais. Pronto, vão um pouco para o

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT21_06_05)

	mais complexo e nós temos que ficar por ali, porque se fugirmos para o complexo, metade, mais de metade da turma deixa de acompanhar porque ali há 3 ou 4 crianças que, se calhar, eram capazes de resolver situações como essas, mas o resto não. Há ali crianças com muitas dificuldades e com ritmos de trabalho diferentes. Estão em dois extremos opostos.
Inv	Para finalizar, Joana, centremo-nos no trabalho que desenvolvemos. Quero ouvir as suas sugestões, o que é que acha que deveria ter sido feito e não o foi, quer no âmbito da prática …
Joana	Eu acho que a professora na prática … eu falo por mim, falo por mim (…) eu acho que a professora na prática me deu uma ajuda muito grande.
Inv	Não tem nenhuma sugestão, não gostaria que eu lhe tivesse apresentado situações problemáticas concretas para levarem para a sala de aula?
Joana	Sim, isso é sempre bom, é sempre bom apresentar essas coisas (risos)
Inv	Lembra-se de terem falado nisso, penso que foi mesmo a Joana que pediu isso?
Joana	Sim, eu acho que isso é muito bom, porque muitas das vezes nós estamos tão … é o stress todo de ter de preparar tudo, temos de pesquisar tudo, que por vezes acabamos por seleccionar coisas que não serão as melhores e colocamos as melhores de parte, porque é tudo muito em cima, … as coisas têm de ser preparadas de um momento para o outro.
Inv	E no âmbito da disciplina de Geometria? Esqueça o meu trabalho. O que é que acha que deveria ser abordado numa disciplina de geometria que fosse um apoio mais concreto à prática?
Joana	Serem as situações de acordo com a matéria que nos é dada. É um bocadinho teórico.
Inv	Acha que a disciplina tem um carácter demasiado teórico?
Joana	Um bocadinho (…) porque há certas definições, certos teoremas que facilitam-nos a compreensão quando são trabalhadas, quando elas são postas em situações problemáticas.
Inv	Para o ano vai realizar prática pedagógica no para o 2ºciclo. Como considera o seu nível de preparação científico / didáctico a matemática?
Joana	Não sei, só estando lá … quando for o momento.

Anexo 11

Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT30_06_06)

Transcrição da entrevista final a Joana em 30/06/06 no Gabinete 92[1].

Inv 2min:24s	Passemos ao questionário [a investigadora entrega a AP o questionário]. Peço-lhe, por favor que releia a questão 6 da Parte I e a sua resposta a essa questão.
Joana	Se consegui saber qual o motivo de tudo aquilo?
Inv	Sim. A Joana refere que procurou nunca perder o interesse e a motivação para descobrir o que está por detrás de conceitos e resultados matemático. Acha que descobriu o que está por detrás dos resultados?
Joana	Ah, eu acho que sim (risos). Se calhar, umas vezes sim, outras vezes não.
Inv	Passemos para a 2ª parte, questão 1.3. Começo por clarificar que as questões deste item incidem sobre os contributos para a vossa formação, certo? Nesse sentido, peço-lhe que, neste caso concreto, dê a sua opinião sobre a relevância para a sua formação de alguns momentos do percurso de formação. Relativamente à resposta que deu à questão 1.3 (pausa), a Joana respondeu que encara as sessões de apoio à prática como muito relevantes, refere que estas lhe proporcionaram momentos de aprendizagem ao nível de técnicas, formas e estratégias para explorar as actividades.
Joana	Sim.
Inv	Para conduzir os alunos de encontro ao que pretendia?
Joana	Sim
Inv	E salienta como muito gratificante para o seu desempenho na prática de ensino, as discussões que mantivemos nessas sessões. Era isto que pretendia dizer?
Joana	Sim. Eu acho que sim.
Inv	Então podemos avançar para a questão 2, na qual parece não ter percebido a pergunta.
Joana	Aqui?
Inv	Sim, no comentário.
Joana	Ah! Vamos lá.
Inv	Refere-se às tarefas propostas aos alunos .. aos seus alunos, consideradas com muito interesse, e que terão tido da parte dos alunos uma aceitação muito positiva. Ora eu dirigia-lhe a questão a si. Se as considerou relevantes para si.
Joana	Para mim? Ah! Considerei.
Inv	Vou-lhe pedir agora, se for capaz, que volte atrás e faça um comentário global a essa apreciação muito relevante que pôs em todas as quadrículas.
Joana	Ah, eu acho que sim. Considerei muito relevante.
Inv	Ou seja, considerou muito relevante a
Joana	A análise de ..
Inv	de documentos curriculares.
Joana	Sim
Inv	Os manuais
Joana	Também, muito.

[1] Notas de campo: Nesta entrevista só foram colocadas as questões elaboradas com base na pré-análise do questionário e para clarificação de algumas respostas dadas ao questionário aplicado no final do ano lectivo.

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT30_06_06)

Inv	A resolução de problemas e a exploração didáctica dos problemas históricos.
Joana	Sim, sim.
Inv	E porquê?
Joana	Porque me ajudou. Hm… Por exemplo, a questão dos manuais a ver que havia determinadas actividades propostas pelos manuais que não se enquadravam com o que se pretendi, ou que tinham um grau de dificuldade muito baixo ou então estavam muito desencontradas daquilo que nós íamos trabalhar. E a análise dos documentos curriculares também permitiu ter uma ideia mais fundamentada do que são. A resolução dos problemas foi bom porque nos permitiu ver as dificuldades que as crianças podem ter. Se nós as temos, eles vão ter ainda mais, não é? E então …aquela questão de que se deve resolver sempre os problemas e não só olhar para eles e pensar - Ah, os miúdos conseguem fazer - e acabou. Se os resolvermos primeiro podemos ver que existem dificuldades, que se calhar é melhor pormos de outra forma. E aqui, relativamente aos problemas históricos foi muito interessante, porque se para mim eram desconhecidos e eu gostei, acho que dos miúdos muito mais desconhecidos eram e acho que eles iam gostar também.
Inv	Mas aqui quando eu me refiro à exploração didáctica, é no fundo a exploração que foi feita, à forma como os problemas foram trabalhados para serem utilizados na sala de aula.
Joana	Ah! À forma, por exemplo os materiais que foram utilizados, se falava, não é …
Inv	No fundo as sugestões que foram feitas para exploração dos problemas.
Joana	Foram muito adequadas em todas.
Inv	Mas algumas resultaram melhor do que outras.
Joana	Sim, mas basicamente resultaram todas muito bem.
Inv	Na questão 4 é a mesma coisa Joana (pausa) Parece não ter percebido bem a questão 4.1 onde se pretende saber se sente que o trabalho conjunto enriqueceu o seu conhecimento matemático. Eu não pergunto se empobreceu, não é? Embora pudesse fazê-lo.
Joana	Não, muito pelo contrário.
Inv	Uma vez que pôs muito relevante parte-se do princípio que enriqueceu.
Joana	Sim.
Inv	Não se importa de voltar a ler a sua resposta?
Joana	(AP lê em voz alta a resposta)
Inv	Como vê não dá uma resposta concreta à questão que está dirigida para a sua formação em matemática ou para os seus conhecimentos em matemática. penso que pode não ter percebido a questão. Se quiser alterar a sua resposta, pode fazê-lo.
Joana	Não, eu acho que a cruz em muito relevante está bem. (pausa) Porque é aquela … é o que eu há bocadinho disse, que havia determinados conceitos matemáticos dentro das unidades e essas coisas que eu desconhecia completamente.
Inv	Desconhecer, também não desconhecia totalmente…
Joana	Sim, mas também havia muitas que eu nunca tinha ouvido falar …
INv	Eu não estava a falar em termos de unidades antigas, estou a falar em termos de conhecimento matemático global. Não é propriamente sobre a ideia que tem da matemática, porque isso está noutra questão.

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT30_06_06)

	Imagine que eu frequento uma formação e chego ao fim e digo que aprendi algumas coisas. Posso ter aprendido mais no âmbito da didáctica, posso ter aprendido só no âmbito da matemática ou em ambas. Faço-me entender?
Joana	Sim, sim. Se calhar, então, acho que aprendi mais no âmbito da didáctica. Acho que sim.
Inv	A sua resposta no questionário remete mais para conhecimentos históricos.
Joana	Sim.
Inv	Agora se o conhecimento histórico lhe enriqueceu o conhecimento conceptual, permitindo-lhe aprofundar e compreender melhor certos conceitos matemáticos …
Joana	Bem, se calhar já não é assim, então mudaria a cruz para relevante. (pausa) Acho que é para relevante, então. È obvio que a resolução daqueles problemas me permitiu ter … desenvolver mais os conhecimentos, não é? Mas, acho que mais a nível didáctico do que em termos de formação matemática.
Inv	É? Então, está bem.
Joana	Sim.
Inv	Em relação à 4.2 … deixe-me ver o que eu aqui tenho … no fundo é só para ver se eu interpretei bem as suas palavras.
Joana	Sim.
Inv	Em relação à formação em didáctica da matemática, AP considera o contributo como muito relevante, destacando se deu conta que a história da matemática, quando bem explorada, resulta bastante bem em contexto de sala de aula e que permite mostrar aos alunos que a matemática foi sempre necessária e que desde sempre esteve presente em todas as áreas.
Joana	Sim, é isso.
Inv	Relativamente à questão 4.3, que respeita à mudança de atitude em relação à matemática, anotei que a sua resposta é um pouco ambígua, pois limita-se a afirmar que sente um maior interesse pela história da matemática.
Joana	Sim. E aqui perguntava mudança de atitude face à matemática.
Inv	Exacto.
Joana	Mas eu acho que foi muito relevante também.
Inv	Eu não estou a questionar a sua resposta, estou só a tentar clarificá-la. Para que eu possa fazer uma interpretação correcta delas, Joana.
Joana	Sim, sim.
Inv	A resposta remete outra vez para a história … Considera que foi muito relevante porque sente um maior interesse pela história da matemática ou pela matemática em si?
Joana	Pela história e pela matemática também.
Inv	Acha que sim?
Joana	Eu acho que sim.
Inv	Então vamos avançar. Passemos à questão 6.
Joana	Vamos à 6, então.
Inv	Afirma que após a experiência de integração da HM na aula de matemática, sente uma perspectiva muito boa.
Joana	Ah, sim. Sobre a história da matemática fiquei com uma perspectiva bastante boa.
Inv	O que quer dizer com isto?

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT30_06_06)

Joana	Que … quando falo em perspectiva digo que desenvolvi mais os meus conhecimentos sobre a história da matemática, porque se calhar todo este tempo a história da matemática ficou sempre assim muito …muito reservada e onde se desenvolveu mais foi com a professora e depois agora em História e Metodologia da Matemática.
Inv	Sim.
Joana	Porque durante este tempo todo ficou muito … muito actual.
Inv	Para tentarmos clarificar a questão, imagina-se no seu ATL com as crianças do 5º ou 6ºanos (risos) a propor problemas históricos?
Joana	E porque não. Eu acho que são muito interessantes e acho que são muito … desenvolvem muito as capacidades dos miúdos e … Porque por exemplo, eles estão habituados a trabalhar as fracções, por exemplo, com as pizzas, aquelas coisas todas e sempre com problemas muito do actual e também lhes faz falta um pouco de história e eles gostam. Para ver que a matemática pode ser … que abrange outras áreas e que desde há muito tempo é utilizada.
Inv	Na questão nº 7 em que lhe pergunto como sente o contributo para articular na sua prática estas três vertentes, história da matemática, resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática, ou seja as ligações da matemática com a realidade ou as ligações de ideias matemáticas entre si. Responde que o contributo foi muito bom, portanto estamos outra vez com a questão do muito bom que está na resposta a 6, (risos) pois em termos pessoais pode verificar que a matemática sempre esteve presente na vida do homem e que evoluiu ao longo do tempo. Isto não é a resposta à pergunta.
Joana	Pois não (risos) e a professora aqui estava a falar de …
Inv	Como é que sente o contributo do trabalho que fizemos para na aula de matemática de 6º ano de escolaridade, a Joana, enquanto professora, conseguir articular estas dimensões? Se as conseguiu articular.
Joana	Eu acho que foi um contributo muito bom. Sim, porque, por exemplo, outras disciplinas curriculares, por exemplo, a história quando eu falei, quando foi aquele problema do …
Inv	Do quarto e da vintena, por exemplo.
Joana	Sim, sim. Exactamente que era da alfandega, que falei lá de algumas questões históricas. Ligação entre a matemática e problemas do quotidiano, lá está também. Ligações entre conceitos e processos matemáticos, também estavam todos ligados, não é? Eu acho que foi muito bom.
Inv	Então sente o contributo como positivo, a este nível?
Joana	Sim.
Inv	E em outro tipo de problemas que tenha proposto conseguiu fazer a articulação?
Joana	Para além daqueles que trabalhei com a professora?
Inv	Sim.
Joana	Eu procurei sempre por muito problemas do actual que eles possam ver aí e depois de história. Sim, articulei sempre as coisas. Tínhamos sempre esse cuidado.
Inv	Nesse caso, agradeço-lhe ter disponibilizado este tempo para esta nossa conversa.

Anexo 11
Transcrição das entrevistas à futura professora Joana (ENT30_06_06)

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

Entrevista realizada na sala 1 em 21 de Junho de 2005

Inv	Gostou desta primeira experiência de Prática Pedagógica?
Inês	Gostei … Gostei, porque é assim: primeiro porque a prática é exactamente no ciclo que eu mais gosto e gosto muito do contacto com as crianças. Poder ver que eles estão a aprender, que estão interessados, motivados, para mim é muito bom, aliás a parte que eu mais gosto do curso, é mesmo a parte prática.
Inv	No questionário respondeu que esta não foi a sua primeira opção. Entrou noutro curso e acabou por pedir a mudança para este, não está arrependida?
Inês	Não, não estou. Aliás no primeiro ano que eu entrei, entrei na 2ª fase e quando eu concorri, concorri para aqui e concorri lá para baixo para a EST.
Inv	Ah, concorreu para aqui.
Inês	Concorri para aqui, mas concorri primeiro lá para baixo para a EST. Eu achava que ia gostar e depois foi uma grande decepção. E eu não gostei, não gostei nada.
Inv	Isso levou-a a mudar de curso. Não está arrependida?
Inês	Não.
Inv	Voltando à prática no 1º ciclo e à prática de matemática. que dificuldades sentiu na implementação dos sus planos? Se é que sentiu dificuldades …
Inês	Na matemática? Não senti, muito sinceramente. Para mim é uma das áreas que foi mais leccionar. A mais difícil foi Língua Portuguesa. Principalmente porque houve uma semana que me correu muito mal. Foi na 2ª semana num conteúdo de LP que eu não gostava. Tive esse azar. A última parte de matemática que dei também não gostei muito. Foi a construção de figuras segundo certos critérios. Construir um circulo com 3 cm de raio, distinguir entre raio e diâmetro. Aproveitei para dar aquela parte da construção do quadrado com duas rectas perpendiculares. Sinceramente foi na matemática que me senti melhor. Tanto nas unidades de área, como nas unidades de volume. ..., capacidade, neste caso,
Inv	Nessa semana em que trabalhou unidades de capacidade disse-me que achava que as coisas não tinham corrido muito bem. Não era à matemática que se referia?
Inês	Não, era à matemática. A aula foi um bocado mal programada.
Inv	O que é que quer dizer com programada? Planeada?
Inês	Planeada, exacto. Porque eu planei a aula pensando que eles não sabiam … tanto. E aquela turma é um bocado difícil … é uma óptima turma. Adorei trabalhar com eles, mas é muito difícil trabalhar com eles porque eles sabem muito. E assim que eu comecei … era um conteúdo novo, unidades de capacidade. Íamos começar a falar e eles já sabiam tudo. Quer dizer, eu não podia estar ali sempre a patinar na mesma coisa, senão eles começavam a desmotivar-se.
Inv	Creio que foi nessa aula que a Inês propôs aos alunos a resolução de tarefas propostas numa determinada página do manual. Diz aos alunos algo como: vamos resolver a página 93, porque a 94, 95, 96 e 97 vocês já as resolveram. Sendo este assunto novo e sendo estas páginas relativas à capacidade, explique-me o que é que se passou, por favor.
Inês	Eu já não sei bem o que é que as páginas tinham. Sei que tinham a relação … umas relações entre o litro e o decímetro cúbico, se não me engano. Ah, e tinha tipo …eu não sei.

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

Inv	Eu fiquei com a sensação de que essas páginas se referiam aos assuntos que a abordou na aula.
Inês	Foi. Eu não sei. Eles já tinham dado aquilo tudo com a professora, com a professora cooperante. Não deram com os outros estagiários, deram com a cooperante. Mas eu já não me recordo bem. Sei que as páginas estavam resolvidas. Um exercício que estava lá, que era de uma jarra, uma jarra tem, por exemplo, 1 litro. Quantos copos de meio litro se enchem. Eu resolvi um desses. O resto já não sei bem. Sei que eles já tinham feito, mas à partida aquela relação entre litro e decímetro cúbico era uma coisa nova para eles, assim como o decímetro cúbico, o centímetro cúbico e o metro cúbico. Mas eles …com aquela capacidade de raciocínio que alguns têm!
Inv	Então o litro, o decalitro, o hectolitro eram unidades já conhecidas dos alunos, uma vez que já tinham resolvido todas as tarefas do livro relativas a esse assunto.
Inês	O hectolitro e o decilitro, não. Eu acho que eles …não tenho a certeza agora. Sei que ou dei múltiplos num dia e submúltiplos no outro. Comecei pelos submúltiplos, se não me engano. Sim, comecei pela divisão pelos copinhos do decilitro e depois quando falámos no hectolitro … essa parte, acho que eles ainda não tinham feito os exercícios.
Inv	Mas a Inês disse que sentiu que eles já sabiam…
Inês	Senti. Era prato de todos os dias sentir que eles já sabiam alguma coisa. Podiam não saber exactamente o que era, mas tinham a noção do que era.
Inv	A Português aconteceu-lhe a mesma coisa ou foi outra situação?
Inês	A Português … Pois, eles já sabiam o que era. Eu dei nessa aula famílias de palavras e vocabulário. Eles famílias de palavras já sabiam, vocabulários não … Mas foi a parte de matemática que correu muito mais depressa do que eu estava à espera, e então tive de improvisar um bocado, eles ficaram um bocado parados na última hora, mas … Estava lá sozinha! A cooperante não estava lá nesse dia. Estava lá a professora supervisora e isso também não ajudou muito. Estava um bocado nervosa, porque a minha primeira semana correu muito bem.
	Do tipo de tarefas que propôs aos alunos, quais gostou mais de implementar e orientar (resolução de problemas, aulas práticas, trabalho de grupo, …)?
Inês	Eu gosto muito das aulas práticas. Acho que eles aprendem imenso, muito mais do que nós estarmos ali … a desbobinar a matéria toda, e isto e isto. Acho que eles aprendem muito mais a fazer. Pronto, como aconteceu com as unidades de área. Quando eu dei o metro quadrado e eles tiveram oportunidade de decompor e de compor, digamos assim, o metro quadrado, eles aprenderam muito mais do que se eu estivesse ali a explicar-lhes que o metro quadrado são não sei quantos decímetros quadrados. Rendeu muito mais. Gosto muito de os pôr a trabalhar em grupo. Eles não funcionavam muito bem, porque são muito faladores e no trabalho de grupo estão sempre a falar de outras coisas. Mesmo quando nós estamos ao pé deles, nunca estão a falar do que têm de fazer e … mas eu gosto muito de os pôr a trabalhar em grupo, porque … eu achava … e falámos disso imensas vezes que eles precisavam de trabalhar em grupo, porque eles sabiam muito … Por exemplo, mesmo às vezes a explicar, havia alguns que sabiam mas não conseguiam explicar e no trabalho de grupo eles têm de debater as ideias uns dos outros. Isso ajuda um bocado.
Inv	E como é que no trabalho de grupo conseguia contornar essa tendência para

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

	falarem uns com os outros?
Inês	Tínhamos de andar sempre de um lado para o outro. Por exemplo, quando fiz o metro quadrado, dividi a turma em 2 grupos. Era mais fácil, não é? Mas quando trabalhávamos com quatro grupos, tínhamos que andar sempre de volta deles. Deixávamos um grupo e, às vezes, tínhamos de ouvir o que outro estava a dizer e o que os outros estavam a dizer. Quando víamos que eles não estavam a trabalhar, lá íamos nós… E situações problemáticas, daquelas assim complicadas, também gosto. Eles depois começavam a pensar. Geralmente se nós lhe pedirmos para eles nos ajudarem, eles ficam muito contentes e eu também acho que é uma boa maneira.
Inv	E a Inês propôs muitas situações problemáticas?
Inês	Ah! Comecei a aula com duas .. Quando dei as unidades de área e depois … não sei … dei outra … ou uma coisa assim qualquer, quando dei as unidades de capacidade. Agora no fim … na última semana, acho que não.
Inv	Propôs essas situações problemáticas quase sempre no início da aula?
Inês	Nas unidades de área comecei assim nos dois dias. O dia em que fizeram a decomposição do metro quadrado. Na primeira, para a introdução do metro quadrado, pedi-lhes que me ajudassem porque tinha de comprar os azulejos para a sala da minha casa. No segundo dia, tinha estado a discutir com uma amiga minha porque a minha casa tinha uma determinada área em metros quadrados e a dela tinha noutra unidade, em decímetros quadrados. Eles tinham de ver qual era maior. Nas unidades de capacidade, sei que eram dois tanques ou dois depósitos, uma coisa qualquer, um com uma capacidade… por exemplo três hectolitros e o outro em decímetros cúbicos ou metros cúbicos, já não sei.
Inv	De todas as actividades que os alunos desenvolveram, qual lhe pareceu que interessou mais aos alunos? Em que actividades é que os sentiu mais envolvidos?
Inês	Eles envolviam-se muito. Eles eram sempre tão motivados, mas … não sei … Talvez aquela do metro quadrado. Para eles perceberem que quando olhamos, vamos dividir. E a das capacidades. Dividir a água em copinhos. Talvez aí. Para terem uma noção. Habitua as pessoas a terem uma noção. Por exemplo, eu sou muito má com noções de distância, essas coisas … Eu também não fiz! Eu tive estagiários quando andava no 1º ciclo, mas já não me lembro o que é que falámos com eles. Acho que ajuda, eles [alunos] terem a noção. Olharem e verem … e aplicarem no dia-a-dia.
Inv	Criarem referências de medidas …
Inês	Por exemplo, eu não tenho essas referências. Sou um desastre com medidas e essas coisas.
Inv	Mas agora, depois de ensinar os alunos a adquirem essas referências, já nem tanto …
Inês	Sou um bocado. Mesmo com distâncias é … Para mim é muito mais. Sou muito má a medir distâncias. Não tenho noção.
Inv	Portanto acha que os alunos se envolveram bastante em todas as aulas em que abordou o tema Grandezas e Medidas. Isso também significa que esses foram os conteúdos que mais gostou de ensinar?
Inês	Eu só ensinei esses. A matemática foi basicamente isso. A última parte, como eu disse, já não gostei mas isso também não foi Grandezas e Medidas. Eu gostei,

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

	porque eles também gostaram. Acho que nós estarmos a fazer algo e vermos que os alunos estão a gostar é óptimo. Motiva-nos imenso
Inv	E o que é que gostou menos de ensinar?
Inês	Foi a última parte. Não gostei. Figuras geométricas, construir figuras geométricas segundo critérios.
Inv	Porquê? Acha que os alunos não se envolveram no que estavam a fazer? Ou foi a própria Inês que …
Inês	Não. É assim, eles já sabiam o que é um raio, o que é um diâmetro. Bem, alguns, outros não sabiam. Andámos lá que tempos a tentar descobrir quem é que sabia, quem é que não sabia. Eles fizeram. Eles não se queixaram, porque eles gostam de tudo e tinham que usar o compasso para fazer a circunferência. Isso para eles é um delírio … mas eu não gostei. Acho que é uma matéria muito "sem sal". Não gosto. Gosto mais de coisas que envolvam cálculos e aquele conteúdo não envolvia. Fiz uma ficha inteira e para fazerem alguns cálculos tive de pôr lá para calcularem a área de um quadrado e de um rectângulo, que eles já tinham dado. Portanto não gostei muito.
Inv	No final da disciplina de prática pedagógica, o que é para si uma aula de matemática no 1º ciclo?
Inês	O que é uma aula de matemática?
Inv	Sim. O que é que valoriza mais?
Inês	Para mim, acho que é importante … É assim, as pessoas têm sempre aquela ideia de que a matemática é um *bicho-de-sete-cabeças* que não se pode aplicar. È mentira, porque a matemática aplica-se todos os dias, mesmo quando nós não damos conta. Eu acho que as crianças têm de perceber isso. A matemática faz parte do dia-a-dia delas, sem ser … assim, nada do outro mundo. Elas [as crianças] às vezes não percebem. A matemática é muito complicada e começam logo a dizer: Ah, a matemática, não gosto e é difícil. Se calhar, às vezes, é-lhes incutido isso. Nós crescemos a ouvir dizer que a matemática é difícil e elas têm de perceber que a matemática está presente no dia-a-dia delas
Inv	E acha que lhes conseguiu transmitir essa ideia?
	Acho que sim. Pelo menos, tentámos transmitir-lhes exemplos concretos de situações que nós encontramos todos os dias e em que não nos damos conta que a matemática está lá. Isso para mim é importante, porque são crianças e vão ser adultos e, se calhar, assim, vão ter uma ideia um bocadinho diferente do que é a matemática.
Inv	Qual lhe parece ter sido a reacção dos alunos à presença da câmara de filmar na aula?
Inês	[Risos] Nenhum se opôs. Adaptaram-se muito bem.
Inv	Agora mudando de assunto .. Eu comecei a trabalhar com vocês em Geometria I, passando de seguida para geometria II. Trabalhámos Grandezas e Medidas, essencialmente via história e depois durante a Prática fomos tentando afinar o trabalho, não é? O trabalho que fizemos serviu-lhe para a Prática, isto é, teve algum reflexo na sua prática de ensino?
Inês	Teve, teve. Por exemplo, notei na parte das unidades de área… porque foi a primeira semana que eu dei. Nota-se mais porque nós não temos bases, um modelo. Chegamos ali, fomos atiradas para uma sala de aula, tudo o que damos aqui teórico, lá não é quase nada

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

Inv	Acha que é quase nada?
Inês	Algumas coisas não, acho que não. Nós chegamos ali, vamos dar por exemplo unidades de área, mas desde que entrei para aqui nunca falámos de unidades de área. Talvez a MEM tenhamos . Essa foi uma das cadeiras que mais me ajudou porque damos muita coisa que depois utilizamos, mas agora outras não. Talvez aí dizer, se calhar se fizer assim é mais fácil para eles perceberem do que assim. Por exemplo, na decomposição do metro quadrado … eu acho que ajuda, ajudou.
Inv	Nesse trabalho de afinação em que nós estamos a tentar …
Inês	Sim, porque nós podemos ter a noção do que queremos fazer, mas precisamos que alguém às vezes nos diga se calhar é melhor assim, do que assim. Torna-se mais fácil para nós conseguirmos ver as coisas mais claramente, eu acho.
Inv	Acha que houve conflito com as orientações da PC?
Inês	Como assim, entre nós e a professora cooperante?
Inv	Entre alguma sugestão que eu tenha dado e outra que a cooperante também tenha apresentado?
Inês	Hum … não sei, acho que não.
Inv	Não sentiu isso?
Inês	Não, pelo menos, nas minhas semanas não senti.
Inv	Eu estou a falar das suas semanas.
Inês	Não, nas minhas semanas, não, não. A PC tinha uma coisa muito boa, não era por ela achar que se devia dar assim que tinha de se dar assim. Podíamos arranjar outra maneira qualquer, desde que fossemos de encontro ao que ela queria. Não, não achei que houvesse conflito, cada pessoa tem a sua ideia.
Inv	Outra coisa. Sentiu necessidade de ter apoio, por exemplo, na área de ciências ou português, ou mesmo noutros tópicos de matemática?
Inês	Apoio … procurei informação, não é? sobre certas coisas, porque eu já não me lembrava.
Inv	Mas não procurou os professores das disciplinas? Não sentiu necessidade?
Inês	Não, por exemplo, eu não senti porque se calhar o que me calhou a mim era acessível … se calhar houve colegas minhas que deram partes mais complicadas. Por exemplo, a estudo do meio dei coisas simples de dar, dei turismo, dei … sei lá, distritos …
Inv	O que não quer dizer que as coisas simples não tenham as suas dificuldades.
Inês	Essas coisa, nós olhamos para li, por exemplo, são 18 distritos em Portugal Continental, pronto. Não, não senti. Talvez a área em que pudesse acontecer isso fosse mais a matemática, mas não.
Inv	A matemática só teve 2 dias de prática que não se referiam a Grandezas e Medidas, relativos a construção de figuras.
Inês	Tive, eu só dei 1 dia nessa semana.
Inv	E a primeira semana envolveu a planificação de sólidos..
Inês	E a planificação de sólidos não me calhou a mim (risos), não fui eu que dei.
Inv	Portanto nem a matemática sentiu necessidade de apoio?
Inês	Não, quando eu sentia ia procurar, até porque a nossa cooperante era muito aberta.
Inv	Acha que tinha interesse os professores das áreas científicas e didácticas acompanharem os alunos na Prática Pedagógica?
Inês	Eu acho que se calhar tinha sim, e eu volto a dizer que acho que nós somos atirados um bocado assim, caímos lá um bocado … temos as metodologias, mas

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

	depois ali é um bocado diferente, porque uma coisa é estarem a explicar-nos a nós que somos adultos, com 20 anos ou 18 e a outra coisa é estarmos a explicar a crianças de 9, 10 anos. É diferente.
Inv	Então que ligação é que acha que devia ser feita?
Inês	Acho que nos deviam dar um apoio, por exemplo, nas nossas planificações, na maneira de nós estruturarmos as aulas, nas forma como planeamos explicar. Porque nós às vezes sabemos explicar para nós, mas não sabemos transmitir. Ás vezes acontece, para nós é tão óbvio que não sabemos como transmitir às crianças uma coisa que para nós é obvia. Eu acho que aí eles podiam-nos ajudar. É claro que há pessoas que precisam mais do que outras.
Inv	Sim, cada um com as suas necessidades, como é óbvio. E agora a propósito dos problemas que resolvemos, envolvendo antigas unidades. O que é que achou deles?
Inês	Ai, eu gostei muito dessas coisas (risos) … a sério, gosto muito. Não sei, eu gosto.
Inv	Já tinha resolvido situações dessa natureza?
Inês	Não, nunca tinha resolvido, mas gostei bastante. Acho interessante nós conhecermos outras medidas que já foram utilizadas. Às vezes nós já ouvimos falar. Eu gosto dessas coisas.
Inv	Que relevância é que lhes atribui para a sua formação para ensinar grandezas e medidas? (suprimi um bocado que não interessa)
Inês	Eu acho que teve uma coisa importante para mim que foi nós desenvolvermos, não nos centrarmos só naquela unidade … geralmente quando falamos, centramo-nos sempre no metro, no metro quadrado. E assim temos de pensar de uma forma mais abstracta, é uma unidade que nós não conhecemos, que nós não conseguimos, por exemplo, imaginar. Mas, por exemplo, olho e tenho o metro ou não sei quê e assim é diferente. Não sei relacionar isso com as de agora, não sei, acho que nós não conseguimos abstrair daquilo que temos, conhecemos o metro quadrado, não sei.
Inv	Utilizou algum desse conhecimento na aula?
Inês	Não, não nunca usámos.
Inv	Integração da história, nunca fez?
Inês	Eu não fiz.
Inv	Uma das suas colegas de grupo de estágio fez.
Inês	Fez, exacto.
Inv	Portanto também não adaptou nenhuma dessas situações problemáticas ao trabalho que fez com os alunos.
Inês	Por acaso, nunca me ocorreu. Não, não, não adaptei, mas também nunca tinha pensado nisso, não pensei nisso.
Inv	Então poderá ter sido uma falha da minha parte?
Inês	Ou da minha.
Inv	Achava alguma, em particular, adequada para trabalhar com os seus alunos?
Inês	Pausa
Inv	Alguma ou algumas, não sei se ficou alguma na sua memória.
Inês	Eu acho que foi aquela dos tecidos, Portugal e da Espanha, era interessante e aquela dos cântaros em que tínhamos que transpor a água várias vezes, essa também a acho interessante.
Inv	Poderia tê-la integrado perfeitamente na sua semana das unidades de capacidade.

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

Inês	Sim, das unidades de capacidade. Mas isso agora é mais simples, já fizemos.
Inv	Agora já pode pensar nisso para o 2º ciclo, não é?
Inês	Mas, por exemplo, a mim acontecia-me chegar a casa e pensar. Eu hoje fiz isto e isto, mas podia ter feito assim e, se calhar, tinha ficado melhor. Mas, depois, já está feito
Inv	E não fez essas anotações nos seus guiões?
Inês	Não, por acaso não, mas devia ter feito.
Inv	Faça esse exercício, depois da aula anote o que correu bem, o que correu muito bem e o que correu menos bem, o que podemos mudar …
Inês	Eu tentava chegar a casa e nunca ter nada apra fazer que era para chegar … eu ás vezes ia tão cansada, não sei se por não estar habituada, que me deitava e punha-me a pensar: isto correu bem, isto correu mal, mas por acaso não escrevi, mas devia ter escrito.
Inv	E a visita de estudo, como é que correu?
Inês	Qual?
Inv	A visita que fizeram a Alcains com os meninos.
Inês	Eles gostaram, gostaram imenso. Acho que souberam cativá-los. Eles andavam um bocado cansados, já andava tudo lá deitado que aquilo é sempre de pé e eles gostaram.
Inv	Achou que valeu a pena sair da sair da sala de aula?
Inês	Ah, isso vale sempre a pena, porque eles vão ver outras coisas e nós temos um contacto diferente com eles. Eu acho que valeu a pena, por eles, por nós. É um bocado diferente. Eles gostaram muito de fazer os joguinhos, os tabuleiros, adoraram.
Inv	E por vós, porque é que valeu a pena?
Inês	Nós já tínhamos visto e é diferente estarmos a ver as coisas duas vezes. A primeira tem sempre mais entusiasmo. Eu, por exemplo, nunca lá tinha ido e nós temos sempre mais curiosidade porque tentamos ver e a segunda vez é um bocado diferente porque já vimos. Mas gostei de ir com eles.
Inv	Acha que seria possível planear a visita sem lá ter ido previamente?
Inês	Não, claro que não. Temos de lá ir primeiro.
Inv	Para terminar que questões gostaria que eu tivesse trabalhado com vocês no âmbito da Geometria, da Prática?
Inês	No âmbito da geometria não sei, sinceramente. Porque sinceramente .. Geometria .. Quando tive geometria no 1º semestre achei que aquilo era tão complicado. Não percebia nada daquilo. Naqueles primeiros meses andei lá mesmo assim … e depois quando fizemos aqueles problemas eu pensei - isto é tão diferente, isto não tem nada a ver. Agora já acho que sim, que tinha, porque nós damos as áreas, damos os volumes , e depois trabalhámos em geometria, mesmo essa parte. Mas sinceramente, não sei.
Inv	Então e no âmbito da prática?
Inês	No âmbito da prática, não sei. Eu acho que é assim: nós estávamos ali, temos um contacto com a turma, a professora não tem esse contacto com a turma. Por isso, é um bocado difícil… a professora pode achar, por exemplo, uma coisa …nós estamos lá todos os dias, achamos que deve ser doutra e há esse conflito e nós dizemos: a professora não conhece os alunos e nós sabemos que eles vão reagir doutra. Eu acho que é muito complicado uma pessoa estar a tentar ajudar ou trabalhar com uma turma que não conhece, não é? Eu não sei, acho que ajudou

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT21_06_05)

	em vários aspectos, mas também percebo que houvesse aí um certo conflito, porque nós conhecíamos .. estávamos lá 3 dias por semana. A professor nunca lá esteve e ver as coisas gravadas é uma coisa diferente de estarmos ali.
Inv	Uma das suas colegas referiu que um dos aspectos que teve dificuldade, ou mesmo impossibilidade, de fazer foi integrar na sua semana os temas que outras colegas tinham tratado, isto é, interligar as coisas. Também sentiu esse obstáculo?
Inês	Não porque o que eu dei não teve nada a ver com as semanas das outras todas.
Inv	Fez a relação com as unidades de volume, por exemplo.
Inês	Fiz a relação com o que tinha sido dada na semana anterior pela Marta, mas eles já tinham dado também[1]. Eu não tive dificuldades com a Marta porque eu trabalho muito bem com ela… ás vezes a Marta é um pouco acelerada de mais e estraga-nos os planos porque vai muito depressa, eu sou a seguir … pronto lá tenho eu que inventar qualquer coisa. Agora eu tenho noção que se calhar com a Mariana foi um bocado mais complicado para ela. Ela .. não me recordo se ela teve que relacionar com a semana anterior, mas para ela é mais difícil. Por exemplo, quando eu fiz as unidades de capacidade, a Marta tinha feito as de volume, mas ela deu aquilo que estava programado dar, o que nós tínhamos pensado em dar. E se calhar, a Mariana nesse aspecto, eu não sei, já não me recordo bem…
Inv	Penso que a Inês está a perceber o que eu quero dizer, houve um jogo proposto pela Filipa logo nas primeiras semanas que salvo erro envolvia áreas. Então eu sugeri que introduzisse também questões envolvendo a noção de perímetro…
Inês	Sim, mas ninguém deu perímetros. Eu falei no perímetro.
Inv	O não ter falado parece que inviabilizou que vocês retomassem os temas e os integrassem, ou sente que não foi assim?
Inês	Não, por exemplo, na primeira semana que eu dei, dei unidades de área. O primeiro dia, 2ª feira se não me engano, eu não dei. Dei matemática, mas não foi directamente relacionado com as unidades de medida de área. Trabalhei com o geoplano. Eles já tinham trabalhado com o geoplano, pedi que fizessem o perímetro, a área das figuras contando os quadradinhos. Não tive problema algum em relacionar uma coisa que eu não tinha dado e além disso a Marta tinha dado a semana anterior à minha e ela não tinha falado nisso. Ela tinha dado medidas de comprimento, se eu não me engano. Eu não tive problema em pegar nesse aspecto, agora as outras pessoas nãos ei. Eu acho que é assim, acontece muitas vezes, nós damos uma coisa e guardamos na prateleira. Já não é precisa e não voltamos a pegar e, se calhar, às vezes vale a pena pegarmos. Por exemplo, na última semana fiz uma ficha, eles já tinham dado as fórmulas das áreas do quadrado e do rectângulo há imenso tempo, na semana de estágio da Rute, e eu pus lá. E eles já não se lembravam. Muitos deles não se lembravam. É uma coisa que para nós é tão simples e eles assimilaram tão bem, (…) que a área do rectângulo é comprimento vezes largura. (…) E …houve muitos deles que não foram capazes de fazer … para eles foi uma complicação, multiplicavam coisas que não eram … E aí, eu vi e pensei para mim, com os meus botões, naquele dia, que realmente é uma coisa que, às vezes, é necessária. De vez em quando retomar uma coisinha que já deram há algum tempo.
Inv	Penso que isso é muito importante, cumprir os programas e não trabalhar os

[1] Nota de campo: Inês refere-se ao facto de ser corrente na PP do 1º ciclo, o grupo que estagia no 2º semestre voltar a leccionar os assuntos que já foram abordados pelo grupo que os precedeu.

	tópicos como compartimento estanques.
Inês	Nós temos sempre que nos cingir ao que nos dão [refere-se aos mapas de planificação semanal da responsabilidade da professora cooperante]. O importante é aquilo, mas depois há sempre coisinhas que podemos apanhar, nem é preciso escrever, às vezes a falarmos com eles, isto e isto … recordamos coisas.

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT27_06_06)

Transcrição da entrevista final a Inês em 27/06/06 no Gabinete 92[2].

Inv	Vamos agora ao questionário [a investigadora entrega a AA o questionário]. Questão 1.2. Esta parte do questionário está centrada em vocês e não nos pequenos alunos, está bem?
AA	Sim.
Inv	Explicitar a opinião sobre a relevância para a sua formação dos
AA	Dos seminários de sensibilização ..
Inv	A AA respondeu que os considera como um momento relevante para a sua formação a referência à história da matemática como importante pois encara-a como uma ajuda ao enquadramento. Qual enquadramento?
AA	Por exemplo, eu acho que as crianças têm muita dificuldade, no meu caso eu também tinha, no início…em ver porquê ser assim. Algum motivo, um motivo qualquer. Qualquer coisa. Talvez se nós começarmos com uma pequena introdução, poderá haver uma explicação porque é que surgiu. Qualquer conteúdo matemático, principalmente aqueles mais complicados. Se houver, se calhar, um enquadramento nós percebemos de onde é que surgiu, qual foi a necessidade que levou à criação … daquele aspecto. Eu acho que é importante, porque senão nós .. acabamos por … aquilo que tem de saber, mas porquê? Não tem utilidade nenhuma.
Inv	Então era isso que queria dizer aí?
AA	Era.
Inv	Agora relativamente à resolução de problemas, na questão 1.3. veja lá, se faz favor. O que a AA diz é que a sensibilização para a resolução de problemas foi importante porque é uma das estratégias mais utilizadas. O que eu lhe peço que clarifique é o seguinte: no processo ensino/aprendizagem dos pequenos alunos ou na sua formação de professores ..
AA	Nos dois. Nas duas situações. Eu aprendi assim e também ensinei assim, no fundo.
Inv	E não responde à questão das conexões.
AA	Pois não. Passou. Estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática. (pausa) Eu acho que é importante estabelecer as conexões, exactamente por aquilo que eu estava a dizer em termos do enquadramento histórico. Porque eu acho que se nós … ao estabelecermos as conexões percebermos que as coisas estão relacionadas entre si (…) o que torna a compreensão mais fácil. Eu acho que torna. Agora as coisas serem-nos apresentadas assim, sem mais nem menos, por vezes … além de não nos entusiasmarem muito, nós não percebemos o porquê.
Inv	Então avancemos para a questão 2, par ao comentário geral.
AA	Sim.
Inv	No comentário que faz às tarefas … aqui … . a questão está centrada em si… No comentário, centra a sua atenção apenas na exploração didáctica dos problemas históricos, julgando-as como bem seleccionadas e adequadas ao conteúdo e aos alunos. Está-se a referir aos problemas históricos?
AA	Estou.

[2] Notas de campo: Nesta entrevista só foram colocadas as questões elaboradas com base na pré-análise do questionário e para clarificação de algumas respostas dadas ao questionário aplicado no final do ano lectivo.

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT27_06_06)

Inv	Fala dos pequenos alunos? Ou fala em si própria?
AA	Também., porque eu também gostei. É assim, (suspiro) quando começámos a trabalhar eu não encontrei grande relação com aquilo que estávamos a fazer antes, mas depois, no fundo, … quer dizer, tem a ver com a formação que tínhamos de trás. Eu, por exemplo, nunca tinha resolvido problemas desse género. Então, foi uma vertente diferente.
Inv	Quando disse no início estava a referir-se a geometria?
AA	É. sim, sim.
Inv	Então já agora e desculpe voltar atrás. Como (Na questão 2) destaca como muito relevante as tarefas de resolução de problemas e a exploração didáctica de problemas históricos, porque é que faz esta distinção, por exemplo, relativamente à análise dos manuais?
AA	Porque eu acho que há… diferentes maneiras de interpretar ou diferentes maneiras de resolver ou aproveitar certas situações que são propostas no manuais. Depende da turma, com uma turma posso conseguir trabalhar de uma maneira e com outra turma posso não conseguir trabalhar aquela actividade, daquela forma. E isso tem que ser um pouco adequada e se calhar quando nós …
Inv	Mas considera que o trabalho que desenvolvemos …
AA	E adequado. Foi adequado.
Inv	Questão 3.1 (risos) é sempre a mesma coisa. Na resposta a esta questão refere-se apenas à reacção dos alunos. Em termos de formação pessoal, isto é, como experiência de ensino, qual é a sua opinião?
AA	É assim … pode … colocar… maior problema. Porquê? Porque eu acho que eles têm muita dificuldade em interpretar, tiveram alguma dificuldade em interpretar o que lhes era pedido e em também tive alguma dificuldade em lhes tentar explicar o que era pedido, porque eles já tinham realizado aquele problema, mas de outra forma. Porque eles quando começaram disseram «mas eu já fiz isto na exposição», mas quando começaram a ler «mas isto não é as mesmas perguntas e agora como é que se faz?» e eu também tive um pouco de dificuldade em tentar explicar, porque eles já tinham resolvido.
Inv	De qualquer modo diz aí que eles gostaram.
AA	Eles gostaram. Exacto e lembraram-se que tinham …e quanto é que dava … não o valor exacto, mas mais ou menos.
Inv	Eu fiquei com a dúvida seguinte: considera relevante para eles ou para si?
AA	Para os dois. Eu acho que é importante para nós trabalharmos naquele contexto que é diferente. Não estamos habituadas e se calhar não vamos voltar a trabalhar tão cedo. É diferente. E depois acho que também é importante para eles, porque, por exemplo, eu nunca tinha feito e gostei. E acho que eles também gostam, é uma coisa diferente trabalhar com aquelas unidades diferentes que eles depois querem sempre encontrar uma sigla ou uma comparação. Eu acho que é interessante. Foi interessante para mim, para a minha formação e também para a deles.
Inv	Passemos então à questão 4.1. eu não percebo o que quer dizer aí. Certamente já estava cansada de escrever. Ora bem, escreveu «trabalhar com problemas históricos permitiu-me ter contacto com uma outra área da Matemática que a formação académica não engloba», o que se pretende é que justifique a relevância do PF para a sua formação matemática. Não percebo o quer dizer, porque o currículo do curso engloba uma disciplina de História e Metodologia da Matemática.

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT27_06_06)

AA	Sim, mas não trabalhamos estes aspectos.
Inv	E até que ponto isso contribuiu para a sua formação em matemática?
AA	Isso é bom, eu já disse isso. Ainda agora disse, para mim é importante. Porque foi um área que nunca tinha trabalhado e acho que para enriquecer a formação académica é sempre importante.
Inb	E contribuiu alguma coisa para aprofundar os conhecimentos de matemática?
AA	Sim, claro. Trabalhei com uma área diferente, aprofundei outros que não tinha.
Inv	Ok. Passemos agora à didáctica da matemática (questão 4.2). O que quer dizer com a sua resposta é que as tarefas históricas que resolveu ou propôs aos alunos admitiam várias estratégias
AA	Hum, hum.
Inv	de resolução e que isso melhorou o seu conhecimento ao nível da didáctica?
AA	Por exemplo.
Inv	Queria dizer outra coisa?
AA	Não, era isso.
Inv	Está bem interpretado?
AA	Está.
Inv	Então avançamos. Questão 4.3 (AA lê a resposta que deu)
AA	(ri) Permitiu-me ver a matemática de uma outra forma, englobando mais conteúdos.
Inv	O facto de ter visto a perspectiva histórica remete para a mesma coisa?
AA	Exactamente. Eu nunca tinha trabalhado com a perspectiva histórica da matemática, portanto …
Inv	Então e viu a matemática com uma outra face?
AA	Vi.
Inv	E gosta
AA	De uma outra forma..
Inv	E gosta mais de matemática? Ou não se pode dizer isso?
AA	Eu gosto de matemática, agora eu acho, é o que eu disse á pouco, eu acho que o enquadramento histórico também é importante, porque permite-nos .. ver … de onde é que veio a origem … o porquê ..Eu acho que é importante isso tudo. Permite-nos tornar a matemática mais real. Porque teve uma origem natural, tal como qualquer outra coisa, não é assim nada de especial como as pessoas às vezes .. (pausa)
Inv	Ok. Questão 4.4, mudança de atitude face ao processo de ensino / aprendizagem. O que é que tem aí escrito?
AA	Inseriram-se outros conteúdos no ensino /aprendizagem.
Inv	Portanto, refere-se outra vez à história?
AA	Sempre.
Inv	Questão 6. relativamente à integração da HM na aula
AA	(Risos)
Inv	A AA diz que pode ser uma mais valia para o ensino ..
AA	Exacto.
Inv	Mas ..
AA	Mas que não é bem integrada.
Inv	O quer dizer com isto? Refere-se a si, ao seu trabalho? Isto é, a AA considera que não a integrou bem? Ou refere-se a experiências …
AA	Se calhar não a integrei bem ..
Inv	Desculpe estar-lhe a pôr esta questão, mas a quem é que se refere? Quem é que não

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT27_06_06)

	integra bem?
AA	Todos.
Inv	Então como é que acha que seria bem integrada?
AA	Não sei. .. É a tal coisa, acho que devia haver sempre uma pequenina introdução histórica em qualquer conteúdo matemático. Porque é assim, nós estamos hoje a dar um conteúdo, amanhã estamos a dar outro conteúdo completamente diferente.
Inv	É que é diferente dizer que ela não é integrada do que ela não é muito bem integrada.
AA	E não é muito bem integrada, porque é assim .. alguns professores … há manuais que trazem, não é? Integração histórica, qualquer motivo, um problema, qualquer coisa. E alguns resolvem esse tipo de actividades. Agora se calhar não é resolver um problema, por exemplo, aquele da medida dos terrenos lá do Egipto. Pronto. Esse é um exemplo de uma actividade proposta num livro, os professores podem resolver. Mas será que ela é bem integrada? Ou só a resolução ajuda alguma coisa? Talvez não ajude.
Inv	Então e olhando para os eu trabalho, acha que a conseguiu integrar de forma satisfatória?
AA	Naquela aula? Se calhar naquela aula consegui. Mas depois na aula seguinte já não teve nada a ver.
Inv	Não teve nada a ver, em que sentido?
AA	Por exemplo, integrei em relação a um problema qualquer… por exemplo, aquele da Casa da Índia. Fiz uma introdução histórica, porque eles tinham estado a dar isso a história. `Á partida fiz, mas depois quando trabalhei outro conteúdo qualquer , não houve a explicação da necessidade desse conteúdo. Por exemplo, de certeza ..eu tenho a certeza, porque que eu estava lá, nunca explicaram aos alunos porque é que havia números fraccionários. E porque é que eles surgiram? Porque houve uma necessidade. Mas porque é que surgiu essa necessidade? Nunca lhes explicaram isso. Para eles aquilo era um bicho-de-sete-cabeças de que não gostaram. Para eles foi uma *seca* tremenda andarem a trabalhar com números que eles não percebem porque é que existem, porque no dia-a-dia, a maior parte das vezes, não os usamos.
Inv	Hum.
AA	E não tem nada a ver. Falamos um dia de uma introdução histórica e depois no dia seguinte continuamos com problemas que, se calhar, nem são muito reais. Por isso, se na primeira aula tivessem feito uma pequena introdução relativa aos números fraccionários, eles já tinham percebido porque é que existiam. Porque é que havia a necessidade de..
Inv	Está esclarecido. Questão 7 (risos). O que é que a AA aí diz? Que tem algumas dificuldades em estabelecer conexões ..
AA	Sim.
Inv	Mas sente que poderá facilitar futuramente … Desculpe-me, agora perdi-me
	(AA lê a sua resposta) «penso que me vai facilitar porque também me ajudou em muitos aspectos da prática pedagógica já que temos alguma dificuldade em estabelecer conexões.
Inv	Consegue clarificar um pouco melhor o que queria dizer aí?
AA	aa…
Inv	Quando diz que há ajuda em muitos aspectos, sente que relativamente a essa articulação, isso não ocorreu?
AA	Ocorreu, mas eu acho que nós próprios na nossa própria formação … não sei … As conexões que são muito importantes numa disciplina como a matemática, porque tudo está interligado e há sempre aqueles compartimentos estanques. Uma coisa é uma

Anexo 12
Transcrição das entrevistas à futura professora Inês (ENT27_06_06)

	coisa, outra coisa é outra coisa e não se estabelece conexões.
Inv	Acha eu da disciplina de Análise para a Geometria não houve ligação? Ou de Teoria dos Números para a Geometria?
AA	Eu não gostei muito de Análise. Tive imensa dificuldade em fazer a disciplina, porque eu não … achei piada nenhuma à disciplina. Pronto. Para mim foi um bicho de 7 cabeças, foi a coisa mais difícil que tive cá para fazer. Para mim, aquilo foi uma disciplina que fiz e acabou. Sei que depois houve uma parte da matéria que ainda pegámos noutra disciplina qualquer que eu até penso que foi em Geometria, na parte final. Mas que ficou ali, porque eu não gostei e, portanto, não via conexões com outras disciplinas.
Inv	Mas um dos problemas centrais da análise é o cálculo das áreas.
AA	Pois aí está. Mas é a maneira como se fazem. Eu não gostei. E acho que é na Análise que se fazem as primitivas. Eu vim da EST e tinha tido Análise Matemática e tínhamos dado isso e gostei e cheguei aqui no ano a seguir e não gostei. Tanto que eu não fiz. Passei na primeira frequência e na segunda chumbei. Depois fui a exame e chumbei outra vez. Porque eu não me endireitava com aquilo. Não gostava.
Inv	Pronto, AA era basicamente isto que eu queria esclarecer consigo. Agradeço-lhe ter vindo conversar comigo.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

Entrevista realizada na sala 1 em 21 de Junho de 2005

Inv	Então a Beatriz é natural de Ornelas, concelho de Pampilhosa da Serra. Estudou no Fundão?
Beatriz	Fiz o 9º ano em Silvares. Ainda numa escola antiga até ao 8º ano. Depois fizeram uma nova escola, onde fiz o 9º ano. Depois fiz o 10º, 11º, 12º no Fundão. Do Fundão vim para aqui.
Inv	E gosta mais do Fundão ou de Castelo Branco?
B	Castelo Branco (risos).
Inv	Beatriz, eu vou-lhe fazer algumas perguntas sobre a prática pedagógica e sobre o trabalho que fizemos em conjunto, de acompanhamento da prática. Se calhar, já conhece as perguntas.
B	Não, não.
Inv	Vou começar por lhe colocar novamente uma questão a que já respondeu no questionário. Gostou da experiência de PP?
B	Sim, gostei. É diferente… pronto, aprendemos muita coisa. Certos conceitos que a nós … que eram simples e que tivemos de rever. Às vezes até a maneira como se dá. Ah, como é que é? Tipo as palavras homófonas e homógrafas. A gente às vezes sabe e depois nãos abe bem a definição e a acabamos por aprender.
Inv	Então teve de revisitar todos os conteúdos do 1º ciclo?
B	E ás vezes até a divisão das palavras. A gente aprende coisas que, às vezes, utilizamos mas não sabemos propriamente as regras. Normal. Sabemos utilizá-las, mas …Sim. Acho que ajudou bastante, apesar do trabalho enorme que tivemos.
Inv	Queixa-se muito do trabalho. Foi um volume de trabalho muito grande?
B	Foi muito cansativo. Há pessoas que, talvez, enfrentassem as coisas com mais naturalidade. Ham, mas, pelo menos, no nosso grupo nós trabalhámos sempre em grupo e talvez demorássemos mais tempo por causa disso. Porque nós planificávamos tudo e uma fazia isto, outra aquilo, mas todas sempre juntas. Deitávamo-nos muito tarde e no outro dia levantávamo-nos cedo para as aulas. Foi muito desgastante.
Inv	E durante a prática de ensino de matemática, no 3º ano de escolaridade, sentiu algumas dificuldades na implementação dos seus planos, dos seus guiões? Estou a dizer seus, embora possam ser do grupo.
B	Hm. Não em relação a isso …a gente tentava sempre com a planificação que nos davam … Não acho que em relação a isso não tivemos grandes dificuldades.
In	Mas eu gostaria que se referisse a si em concreto, na sua semana.
B	(risos) não, acho que não. Tentava orientar de maneira que houvesse matéria nova para todos os dias. Se fosse já matéria repetida, eles … (risos) Era uma desordem, porque já conheciam e diziam: «Ah, eu já sei isso». Perdiam o interesse. Então tentámos dividir … pronto, segundo a planificação. Tentei, segundo a planificação que tinha, dividir a matéria pelos dias.
Inv	De modo a ter sempre alguma coisa nova.
B	Porque, às vezes, acabava por acontecer que alguma matéria que nos era dada, já tinha sido dada, ou pela professora, ou por outro grupo de estágio. Nós era

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

	tipo …revermos. Só que, às vezes, criava um certo barulho na sala.A turma já era um bocadinho barulhenta e então … (risos).
Inv	No caso da matemática, o que é que gostou mais de fazer em sala de aula? Introduzir conteúdos novos, resolver problemas, …
B	Introduzir os conteúdos novos.
Inv	Foi o que mais gostou? E como é que fazia essa introdução?
B	Também envolvendo actividades práticas. Levando instrumentos com que eles gostassem de medir, usar, manusear. Por exemplo, quando utilizámos o metro, o litro. Eles adoraram medir o litro. Medir a capacidade, quanto é que tinha. Se tinha maior ou menor capacidade. Se um recipiente tinha um litro ou não.
Inv	Então quando preparava as aulas a sua principal preocupação era a introdução dos conteúdos? Ou estou a extrapolar demasiado?
B	(risos) Não. Depois também, porque a seguir também tinha que ir, não é? De maneira que eles se apercebessem, conforme iam fazendo, ia introduzindo esses conteúdos, para cortar um bocado. Depois também tinha que escrever no quadro, para eles escreverem. Porque só assim manusearem, não ficava lá nada. Chegar ao quadro e escrever o que é que era o litro, o que é que era o metro.
Inv	Gostaria que me esclarecesse uma dúvida com que fiquei das aulas que observei. Os alunos não tinham um caderno para registo?
B	Hm. Eles têm um dossier e há folhas, um bloco de folhas que está num armário e quando se acaba essa folha, vão buscar outra folha que é para colocar no dossier. E quando se acaba aquela folha é uma barafunda, porque vão todos ao monte buscar a folha. Porque depois acaba-se mais ou menos ao mesmo tempo para todos. Nós normalmente falávamos disso, até a própria professora cooperante dia: «vai só o chefe de turma». Só que às vezes esqueciam-se e ia toda a gente buscar a folha. Eles têm um caderno para trabalho de casa, o dossier é que é da escola..
Inv	Durante as aulas eles questionaram-vos várias vezes sobre que folha era aquela, se era de casa, se era da escola.
B	Nós temos de dizer que é a folha da escola, a folha do dossier. [não transcrevi uma parte]
Inv	E das actividades que fez com eles, que os levou a desenvolver. Em quais é que sentiu que os alunos se envolveram mais? Que tipo de actividades é que interessavam mais aos alunos? Os problemas, as situações problemáticas, se as resolveu; as actividades práticas, os exercícios, … ?
B	Eu acho que eles se motivavam muito pela resolução de exercícios. Eles depois queriam ir … não sei se a professora reparou, na aula das unidades de tempo. Eles todos queriam participar e queriam ir. Também já aconteceu com a Joana. Eles gostam muito da matemática, então resolver e ir resolver exercícios ao quadro, motiva-os muito. Portanto é uma das aulas em que nós conseguimos mantê-los calados e atentos. Porque eles gostam muito. Em geral,
Inv	Está a falar uma ficha?
B	Uma ficha ou não ter ficha. Tipo, mandá-los ao quadro, nós ditamos o problema e ele no quadro resolve.
Inv	Então está a falar de exercícios ou de problemas?
B	De exercícios e de problemas. Tanto uma coisa como a outra. Tanto podíamos lançar problemas, como exercícios.
Inv	Os problemas também os envolviam? Mais ou ao mesmo nível do que os

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

	exercícios?
B	Mais ou menos. Quando às vezes era mesmo problemas que havia várias resoluções. Um apresentava uma resolução diferente e depois todos queriam apresentar. «Mas eu não tenho assim, mas dá-me o mesmo resultado». Ah. Eles gostavam muito. Depois iam-me mostrar o resultado, depois para comparar.
Inv	Quando isso acontecia, como é que procedia com as várias resoluções diferentes?
B	Eram todas colocadas no quadro. Pronto, para eles conhecerem as várias formas. Caso exista uma diferente da nossa. Pronto, para eles conhecerem as diferentes estratégias.
Inv	Das grandezas e medidas qual é que foi o conteúdo que mais gostou de ensinar.
B	Eu, em geral, gostei de todos. Gostei do metro, gostei do litro. Também gostei muito de dar as horas… As horas é uma matéria que a gente conhecia e que eles também já … Pronto, também gostaram. Depois eles fizeram o relógio, também construíram um relógio. Então eles ficaram muito motivados, lá a mexer. Mas em geral gostei de todos.
Inv	Lembra se de algum episódio de aula que ache que lhe tenha corrido menos bem?
B	Não. Bem em todas pode haver falhas. É normal.
Inv	Sim, mas refiro-me a algo que a tenha levado a pensar: «não me correu muito bem. Devia ter feito de outra maneira». Ou, em contrapartida, chegar ao final da aula e dizer: «Correu mesmo bem. Correu até melhor do que eu estava à espera».
B	Não. Correu-me normalmente assim como planeei, … nem melhor, nem pior. Claro que a gente, às vezes, quer sempre ter o melhor. Mas assim … negativamente, negativamente acho que nunca aconteceu. Em certas disciplinas, sem ser matemática, pensei: «não me correu nada bem isto», mas na matemática, como é uma área que eles gostavam e gostavam de participar, não houve assim nenhuma …
Inv	Então neste momento de final de PP, o que é para si uma aula de matemática para o 1º CEB?
B	(risos) Uma aula de matemática … tem de envolver também actividades práticas, para eles verem. Não é só chegar lá e dar «isto é assim e isto resolve-se assim», tipo dar-lhes uma regra. Têm que, tipo, saber porque é que aquilo é assim. Dando exemplos, mesmo da nossa vida real e depois resoluções de exercícios não só teóricos, mas também práticos onde … tipo: um tanque com água, qual é que é a capacidade do tanque. Ou tinha tantos litros … e gastaram-se … Tipo situações que envolvam o quotidiano.
Inv	Portanto é isso que mais valoriza no ensino da matemática? Situações que estabeleçam ligações com o quotidiano?
B	Sim e actividades práticas em que eles também manuseiem, em que eles cheguem… levá-los a eles a chegar à chegarem à forma. Não sermos nós a chegar ali e dizermos «olhem a forma disto, é isto».
Inv	Portanto, esse é um aspecto que valoriza muito. Qual lhe parece ter sido a reacção daqueles meninos á presença da câmara na sala de aula?
B	Ai. Eles estavam sempre … a fazer festinhas …
Inv	Acha que isso os perturbou.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

B	Eles, ao fim e ao cabo, … pronto quando sabiam que estava lá a câmara, iam lá fazer, de vez em quando macacadas, ou se passavam lá, sempre faziam … (risos) qualquer coisinha. Pronto, mas acho que em relação ao facto de estarem a aprender, acho que não influenciou.
Inv	E a si, perturbou-a?
B	A mim, às vezes (risos). Com medo, à vezes, «Será que estou a dizer as coisas correctamente? (risos) está a ser gravado e depois a professora vai a ver (risos)».
Inv	Isso incomodava-a? A ideia de que depois eu ia observar a sua aula?
B	(risos) às vezes tentava esquecer-me e tentava … A PC chegou a comentar que achava que eu me sentia mais, não me atrapalhava tanto com a câmara, como a Joana. (risos) Mas sempre influencia, «será que eu estou a dizer as coisas correctamente?» (risos) ou «estou a dar correctamente os conteúdos?». Chego lá e a professora, o que é que vai dizer»?.
Inv	Mas à partida isso não interfere com a sua avaliação.
B	Ah, mas pronto.
Inv	E o que é que preferia na sala de aula, a câmara ou a professora supervisora?
B	A câmara.
Inv	A câmara ou eu?
B	Não sei. Não sei responder.
Inv	Centremo-nos agora nas disciplinas de Geometria I e II e também nas reuniões que fomos tendo ao longo da prática. O nosso trabalho serviu para alguma coisa em termos de prática de ensino no 1º ciclo?
Beatriz	Aquela parte da geometria? … a .. a parte da área que a professora nos deu, pronto, que nos deu … até acho que ajudou bastante … e do litro e das capacidades, termos ido ao Instituto Português da Qualidade, acho que nos ajudou termos uma ideia do metro, como é que apareceu. Acho que nos ajudou bastante neste semestre de PP, porque nós fizemos os teatros do metro e do litro, guiando-nos por aquilo que aprendemos lá e ouvimos no IPQ e acho que nos ajudou bastante em relação a isso …
Inv	E os pequeninos, como é que reagiram, em sua opinião, a essas dramatizações?
Beatriz	Eles gostaram, eles ficavam … quando eram dramatizações eles que eram muito barulhentos, mas quando se fazia uma dramatização, quer do litro, quer fosse do metro, quer fosse do que fosse, eles ficavam sempre calados. Já acabou, perguntavam quando acabava.
Inv	E depois acha que ficou alguma coisa nas cabeças deles relativamente à mensagem que vocês pretendiam passar?
Beatriz	Eu acho que sim, pelo menos … não ficaram a saber uma data, quando é que começou o metro, mas ficaram com aquela ideia de que o metro não começou logo a ser utilizado. Utilizavam-se antigamente outras medidas. Acho que eles ficaram com essa ideia. Não propriamente como é que se chamavam ou o que eram, mas ficaram com ideia que houve várias evoluções, até chegarmos ao metro e a mesma coisa para o litro.
Inv	E agora em relação ao acompanhamento na prática, serviu de alguma coisa, teve algum reflexo na sua prática?
Beatriz	Sim, eu acho que sim. A professora também nos dava ideias e sugestões. Sempre está ligada com a área da matemática, tem mais experiência do que qualquer uma de nós. Nós estamos a aprender, estamos a começar … eu acho

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

	que nos ajudou.
Inv	A si..
Beatriz	Ah, sim. Mesmo a mim. Falo por todas, é o hábito de sermos um grupo. Eu acho que me ajudou bastante mesmo quando foi planificar a visita de estudo que eles adoraram e eu também gostei muito, apesar de me ter dado imenso trabalho. Mas adorei tê-la planificado (ri) gostei imenso, acho que na minha semana foi uma boa aposta, tanto que estava a dar … isto serviu até para os itinerários e depois também tinha sido eu a dar os relógios, pronto, … as posições do sol … acho que deu para aprofundar a matéria que eu tinha dado na minha primeira semana. Acho que a visita de estudo foi uma boa aposta, apesar de a gente de início estar assim … um bocadinho … mas depois começámos a pensar melhor … e mesmo que os outros grupos não queiram, eu quero fazer e o meu grupo também me ajudou… e vamos em frente … e correu bem. Depois viemos a saber que os outros grupos também vieram a aceitar, mas nós começamos logo a dizer que queríamos ir, eu também comecei a dizer que sim, que fazia.
Inv	E os meninos envolveram-se?
Beatriz	Envolveram-se bastante (risos). Tanto que chegaram lá e a srª até perguntou: vocês trazem a lição bem estudada, quem é que vos ensinou? E eles, porque eles sabiam responder às perguntas, porque estive a explorar com eles o roteiro. Com os conteúdos que eu já tinha dado anteriormente sobre relógios de sol, eles sabiam responder a muitas das perguntas que a srª lhe colocou.
Inv	Então globalmente acha que o apoio foi positivo?
Beatriz	Acho.
Inv	Recorreu a apoio de outras colegas minhas, de outras áreas?
Beatriz	Não.
Inv	Não sentiu necessidade?
Beatriz	Houve uma parte em que talvez pensasse falar com a professora X da área do português, mas depois falei com a PC. Ela esteve a dar-me umas sugestões e não foi necessário.
Inv	Eu estou-lhe a colocar esta questão para chagar a uma outra questão e que é a seguinte: acha que seria importante a PP ser acompanhada por professores das áreas disciplinares? Um professor de português, um professor de ciências, …
Beatriz	Eu acho…Eu acho que até poderia ser favorável, sempre nos davam outras ideias e têm mais prática que nós temos e … oh nós apresentarmos … tipo a nossa planificação … oh .. acho que esta parte se for dada desta maneira torna-se mais fácil para aquelas crianças.
Inv	Portanto refere um apoio mais ao nível da didáctica?
Beatriz	Hm. Sim.
Inv	Em relação aos problemas que resolvemos em Geometria envolvendo antigas unidades, o que é que achou deles?
Beatriz	(risos) acho que servem como cultura geral para nós, porque praticamente nós nunca mais vamos pegar naquilo. É mais para cultura. Para cultura porque nós no dia-a-dia acho, penso eu, nunca mais vamos utilizar aquelas medidas. Acho que sim, como cultura. Para dizer um dia às crianças como é que se utilizada, tipo fazer os passos.
Inv	Eles não complementaram a formação que tinha relativamente ao problema da medida? à necessidade de considerar múltiplos e submúltiplos da unidade?

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

B	Ás vezes quando foi no … acho que foi no litro, eles falaram no centilitro e no mililitro. Isso não é do 3º ano e eu tive de lhes dizer que isso é uma nova medida, é um submúltiplo, mas vamos dar mais tarde.
Inv	Eu refiro-me aos problemas. Os problemas para si reduzem-se a cultura geral? Isto é, considera que eles não contribuíram para a compreensão de aspectos referentes às unidades de medida, como, por exemplo, as relações entre as unidades?
B	Sim, ajuda-nos a compreender muitas das relações das medidas…
Inv	Gostou de algum deles em particular. Existe algum que considerou mais interessante do que o outro?
B	Já não me recordo.
Inv	Propôs algum aos meninos, na PP?
B	Não.
Inv	Não se lembrou disso ou acha que não são adequados?
B	Nem me lembrei disso. É tanta coisa que a gente, às vezes … às vezes temos coisas à mão que devíamos utilizar e não utilizamos.
Inv	Mas acha-os adequados para os meninos?
B	Acho que eram um bocadinho complicados.
Inv	Achou-os complicados, mesmo para si?
B	Não, para mim não devido aos conhecimentos que a gente já teve e …pronto. Para eles acho que sim.
Inv	Para finalizar, além dos aspectos que nós fomos abordando quando nos reunimos, o que é que, na sua opinião, gostaria que fosse abordado na disciplina de Geometria para uma melhor preparação para a profissão?
B	(risos)…Não sei …
Inv	Nunca pensou nisso?
B	Nunca pensei nisso professora. …
Inv	Portanto, globalmente considera que a sua formação, a formação que lhe é proporcionada aqui na ESE é suficiente para a PP no 1º CEB?
B	Eu acho que devíamos ter tido mais outras disciplinas… pronto, tipo, que nos formassem, tipo mais… por exemplo, a matemática tivemos Metodologia do Ensino da Matemática e vai um e aquela história do vai um e … tabuadas e não sei quê. Tipo a português, tipo a a ciências há conteúdos, às vezes, simples que a gente já não se recorda. Quando foi agora para o estágio, tivemos que rever isso tudo. Nós estudámos isso tudo e se tivéssemos talvez uma disciplina que nos preparasse para isso já não tínhamos… Talvez não passássemos, perdêssemos tanto tempo em relação a isso. Planificávamos, dávamos uma vista de olhos, amanhã fazemos assim e talvez nos surgissem mais ideias. Mas assim tínhamos que ir estudar e ver como é que se fazia realmente aquilo, não é? Tipo a translineação, nós sabemos e fazemos quando escrevemos, mas ter uma regra não tínhamos.
Inv	E no âmbito do apoio à PP, disse que o apoio que eu vos dei foi positivo, mas certamente gostaria que fosse doutra natureza. Ou não?
B	Não, eu acho que o apoio que nos deu, dentro das expectativas, acho que foi favorável. Não tenho nada a dizer contra, nem a dar nenhuma sugestão.
Inv	Nem sugestões, nem críticas?
B	Nem sugestões, nem críticas.
Inv	Sabe que é importante ouvir sugestões e críticas.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

B	Talvez, tipo, mais sugestões. Sei lá, tipo, como é que poderíamos colocar situações, problemas. Porque em questão da prática, de mostrar coisas do dia-a-dia a professora sempre nos deu indicações. Na minha semana vá. Tipo, assim à base de problemas, problemas que deveria ter resolvido com eles ou não posso resolver com eles. Quais … talvez que os que motivasse mais ou … talvez nesse aspecto.
Inv	E mais algum aspecto?
B	Não. neste momento, não.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

Transcrição da entrevista final a Beatriz em 27/06/06 no Gabinete 92[1].

Inv 2min:24s	A primeira questão cuja resposta está que está menos clara é a 1.4. [o questionário é entregue a Beatriz e a inv procura a questão 1.4 da parte II). É assim, a questão 1, da qual a 1.4 faz parte, pedia o quê? Para recordar o percurso que fizemos em conjunto e para dar a sua opinião sobre a relevância de diferentes momento deste para a sua formação, certo? Relativamente à sessões de reflexão considerou-as como relevante e o comentário que fiz é que a Beatriz faz algumas reflexões sobre a reflexão, sobre a importância da reflexão, mas não se centra na questão que lhe foi colocada. (Beatriz lê a sua resposta, momento de silêncio) É assim, da sua resposta fiz a seguinte síntese considera as sessões de reflexão sobre a prática pedagógica como **muito relevantes**, por estas lhe permitirem reflectir sobre o que correu melhor e o que correu menos bem na aula. E depois faz uma série de reflexões sobre o papel da reflexão na formação de professores. O que eu lhe peço é se quer acrescentar alguma coisa a esta pequena análise que aqui está, porque do que diz a seguir eu não retiro nada, porque não está centrada no trabalho que fizemos em conjunto. Faço-me entender?
Beatriz	Sim, sim. (silêncio)
Inv	Se achar que isto está bem, que quer deixar a resposta assim avançamos, Beatriz
Beatriz	Sim é isso. Pode ficar.
Inv	É isto ou quer dizer mais alguma coisa? (silêncio)
Beatriz	Só se … é através da reflexão que a gente vê, que consegue planear também melhor … para a próxima correrem melhor, não é? mas ao fim e ao cabo acaba por ser o que aí está.
Inv	Então vamos avançar, Beatriz. Passemos para a questão 4. avance lá no questionário, se faz favor. Nesta questão, a Beatriz não dá uma resposta muito concreta do porquê considerar muito relevante. Nesta questão a ideia era … qual a relevância para si, não é para os alunos pequeninos. Isto é, acha eu o trabalho que fizemos em conjunto .. a .. sua formação em matemática, ou seja, para os seus conhecimentos em matemática. Considera muito relevante, mas depois o que é que a Beatriz diz? Não diz nada de concreto. Veja logo o que aí diz (Beatriz lê a resposta). O que quer dizer é que acha que o contributo foi muito relevante porque acha que ficou com um conhecimento mais aprofundado? É isso que queria dizer?
Beatriz	Era.
Inv	Então posso fazer essa leitura?
	Pode.
Inv	Consegue concretizar?
Beatriz	Silêncio.
Inv	E agora, na formação em didáctica, ou seja, mais virado para o ensino da matemática (leio-lhe a resposta dada)
Beatriz	(continua a leitura) e esta disciplina acho que nos proporcionou um pouco isso
Inv	Qual disciplina? Ou refere-se ao trabalho?
Beatriz	É mais o trabalho (risos).

[1] Notas de campo: Nesta entrevista só foram colocadas as questões elaboradas com base na pré-análise do questionário e para clarificação de algumas respostas dadas ao questionário aplicado no final do ano lectivo.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

Inv	Então quer dizer que se está a referir ao trabalho que desenvolvemos ..
Beatriz	Sim.
Inv	E que portanto
Beatriz	Que nos proporcionou sempre que possível e sempre que os alunos não estavam a compreender, saber como alterar as estratégias.
Inv	Certo. Agora passemos à questão 4.3, mudança de atitude. (Leio-lhe a resposta, Beatriz acompanha-me) … aqui é que não responde mesmo. Diz que sempre viu … ora se sempre viu, não há mudança de atitude.
Beatriz	Pois, se calhar, não entendi muito bem, não.
Inv	Então veja lá o que é que responderia agora a essa questão.
Beatriz	A minha opinião é que sempre vi a matemática … não é pelo facto de agora ter … simplesmente aprofundou .. ou concretizou aquilo que eu pensava …
Inv	De qualquer modo quando diz que ela é engraçada, também isto é um pouco redutor.
Beatriz	Pois. (silêncio) há coisas na matemática, por exemplo, tipo partes da história que a gente não (ri)… se calhar se não fosse pela aplicação por parte da professora … não chegávamos … em certos aspectos não aplicávamos tanto, como já teríamos aplicado. Também acabamos por … ter …ver a importância da história para que os alunos também entendessem, sem ser só as coisas do dia-a-dia.
Inv	Porquê? Pensa que a histórica permite uma mudança na forma como nós vemos a matemática?
Beatriz	Houve uma interrupção, alguém bate à porta Beatriz repete a pergunta
Inv	Parte-se do princípio que a Beatriz não tinha tido contacto com aspectos da história da matemática.
Beatriz	Não.
Inv	Nunca?
Beatriz	Pouco.
Inv	E que isso muda a ideia que faz da matemática, neste momento?
Beatriz	Um pouco, porque acabava por ver a matemática como só coisas actuais e nem sequer, por vezes, há coisas passadas que nos passavam ao lado.
Inv	E acha que lhe permitiu, por exemplo, gostar mais de matemática?
Beatriz	Sim.
Inv	Mais do que já gostava?
Beatriz	Mais do que já gostava.
Inv	Então avancemos para a próxima questão, 5. A 5 qual era?
Beatriz	Como avalia a receptividade do professor cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos.
Inv	Leia lá a sua resposta que eu depois ponho-lhe a questão que tenho aqui.
Beatriz	(Beatriz lê em voz alta)
Inv	O porquê que apresenta não dá resposta o que se pede, a não ser que possa entender das suas palavras que foi devido à muita receptividade do PC que BEATRIZ reconheceu valer a pena a integração da história da matemática
Beatriz	Não.
Inv	E que a professora cooperante a incentivou? Não pode abanar a cabeça, senão não fica na gravação, Beatriz.
Beatriz	(risos) Não, não é essa segunda (risos).
Inv	Então o que é que queria dizer aí?
Beatriz	Eu queria dizer que …

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

Inv	O que é que quer dizer quando diz que a professora cooperante era muito receptiva? Porque é que a considera muito receptiva? Se calhar porque chegava lá e dizia eu tenho estes problemas e estou apensar propô-los, o que eé que acha? E a professora respondia: acho muito bem, era isso.
Beatriz	Sim, nesse nível e ajudava-nos: «Tens alguma dúvida? Anda cá …», tipo esclarecia. Temos assim e podemos até fazer isto ou aquilo, até para causar-lhes mais motivação. E é nesse aspecto que ela nos ajudou. Não no aspecto de dizer, olha faz isto, ou faz aquilo. Oh professora tenho este problema, proposto pela professora, estava a pensar dá-lo. Depois li-a-o e dizia «acho adequado e podemos até dá-lo naquela aula em que vamos dar aquela matéria, como já deram aquilo ou deram depois». Acho que foi nesse aspecto que ela ajudou.
Inv	Pronto, está esclarecido. Questão 6 (Beatriz lê em voz alta a questão posta no questionário). Eu aqui só quero que leia a sua resposta e veja se está de acordo com a interpretação que eu fiz da resposta.
	(Beatriz lê em voz alta da resposta que deu no questionário)
Inv	Vou ler-lhe o que redigi com base na sua resposta: «para a Beatriz Beatriz anteriormente à participação neste percurso não encarava o estudo da história da matemática como fundamental. Considera que conhecer aspectos do desenvolvimento da matemática, lhe deu uma melhor visão da matemática e uma maior cultura, e consequentemente preparou-a para enfrentar a profissão de docente.» Está de acordo?
Beatriz	Estou de acordo.
Inv	Questão 7. A Beatriz diz «o percurso de formação foi fundamental ou foi muito relevante para conseguir uma prática de ensino com maior sucesso e articular a história da matemática com a resolução de problemas.»
Beatriz	Sim.
Inv	Era isto que queria dizer?
Beatriz	Sim.
Inv	E relativamente às conexões? A sua resposta não contempla esse aspecto.
Beatriz	Era isso que eu estava a ver .. que acho que não tinha, não.
Inv	Duas coisas podem acontecer. Ou acha que não foi possível essa dimensão, isto é que não conseguiu articular nas suas aulas a resolução de problemas com as conexões e as conexões tanto podem ser dentro da matemática, como já falámos várias vezes, como fora da matemática, por exemplo aplicações…
Beatriz	Eu consegui fazer essas ligações, essas conexões … é ligações, não é?
Inv	É conexões ou ligações.
Beatriz	Com aspectos … em certas aulas, nós até recordávamos aspectos que tínhamos dado nestes problemas históricos com aqueles que estávamos a aplicar na[2] ..
Inv	Portanto, conseguiu fazer conexões dentro da matemática?
Beatriz	Se calhar com as outras áreas nem tanto, mas dentro da matemática sim.
Inv	Fora da matemática menos?
Beatriz	Bem, fora da matemática …
Inv	Os problemas em si já eram aplicações à realidade.
Beatriz	Sim.

[2] NC: Isto sugere que Beatriz recorreu, por vezes, aos problemas históricos para fazer analogias.

Anexo 13
Transcrição das entrevistas à futura professora Beatriz (ENT21_06_05)

Inv	Consegue dar algum exemplo concreto?
Beatriz	Neste momento não me estou a recordar. (pausa) Por exemplo quando estávamos a dar … demos o conceito de proporção e … o que era e depois conseguimos fazer bem a ligação com o problema histórico que demos que foi .. não sei se foi a companhia … foi a companhia de mercadores .. já não sei bem como é que se chama. Mas um dos primeiros que dei também envolvia a proporção.
Inv	Por exemplo, o problema da Quebra da Mercadoria permite ligações à disciplina de história Ou não fez essa ligação?
Beatriz	Fiz e também a fiz na Companhia de mercadores…
Inv	Também. Pronto, então apesar de não ter referido aqui é na mesma muito relevante.
Beatriz	Sim, sim.
Inv	E agora vamos para a 1ª parte em que gostaria que clarificasse a resposta que deu à questão nº6. Tente caracterizar a relação que teve com a matemática (a inv lê em voz alta a resposta dada por Beatriz). A que desafios é que se refere em cada uma das áreas?
Beatriz	Por exemplo na matemática, não é? ficámos a nível de conhecimentos …
Inv	Não, aqui nas disciplinas de didáctica enfrentou desafios. A que desafios é que se refere?
Beatriz	A nível de situações que nos foram propostas.
In	Então e a nível da História e Metodologia da Matemática?
Beatriz	A nível de desafios… de conhecer matemáticos … de conhecer um pouco da história …estou-me a referir a esses desafios. Talvez a palavra desafios não seja a mais adequada.
Inv	Consegue substitui-la? (risos)
Beatriz	(silêncio seguido de risos)
Inv	Bem, MEM, Estruturas e HMM são as disciplinas que mais releva?
Beatriz	Há outras disciplinas, mas …
Inv	Mas destaca claramente essas duas. Bem, agora quero agradecer-lhe a sua colaboração durante todo este período em que trabalhámos juntas.

Anexo 14

Transcrições das entrevistas aos professores cooperantes (Fernanda)

Entrevista realizada à professora cooperante Fernanda em 29/06/2006[1]

Inv	A primeira questão que lhe quero colocar é a seguinte: se usarmos uma escala de insuficiente, suficiente, bom e muito bom, qual considera ser o nível de preparação científico da Joana, em relação à matemática? Ou seja a preparação em matemática.
PC	Científica …
Inv	Posso reformular a questão. Como é que acha que a Joana se sentia com a matemática: à vontade, completamente à vontade, …
PC	Eu punha-a …são quatro níveis, não são? Eu punha-o no terceiro, no bom. Realmente não foi um ano em que eu tivesse detectado muitas falhas de natureza científica. Por acaso, não foi. Por vezes há … já tem havido situações em que as pessoas parece que desconhecem determinado conceito .. eu não digo conceito, mas procedimento. Mas este ano não deu para detectar situações dessas.
Inv	Então e ao nível da didáctica da matemática, ou seja, ao nível do ensino da matemática que engloba várias coisas, desde a planificação, aos materiais, à forma como explora as situações na aula, …
PC	Da Joana. (pausa longa) Portanto, era assim, no início, antes de as coisas serem planificadas .. e vistas em conjunto.. não havia muitas ideias de como transformar aqueles conceitos em situações de aprendizagem, mas depois no fim, depois de trabalharmos em conjunto e agora aproveito também para dizer que foi importante que elas levassem aquelas situações problema, porque foi uma maneira de tornar aqueles conteúdos .. aprendíveis e até .. foram motivadores. Eu no início até estava com algum receio, mas depois acabaram por motivar e elas próprias também estavam com algum receio de por as situações. Parecia que os miúdos não iam chagar lá, ou que não os iria motivar, mas depois acabaram por se entusiasmar imenso, com as situações que levaram. Geralmente as estratégias que utilizo não são tanto assim. São geralmente situações problemáticas, mas não problemas …
Inv	Daquela natureza.
PC	Sim. E … de maneira que, como já levavam daqui as sugestões também não deu muito para ver a dificuldade que ela teria em ser ela a propor. Se fosse ela a propor, não é? Em que nunca tivesse pensado, porque já levava uma proposta. Por aí talvez eu também não tenha diagnosticado tanto. Porque quando elas me propunham qualquer coisa diferente daquilo que levavam já preparado, aí dá para ver .. a distância que ainda têm em relação aos conceitos que têm, que já vi que têm, quando chegam lá. Só que torná-los em algo que é aprendível é …difícil, mas neste aspecto não deu tanto para ver. Daí eu também ter mais

[1] Notas de campo: a entrevista realizou-se na sala 7 e por motivos relacionados com a gravação (memória cheia e falha de alimentação - pilhas) foi interrompida duas vezes.
A investigadora começou por apresentar à professora cooperante os objectivos da entrevista. Foi explicitamente referido que não se pretende fazer uma análise comparativa entre as futuras professoras, participantes no estudo, que realizaram a prática pedagógica sob a sua orientação –Joana e Beatriz. Foi facultada à PC desde o início da entrevista o acesso ao guião da entrevista, pois considerou-se que tal contribuiria para criar um clima mais descontraído na entrevista.

	dificuldade em situá-la, mas entre o 2 e o 3, entre o suficiente e o bom. Acho que sim.
Inv	E então relativamente à Beatriz, como é que a posiciona nas duas dimensões, a científica e a didáctica?
PC	É assim, a Beatriz talvez pela dicção que ela tem, embora tenha procurado fazer uma evolução, trazia algumas complicações em termos de concretização dentro da sala de aula, mas os amteriais que ela utilizava… acho que também, tanto num caso como no outro … Em termos de formação científica ..não sei, talvez a Andreia … eu agora não consigo não comparar …
Inv	Sim, eu sei que é difícil não comparar.
PC	Talvez a Elisabete às vezes tivesse mais hesitações.
Inv	Portanto, situa-a ligeiramente abaixo da Joana?
PC	Sim, sim.
Inv	Quer a nível da matemática, quer da didáctica?
PC	Sim, sim. Mas isto também é por questões pessoais … a maneira de ser, a maneira de interagir com os alunos. É sobretudo por isso.
Inv	Aliás, a comunicação oral é uma coisa que as diferencia muito.
	É sobretudo aí, é sobretudo nesse aspecto. Mas isso também tem a ver com … por exemplo, a região da Guarda, a região da JOANA tem uma dicção lindíssima e a zona do..
Inv	Ali do Fundão.
PC	Fundão … este já é mais Fundão, mas acho que pertencem à Pampilhosa.
Inv	Sim é verdade, pertence à Pampilhosa. Mas é verdade, ela tem esse problema que talvez consiga ultrapassar.
PC	Eu acho que nesse aspecto evoluiu. Começou a ter mais cuidado e evoluiu, até porque os alunos de uma forma muito carinhosa, era de uma forma carinhosa, por acaso, repetiam o que ela dizia às vezes. Mas não .. eu via que não era para … nem ela se sentia mal. Era uma forma de comunicação muito diferente daquela que eles habitualmente ouvem, embora em Alcains também se fale mal, muito mal (risos), mas aqui nem era erro de construção de frases, nada disso. É mesmo a dicção. Portanto, ligeiramente abaixo.
Inv	Mas não é muito significativo. Ambas evoluíram ao longo do ano. Penso que já referiu isso.
PC	Sim.
Inv	Nem seria de esperar outra coisa.
PC	Sim, senão não estaríamos lá a fazer nada.
Inv	A próxima questão que quero colocar, relativa a ambas, mas sem ser uma resposta comparativa é se na sua opinião elas gostam de matemática … e de ensinar matemática. Qual é a sua percepção?
PC	Eu acho que sim.
Inv	As duas coisas, ambas gostam de matemática e de ensinar matemática?
PC	Por acaso nunca lhes fiz essa pergunta, mas acho que sim.
Inv	Esta pergunta eu já a fiz a ambas.
PC	Eu acho que sim, eu nunca lhes fiz a pergunta, mas pareceu-me que sim, porque houve questões … houve às vezes situações em que elas estavam a assistir, estavam até a assistir a aulas da C em que ela tinha bastantes materiais, e em que elas comentavam, comentavam e eu cheguei-me junto delas. Até pensei que estivessem a comentar qualquer coisa que não estivesse a correr tão bem, não

	sei. E «oh, professora nós estávamos aqui … se na altura em que aprendemos matemática, se nos tivessem ensinado desta maneira, acho que teríamos aprendido matemática também, de uma outra forma». Eu acho que isso terá levado a que … elas tenham gostado essencialmente … acho que ficaram a gostar .. de .. ensinar matemática. Penso que sim, mas não confirmei nada com elas, foi uma coisa que não confirmei. Mas já tem dado para isso, já tem dado para ter esse tipo de conversa quando chegamos ao fim, mas este ano as coisas precipitaram-se de tal maneira que nem deu para termos … nem sequer o feedback das reflexões dela. Porque entretanto como lhes foi pedido muito trabalho a nível das ciências, acabei por não ver. Gostaria até de ver, mas não. É a primeira vez que não leio as reflexões, daí eu não ter esse… Agora ao longo do ano, não de forma explícita, acho que sim. Eu acho que sim. Espero que elas tenham dito que sim.
Inv	Disseram. Posso-lhe dizer que sim. Então relativamente à Beatriz que pontos fracos e que pontos fortes é que consegue destacar na prática?.. Além da questão da dicção.
PC	Sim, sim. Esse é talvez o ponto mais fraco. A .. fortes .. ela era muito cuidadosa nas planificações que fazia para que as coisas resultassem e apresentava-mas com alguma antecedência, para que tudo pudesse correr bem. Tinha muito essa preocupação. A .. como pontos negativos eu penso que para além da dicção , mas isto acontece muito nesta fase inicial, é realmente .. e isso notou-se muito numa aula em que a professora supervisora esteve presente …que era sobre proporções.
Inv	Foi aquela em que a Beatriz trouxe os alunos para a rua?
PC	Sim, sim, mas tinham partido da história da matemática, mas depois não voltava lá. Era aquela história em que … através da sombra….
Inv	Thales determinou a altura das pirâmides?
PC	Sim, sim.
Inv	E depois, a Beatriz não regressou à história?
PC	Não voltava lá. Foi preciso … apesar de ter planificado isso, mas isso estava pensado em termos de planificação. Tentar demonstrar e aquilo que havia de comum entre aquilo que eles tinham feito e aquilo … e a experiência que o Thales fez e que tinha sido mais genial porque ele teve a escolher exactamente aquela altura em que a razão era 1. Pronto o voltar às coisas, o interligar …
Inv	Até às vezes na resolução de um problema, a passagem abrupta para outro.
PC	Sim, sim.
Inv	Algumas vezes aconteceu isso.
PC	Sim, acontece. Sem a exploração, sem contextualizar as coisas e …falar sobre esse assunto. Às vezes também é difícil com estas crianças e nesta fase, não é? Nesta fase em que elas estão a iniciar, então é tudo às vezes … muito …hãm … parece que as coisas podem escapar, que o tempo também corre, depois o ter que controlar o tempo.
Inv	Próprio do momento que estão a viver, não é?
PC	Sim, acho que sim.
Inv	Então e relativamente à Joana que pontos fortes e fracos destaca na sua prática?
PC	A Joana … já tinha mais … acho que já tinha mais essa capacidade de …
Inv	Esse já não é um ponto fraco da Joana?
PC	Não tão fraco. Pronto é dentro da formação inicial, não é? estarem pela primeira vez numa situação … embora tenham tido a experiência no 1º ciclo, mas acho que é diferente. Ahm … pronto, não considero isso um ponto fraco, fraco.

	Assim em relação à Joana pontos fracos, fracos … ela tinha uma boa presença, era muito agradável .. hãm …
Inv	Geria bem os conflitos com os meninos?
PC	Sim … dentro do possível. Nós tínhamos realmente alguns … foi complicado. Aliás no final do ano houve um menino que foi suspenso. Mas aceitou muito bem e modificou-se. Foi pena foi ser tão tarde, porque ele compreendeu muito bem e então quando soube que ia ser expulso aqueles dias, andou a participar na festa, porque foi a turma que organizou a festa de final de ano. E todo ano foi aquilo que se viu. Uma instabilidade emocional enorme. [não transcrevi a conversa sobre o aluno]
Inv	Então e na Joana destaca algum ponto forte?
PC	Eu acho que assim forte … aquela vivacidade, resolvia melhor as situações que surgiam, era mais espontânea … quando surgia alguma coisa, contornava melhor a situação e resolvia-a de uma forma mais satisfatória, enquanto a Beatriz era assim mais organizada e mais …
Inv	Tudo muito planeado.
PC	Sim, precisava e precisa daquela organização. A Joana consegue …
Inv	Solta-se mais, consegue fazer uma exploração mais livre de tudo o que propõe na aula.
PC	Sim.
Inv	Há pouco falou dos problemas e é para aí que eu agora vou caminhar. Um aspecto em que é importante conhecer seu feedback é o de saber se achou os problemas adequados ao nível de escolaridade. Esse é um aspecto em que a sua avaliação é muito importante, porque é uma professora que está no terreno.
PC	No início quando li … e até sem ler as sugestões que apareciam, as sugestões de exploração … hãm … pensei que eles fossem ter alguma dificuldade e que fossemos demorar mais tempo…
Inv	E o primeiro eles reagiram um bocadito mal, porque foi o primeiro que teve um texto muito longo, um texto introdutório.
PC	Sim, mas depois acho que até correu bem. Talvez até por hábito de … ler … situações dessas, não é? E era a linguagem também que era necessário …, mas depois achei até muito … e acho que mesmo os alunos todos acabaram por se envolver e achavam graça e estavam à espera de mais. Ou foi por eu também gostar (risos) que depois achei que eles próprios estavam a gostar, mas achei que eles reagiram bem.
Inv	Portanto, achou que os problemas se inseriram bem nos conteúdos e no nível de escolaridade e nas competências a desenvolver.
PC	Sim, sim. Acho que sim. E, por acaso, foi a primeira vez que eu … levando daqui essa sugestão, e eu achei muito bem, que era introduzir logo tudo o que era razão, a percentagem, a escala, …
Inv	A Beatriz disse-me que resultou…
PC	Sim, sim. Foi muito mais rápido. Nós tínhamos feito uma planificação para tantos dias..
Inv	Que cumpriram.
PC	Cumprimos, mas de qualquer maneira daria mais um dia, mais 90 minutos se não tivéssemos feito assim.
Inv	De facto eu fiz a sugestão à Beatriz, mas depois fiquei um pouco preocupada relativamente aos resultados dessa abordagem.
PC	É que enquanto a razão surgia assim … para quê … afinal para quê a razão entre

	2 e 3 e assim havia vários exemplos, mas depois com a escala e com a percentagem é que eles viam, acho que dava melhor para ver.
Inv	Também serviu para fazer a interligação com as ciências, com os rótulos das embalagens …
PC	Sim, com os rótulos, com os próprios alimentos, com o sector circular também, depois foi muito mais simples. Quando se passou a problemas, foi só passar à proporção e a partir daí … era só problemas, resolução de problemas..
Inv	Sim, os conceitos já estavam introduzidos.
PC	É uma coisa que eu já tenho pensado é, por exemplo, porque é que devemos estar assim a dar … mas se calhar isto não está bem pensado, a dar a adição, a subtracção, a multiplicação e a divisão cada uma separadamente e depois treino, treino e problemas e não se dá logo tudo e se fazem só problemas ou se fazem problemas envolvendo as operações todas. Podem haver além um … pronto …uma síntese daquilo que é importante saber sobre as operações, questões teóricas que há para saber sobre as operações, não é? mas fazer logo problemas que envolvam as operações todas. Porque é assim, os meninos estão ali a ver … as operações, uma ideia muito intuitiva da operação, embora sem saber bem o significado. Talvez da divisão seja mais complicado, saber o que é dividir.
Inv	Por exemplo, no que respeita aos números racionais eu concordo consigo porque o tempo inicial muito dedicado à adição acaba por tornar o assunto fastidioso, porque limita o tipo de situações que se podem propor. Depois dá-se outra operação e surge outro conjunto de situações e proponha-se no tempo um conjunto de actividades muito rotineiras.
Inv	Mas eu geralmente nos números racionais dou logo a adição e a subtracção. Depois a multiplicação já é diferente … exige …mas é o mesmo em relação aos números inteiros e decimais, eu achava que já se podia … Porque é assim, os meninos … seguindo aquelas etapas, quando chegamos à Páscoa, estamos a dar a divisão e entretanto não se resolveram problemas que envolvessem a divisão e os meninos perderam inclusivamente o algoritmo da divisão. Quer dizer têm calculadora para fazer, mas pequeninas divisões, para eles terem ideia do que é o resultado de uma divisão.
Inv	E também olharem para o problema e saberem reconhecer que operações estão ali.
PC	Eu acho que se podia dar uma volta grande ao programa, mas isto também depende … eu acho que o professor também pode fazer isso, só que nós na sala de aula, se não tivermos uma retaguarda … hãm … de alguém que nos apoie… Podem-nos dizer vocês tiveram uma formação que lhes permite fazer isso, não é? Mas temos um pouco de medo. Não somos nós que fazemos os programas e temos um pouco medo de dar a volta e receio de que as coisas não corram bem. E depois se não correm bem, como é?
Inv	Foi exactamente isso que eu senti quando dei aquela sugestão à Beatriz, mas depois ela disse-me que a Drª Fernanda tinha achado bem e aí eu fiquei um pouco mais descansada. Ainda bem.
PC	Sim, sim. Eu vou experimentar outras vezes assim, porque …
Inv	No outro núcleo de estágio, não aceitaram a minha sugestão e parece que as coisas não correram nada bem. Depois aprece que cada assunto não tem…
PC	Não tem a ver
Inv	Os meninos não conseguem fazer as ligações, não conseguem perceber a importância daquele conceito. O gostar e o saber para quê são aspectos muito

	importantes nestes níveis de escolaridade.
PC	Então acha que houve algum eco do meu apoio na prática de ensino de ambos?
Inv	Houve, eu já tive oportunidade de falar. Ainda há dias com a professora supervisora que eu acho que é isso que falta… esta ligação entre a formação e a investigação. É um trabalho de investigação. A investigação e a prática, as práticas das escolas e que eu acho importante e que a nós professores nos fazia imenso bem que tivemos mais eco da investigação.
Inv	Relativamente aos problemas e a uma delas, pode ser a Beatriz. Como é que avalia a capacidade de exploração dos problemas históricos manifestada pela Beatriz? E depois peço-lhe que se refira ao envolvimento pessoal com os problemas. [terminou aqui DW_B109.wav]
PC	Dentro da mesma escala, não é?
Inv	Sim, pode ser. Mas se pode ser explorou adequadamente, muito adequadamente, …
PC	Adequadamente. Considero que foi adequadamente.
Inv	E o envolvimento dela com os problemas?
PC	Eu acho que sim que se envolveu bastante. Ela ficou a gostar …
Inv	Acha que ela ficou mesmo a gostar?
PC	Acho que sim.
Inv	Ela propôs-lhos espontaneamente porque gostava deles ou porque eu lhos sugeria?
PC	Eu aí não sei responder. A impressão com que fiquei que terá sido porque lhe forma sugeridos, não os iria propor espontaneamente, penso seu.
Inv	Coloco-lhe a questão porque houve um aspecto na Beatriz que me surpreendeu. Na proporção eu tinha-lhe dado quatro problemas e disse «olhe Beatriz…», tínhamos discutido os 4 problemas, «não é preciso propor estes problemas todos. Nem era essa a minha intenção. Nós gostamos mais de um problema, sentimo-nos mais próximos dele, sentimos que temos maior capacidade para o explorar na aula. Portanto coloquei a Beatriz à vontade e fiquei muito surpreendida quando ela os quis propor todos. De tal maneira que numa das reuniões até lhe disse « Beatriz não proponha mais nenhum, porque é demais»
PC	Pois, vamos lá ver eu quando disse que foi por lhe terem sido sugeridos foi … penso que ela não teria a iniciativa, porque não é qualquer um que tem acesso a esse tipo de problemas. Eles não estão assim tão divulgados, eu, por exemplo, não sei onde é que iria encontrá-los. Teria que ter muito trabalho para ir à procura deles ou então era capaz de olhar para eles e nem sequer ver a beleza que está dentro daqueles problemas, porque são interessantíssimos. E …hãm … e é aí que eu digo que não foi … mas depois acabou .. em conjunto … vamos lá ver o que é que aqui há. Ah, mas este até é engraçado e dava para isto e para aquilo e então acabámos por seleccionar um conjunto deles. E havia … dava … talvez pelo facto de termos planificado daquela maneira, porque depois já dava para abordar tudo e para resolver todos. A partir do momento em que tínhamos dado a razão, a percentagem, a escala, a proporção dava para resolver todos.
Inv	Então e relativamente à Joana que pode dizer relativamente à capacidade de exploração dos problemas e ao envolvimento com os problemas?
PC	Também … satisfatório. Sim, satisfatório. Só que é assim, a JOANA … depois tem aquela vivacidade diferente, não é?
Inv	Isto é ao nível da exploração coloca-a num patamar ligeiramente acima?
PC	Sim, sim. Para mim é.

Anexo 14

Transcrições das entrevistas aos professores cooperantes (Fernanda)

Inv	E acha que aqueles problemas que foram utilizados na aula no seu conjunto ou mesmo individualmente permitem … ou que elas conseguiram que os alunos percebessem as ligações da matemática com a vida real e as ligações entre ideias matemáticas? [acabou a gravação]
Inv	Eu agora estou a lembrar-me que poderíamos até ter pedido mais … para os alunos escreverem o que pensavam sobre ... Eu às vezes costumo fazer isso, pedir que eles explicitem .. hãm …e critiquem os resultados …e falem. Talvez não tenhamos feito muito isso. Ver para além da … portanto .. da questão matemática…não … Talvez não tenha sido tão bem explorada como deveria ou como poderia. Mas também depende um bocadinho do nível cultural dos alunos e há alguns que chegavam … lá mais facilmente, viam mais isso do que outros. E da idade também deles. Era uma turma onde as crianças eram bastante novinhas e … alguns teriam mais dificuldade em… sair da representação que eles têm, ao final de contas da matemática, .. que é um pouco fazer o cálculo e não ir muito além disso. Mas eu lembro de comentários de um miúdo que dizia «Ai, aqui aprendemos tanta coisa». Eles ficavam …Notava-se que ele estava a …alargar os horizontes dele, que não estava à espera de aprender ali coisas que não tinham a ver com …directamente com a matemática.
Inv	Parece que não tinham a ver com a matemática.
PC	Exacto, exacto.
Inv	Ou seja, ele não encarava como sendo propriamente matemática.
PC	Exacto.
Inv	Só tenho mais duas questões para lhe colocar que já não estão centradas em nenhuma das estagiárias. Relativamente à história da matemática parece-lhe relevante que essa integração seja feita através de problemas históricos?
PC	Eu acho que é uma das maneiras.(…) Eu estava a ver era se haveria outra maneira.
Inv	Pode contar uma história, apresentar uma biografia ..
PC	Mas depois também … mas eu acho que esta será talvez a melhor maneira… Eu penso que sim, porque … a… contar uma bibliografia de .. mas isso também como complemento. Esta é a melhor via de mostrar como é se resolviam as questões e como é que a matemática intervinha nesses …
Inv	Como a matemática era usada para calcular impostos, como as fracções ali apareciam. Há também a possibilidade de contar a história das unidades de medida que eram diferentes das de hoje, que não eram iguais em todas as cidades, mas os problemas evidenciam esses aspectos.
PC	Acho que sim. Logo aquele da seda…
Inv	Esse problema não se aplicou. Penso que a Beatriz não o chegou a propor.
PC	Acho que sim que ainda fizemos.
Inv	O do comércio dos panos com Espanha?
PC	Sim.
Inv	Mas eu não tive a gravação desse problema.
PC	Talvez porque … mas eu acho que nós o acabámos por resolver porque o achámos engraçado.
Inv	E as crianças conseguiram resolvê-lo?
PC	Acho que sim …Eu sei que nós estivemos bastante tempo com ele e eu achei tão interessante, porque …achei que era giro … que era … porque não foi logo

	assim à primeira que eu consegui resolver..
Inv	Descobrir como é que ele tinha sempre lucro?
PC	Sim, sim. Eu acho que sim, que nós propusemos. Eu tenho que confirmar com a Beatriz, se ainda a vir. Mas acho que sim, ainda resolvemos esse.
Inv	E considera relevante para elas, alunas – futuras professoras – em prática terem feito essa exploração dos problemas na aula?
PC	Eu acho que sim, sem dúvida nenhuma.
Inv	À pouco também já se referiu a esse aspecto.
PC	O terem que experimentar … se não fosse nesta altura, depois … Porque é assim, a partir da formação inicial .. esperemos que as coisas mudem, não é? Mas depois, como é que as escolas estão organizadas? Que apoios é que dão depois a professores que entrem …na profissão? A partir daí, se os professores não encontram ou grupos, ou não entram num mestrado ou num curso especializado … a … a esse nível …a . as coisas … eu acho que cada vez menos … a tendência .. será para que as coisas não sejam rotineiras, porque as mudanças são tantas que as pessoas não podem entrar em rotinas. Se entram em rotinas desactualizam-se, não conseguem ajustar-se à realidade. Portanto, as pessoas têm necessariamente de formar-se ao longo da vida, mas poderiam nunca ter oportunidade ou, pelo menos, tão depressa de encontrar situações destas.
Inv	Coloco-lhe agora uma pergunta que não está no meu guião. Imagina-se a propor algum daqueles problemas, agora sem o estágio.
PC	Ah, sim. E acho que até vou ter curiosidade em ir à procura (risos). Por acaso nós tínhamos um colega de história que fez muita investigação. Uma pessoa de certa idade, polémico nas coisas que dizia em relação aos outros colegas. As pessoas criticavam-no bastante, mas eu acho que as pessoas …e ele até vem de vez em quanto aqui para a biblioteca da ESE ler, porque ele é uma pessoa que tem livros escritos e que trabalhou no Brasil na investigação e cá. E então quando eu tinha alguma questão destas conversava com ele, quando tinha alguma dúvida conversava com ele. Mas habitualmente não se encontram assim pessoas muito despertas para esse tipo de coisas, porque …mas com ele … e, por acaso, foi muito engraçado, porque ele num problema que era aquele da Casa da Índia e que o imposto ficava para o rei..
Inv	Sim.
PC	Ele criticou no sentido … «para o rei, não. Porque é que as pessoas … isto não era para o rei, isto era para a Casa Real. Porque a Casa Real é um conjunto de pessoas muito grande. Isto é uma deturpação, o que é que uma pessoa fica a entender ao ler este problema? Que o rei é que ficava com tudo, mas não, estes impostos eram para a Casa Real e isto servia para um conjunto muito alargado.
Inv	Mas os problemas originais diziam para sua Majestade.
PC	Pronto, mas ele foi crítico.
Inv	É um aspecto curioso.
PC	[A PC comenta o perfil do professor de história] É uma personalidade curiosa que sabe muito destas coisas. Mas não conhecia aquele imposto … como é que se chamava o imposto?
Inv	Quarto e vintena.
PC	Não conhecia nesses termos …«mas hei-de ir ver» … conhecia era a quintalada. Acho que era qualquer coisa que vinha de pimenta. Pimenta era aquele, não era?
Inv	Aquele imposto era aplicado a tudo o entrava, a todas as mercadorias.
PC	Era qualquer coisa do Brasil, eu já me lembro.

Anexo 14

Transcrições das entrevistas aos professores cooperantes (Fernanda)

Inv	Mas os livros de aritmética da época tinham todos um capítulo dedicado ao quarto e vintena que depois com o aparecimento da percentagem, no século XVII, continua a chamar-se quarto e vintena, mas resulta da aplicação directa da percentagem.
Inv	Bem era só isto que lhe queria perguntar, a não ser que queira dizer mais alguma coisa.
PC	Para mim foi extremamente gratificante ter tido essa oportunidade, porque não ia lá …não ia por mim … e ás vezes parece que as coisas estão lá tão distantes e que não têm nada a ver , não se vai tirar dalém nada, porque .. pronto, por receio de que as coisas não corram bem ou sair daquilo que fazemos habitualmente, embora tentando de alguma maneira fazer diferente … a … e tentando fazendo o melhor que se pode, não é? Mas há questões que realmente são importantes e sozinha, sem alguém que por trás que nos dê um apoio científico … a … não vamos lá, temos um certo receio.
Inv	Também para mim a sua receptividade foi muito importante [não transcrevi tudo]
PC	Nunca teria ido por aí se alguém não mos tivessem sugerido. Depois de nos apresentarem as coisas feitas até parece que nós também chegaríamos lá, mas não. Aqui houve um caminho e um percurso a que nunca chegaria .
Inv	O primeiro problema que propusemos .. foi a Joana .. já nem me recordo … era o problema dos panos, para a multiplicação eu considerei que não tinha sido uma experiência muito feliz da minha parte. Lembra-se que referi á pouco que as crianças reagiram mal àquela introdução e diziam que era história e não era matemática. mas logo de seguida quando se propôs o do quarto e da vintena as crianças também reagiram de uma outra forma, a própria Joana reagiu de outra forma, a Drª Fernanda reagiu de outra forma.. portanto tudo contribuiu para quês e ganhasse algum ânimo.
PC	Talvez tenha sido … certamente transferimos para os alunos alguma .. sei lá .. os nossos receios .. Se calhar transferimos para os alunos os nossos receios e não se foi tão espontâneo e tão natural …
Inv	Ou talvez eu não tivesse escolhido um bom problema, o melhor .. (não transcrevi mais que já não interessa para o trabalho]

Notas de campo: parece-me muito relevante que a PC tenha salientado o interesse dos pequenos alunos nos problemas.
A PC pensou antes de dar qualquer resposta, senti que estas reflectiram o seu pensamento e que a investigação a envolveu e se sentiu realmente envolvida.

Anexo 14

Transcrições das entrevistas aos professores cooperantes (Fernanda)

Entrevista realizada ao professor cooperante Manuel em 30/06/2006[2]

Inv	[Usando uma escala de insuficiente, suficiente, bom e muito bom, qual considera ser o nível de preparação científico de X? E em termos de nível de preparação didáctica para a leccionação de matemática no 2º ciclo?] Disse-me que, relativamente à AA, a nível de preparação matemática que ela se situa num nível bom, embora por vezes evidenciasse algumas dificuldades
PC	Algumas dificuldades
Inv	Em termos de conceitos
PC	Sim, sim. De qualquer maneira havia muito empenhamento, havia uma vontade de fazer … era uma miúda extremamente afectiva com os miúdos. Vamos lá ver, era de facto … vá lá aquilo que podia vir a ser uma boa professora. Se não tivesse e volto a referir isso, se não tivesse ... de facto … aham ..Agora, vá lá .. chegar agora e dizer tem de parar três anos ou quatro. Eu entendo que o sistema … as miúdas terminam o curso … um curso profissionalizante que não pode deixar de lhes dar tarefas, ou inventar formas de lhes dar ocupação, fazendo aquilo para o qual as preparou. As escolas têm como .. ou .. animadoras de actividades pós … como é que se diz aqueles .. os chamados tempos .. não é tempos livres… actividades complementares. Pronto que às tantas .. hã … podemos dizer estamos a inventar novos empregos. Não, estamos a permitir que o investimento feito nesta gente não vai por água a baixo. Vamos lá ver, não se investe milhares de euros na formação de um conjunto de jovens … que ao fim de 3 anos vão sentir-se incapazes de voltar ao sistema.
Inv	Vão sentir-se como uns estranhos.
PC	E vão sentir-se incapazes de voltar ao sistema. Vamos lá ver, depois de quatro anos de uma formação superior estes miúdos, este homens de trabalho … hã … ficam no fim de contas, ao fim de 3 anos em que não têm contacto com a escola e têm contacto com um trabalho completamente diferente do ensino, vão ficar incapazes de voltar ao ensino. Isto parece-me que tem que ser posto claramente a quem .. aos responsáveis. Eles têm que ter um papel na escola, a escola tem de lhes arranjar ou actividades de acompanhamento ou actividades de … enfim .. de …qualquer que seja … ou vá lá … ano sabático. Enfim, uma forma qualquer de … desta gente manter o contacto com a escola
Inv	E com a formação…
PC	E com a formação, porque senão perdem-se.

[2] Notas de campo: a entrevista realizou-se no gabinete da investigadora. Por problemas técnicos, a parte inicial da mesma não foi gravada. Assim, foram repetidas as questões ao professor cooperante, tendo a investigadora optado por as formular de novo, sintetizando, de seguida, a resposta obtida na parte da entrevista não gravada e pedindo ao professor cooperante que desenvolvesse a resposta ou a corrigisse. A investigadora começou por apresentar ao professor cooperante (PC) os objectivos da entrevista. Foi explicitamente referido que não se pretende fazer uma análise comparativa entre as futuras professoras, participantes no estudo, que realizaram a prática pedagógica sob a sua orientação –Inês (AA) e Mariana (CS). Foi facultada ao PC desde o início da entrevista o acesso ao guião da entrevista, pois considerou-se que tal contribuiria para criar um clima mais descontraído na entrevista.

Anexo 14

Transcrições das entrevistas aos professores cooperantes (Fernanda)

Inv	A nível da didáctica da matemática também a situou num nível de bom.
PC	Bom, sim, sim.
Inv	Relativamente à CS …
PC	A CS … bom, num nível de suficiente.
Inv	Em ambas as dimensões?
PC-M	Sim, sim. É uma miúda que não é .. incapaz, mas que ainda tem dificuldades. É a tal brincadeira, esta miúda pronto … necessitaria … se calhar … de outro ano a ver, a colaborar. Pronto mais um ano com um estágio diferente, com outras características, sem a preocupação de avaliação. Com a preocupação já de fazer .. enfim de .. se empenhar .. hãm … de ter alguém que faria uma certa tutória. Precisava de continuar a sua formação .. pronto .. trabalhando.
Inv	Considerou que ambas evoluíram ao longo do ano?
PC	Sim, sim. A evolução foi significativa..
Inv	A CS teve uma evolução sobretudo ao nível do empenhamento
PC	Do empenhamento e da forma de encarar …
inv	forma de estar na aula
PC	Da responsabilização da sua tarefa. Um facto que a prejudicava quer o grupo, quer os alunos. Enfim, isto prejudicava-a a ela, se de facto não encarasse aquilo de uma forma um bocadinho mais responsável. Ela modificou um pouco o seu comportamento.
Inv	Também disse que sentiu que ambas evidenciaram gostar de matemática e de ensinar matemática.
PC	Sim, sim, isso gostam.
Inv	Isso é uma característica comum às duas. Quanto a pontos fortes e pontos fracos na prática pedagógica referiu relativamente à AA a planificação
PC	A planificação, sim
Inv	O saber estar na aula, a afectividade com os alunos
PC	Sim..
Inv	… o não esta agarrada ao quadro, circular, acompanhá-los
PC	Não, o ver o que os alunos estavam a fazer. Procurar dar as aulas com os alunos, ouvir os alunos. Na CS isso … nem tanto, embora se tenha chamado a atenção para todas essas situações ela não conseguiu interiorizá-las tão bem. Há-de mudar
Inv	E na AA, pontos fracos … já não me recordo de quais é que destacou.
PC	Bem vamos lá ver. Pontos fracos, notoriamente fracos não tem. Tem de aperfeiçoar normalmente a linguagem científica, a questão dos conceitos, um pouquinho … mais cuidados, a forma como … enfim … pronto .. o cuidado que tem de haver nalguns registos, isto é, quando ela tem que … pronto .. se pede ao aluno para fazer um registo, tem de haver o cuidado do professor .. depois … enfim..
Inv	Ler com atenção ..
PC	Ler e elaborar …E aperfeiçoar, no fim de contas. Se há uma situação … uma coisa é a questão .. dita oralmente, outra coisa é o que fica escrito. De facto ela ainda tem de ter um bocadinho mais de cuidado naquilo que vai ficar escrito …que é o rosto … a fotografia da aula.
Inv	E relativamente à CS isso ainda é mais notório porque ela está num patamar mais baixo.
PC	Exactamente, mais baixo.
Inv	Aqui relativamente a esta questão «Como considera, no seu conjunto, a

	adequação dos problemas históricos que X explorou na sua prática de ensino em termos dos conteúdos programáticos e das competências a desenvolver nos alunos de 5º/6º?» referiu que estes se enquadraram bem em termos dos conteúdos programáticos ..,
PC	Sim, dos conteúdos … que houve uma aceitação por parte das turmas…
Inv	Dos alunos
PC 6min58s	Dos alunos, sim. Que foi importante o facto de eles terem vindo …pronto … aqui à exposição … ao vosso laboratório aqui de… não sei bem como é que lhe hei-de chamar … mas o que é certo é que havia um série número de mesas de trabalho..
Inv	Considerou esse momento como importante?
PC	Sim, é uma boa … sim, vá lá … é aquilo que se tem que fazer correctamente, porque vamos lá a ver … transfere-se no fim de contas os miúdos para o momento histórico que queremos … que eles sejam espectadores e actuantes, e actores … hãm e às tantas eles têm que mexer com as unidades da época, tem que .. pronto … o momento histórico é aquele e eles têm que resolver .. digamos um problema dessa época. Foi importante, foi marcante .. foi digamos .. na questão da aceitação, da boa aceitação que houve por parte dos miúdos[3].
Inv	E acha que também foi marcante para a capacidade de ambas explorarem os problemas históricos?
PC	Eu entendo que as mesas de actividades estavam bem cuidadas, houve o trabalho … obviamente nada é de geração espontânea … houve o trabalho preliminar muito cuidado na preparação da mesa de trabalho que de facto era notório. As miúdas estavam à vontade … as miúdas eram capazes de explicar aquilo que se pretendia e de facto os miúdos chegavam ali e conseguiam ter rentabilidade . tanto que, eles em hora e meia correram as bancas todas
Inv	Relativamente à AA e à CS considerou que a AA manifestou uma maior capacidade de explorar os problemas e também um maior envolvimento com os problemas.
PC	Sim, sim. É diferente … é a diferença entre uma aluna boa e uma aluna suficiente.
Inv	Esta questão ainda não lha tinha colocado [nota o PC teve acesso durante toda a entrevista ao guião da mesma]: « Sente que os problemas históricos explorados por X contribuíram de alguma maneira para estabelecer conexões dentro e fora da matemática?»
PC	Sim. Vamos lá ver, sendo um problema histórico, sendo um problema que faz a transferência assim digamos para um século ou dois atrás é sempre interdisciplinar, quer com a história, quer com a linguagem que se utiliza… leva-os a outro ambiente, sobretudo quando se introduz o problema como foi feito, se faz uma resenha … digamos … enfim …hãm … procurar enquadrar socialmente e culturalmente o problema no espaço, tempo, actividade, em que ele é, digamos a realidade, é importante porque cria sempre focos de interdisciplinaridade.
Inv	Também já me disse que considera relevante para a formação das futuras professoras terem participado na exploração didáctica de problemas históricos.

[3] NC: De qualquer modo é de notar que a exposição foi posterior à exploração didáctica que AA fez do problema do quarto e da vintena no âmbito do tópico «multiplicação de números racionais»

PC	Sim. É uma questão que é transversal.
Inv	Também já falámos da integração da história ser feita através dos problemas, embora tenha considerado esse aspecto como relevante também relevou que as histórias também são importantes.
PC	Sim, são importantes. São momentos de aprendizagem (?) as curiosidades matemáticas , as histórias, as biografias, os matemáticos são actividades que, se calhar, pelo facto de termos 4 horas ou 5 horas ou o que .. pronto … para lidar com os alunos é temos uma certa pressão de dar os conteúdos que nos são …
Inv	Por isso é que eu lhe coloquei a questão da relevância dos problemas históricos
PC	Estas questões … a falta de uma certa paragem, de uma certa .. tempo para respirar outras coisas e outras .. outras motivações parece-me importante. Nós estamos às vezes a descurar isso e que se às tantas parássemos um bocadinho para pensar e pronto .. de aliviar o ambiente de números e de x’s e de y’s .. às tantas era capaz de os resultados serem outros e pronto as aprendizagens serem …mais vivas e eficientes. Mas pronto temos de pensar todos.
Inv	Esta outra questão que ainda não lhe pus tem a ver com o trabalho que eu fiz com AA e a CS. Acha que o acompanhamento que lhe proporcionei teve algum eco na prática pedagógica?
PC 11min50s	Teve, teve e foi marcante. Acho que vocês como retaguarda, tu e a professora supervisora foram uma retaguarda importante e marcante na prática pedagógica. Enfim, aparentemente não foram intervenientes activos, mas na realidade foram … vá lá .. pequenos motores ou grandes motores que as obrigaram a .. digamos .. um trabalho que não é um trabalho extra, que é um trabalho integrado que, às tantas, é valorizado e lhes valorizou as aprendizagens. Portanto, vamos lá ver. E que é capaz de lhes ter dado também outra perspectiva…
Inv	Mesmo no caso da CS acha que lhe deu .. teve algum eco? Porque ela foi sempre muito receptiva.
PC	Ela era receptiva … eu acho que ela percebeu … eu nunca perceberei muito bem … nem vale a pena, se calhar, o que é que vai dentro daquela cabeça. Vamos lá ver, eu acho que ela própria ainda não encontrou o seu equilíbrio, o que é que vai fazer e como é que vai fazer. É uma miúda que procura não estar parada, ela procura sempre algumas actividades. Alguma forma de ir ganhando alguma coisa, mas acho que ela própria não sabe .. não se fixa. Se calhar é o feitio dela assim e acho que pode lá ficar qualquer coisa.
Inv 13min28s	Passemos agora para a AR e PA, disse-me que ambas estão num nível bom ou muito bom?
PC	Muito bom. Eu acho ..
Inv	Nas duas dimensões: científica e didáctica?
PC	Hãm … sim… sabes que eu consigo distinguir muito mal estas duas dimensões..
Inv	Sabe que eu estou a fazer a distinção, porque não encaro a dimensão de conhecimento matemático estritamente ligada ao 2º ciclo, é o sentir-se à vontade com a matemática…
PC	Sabes que isso.. considero que lhes falta um pouco aquilo que chamamos nós cultura matemática.. portanto … e saberes diversificados da matemática. Eu acho que …, se calhar é defeito nosso, como escola, é que às tantas … elas têm que aprender muita coisa, pronto acho que elas não têm uma cultura

	matemática geral. Em que … funciona um pouco como retaguarda do professor, quando está a querer ensinar qualquer coisa. Acho que lhes faz falta … isso se calhar vai só conseguir-se depois de muitos anos de trabalho e se elas não descurarem de facto aquilo que não podem descurar que é a sua formação contínua. Se elas … se calhar nós estamos a querer que elas tenham já os saberes acumulados ao fim de … mas elas têm agora só 23 anos.
Inv	De facto, são muito jovens.
PC	Vão agora começar a trabalhar … um fulano com 60 anos quase a querer que elas tenham já uns saberes acumulados, vastos é se calhar utópico. Pronto, elas vão chegar lá, com certeza. E eu entendo que tanto uma, como outra [AR e PA], pelo menos há um esforço da parte delas quando têm que dar qualquer coisa, e eu vi isso para os diferentes conteúdos que deram, de se prepararem, de arranjarem os materiais, de enfim estudarem qualquer coisa sobre o assunto, de modo que essas possíveis deficiências não se notassem.
Inv	Que pontos fortes e fracos detecta em cada uma delas? Fracos por exemplo na PA?
PC	Fracos na PA… vamos lá a ver … a sua dificuldade em transmitir aquilo que quer transmitir. Ela é, s vezes, um pouco confusa … na forma de se exprimir. Ainda não sabe distinguir .. digamos aquilo que …tem que dizer e que é importante para a compreensão das diferentes situações que quer explicar. Porque enfim, se calhar é a tal falta de experiência, enfim, porque há coisas que são essenciais e coisas que têm de ser os alunos a chegar lá. Essa distinção entre o que é essencial para começar a raciocinar e o que é já produto acabado, que não deve ser dado e que deve ser conseguido .. ela tem algumas dificuldades nisso. É uma miúda que prepara as coisas bem, que tem uma boa postura de aula, que tem uma boa relação com os alunos … hãm … que ouve os alunos de modo geral. Que se será .. se não enveredar por outra profissão ..porque é terrível. É uma só uma coisa para salientar, às vezes, uma frustração que um fulano tem. É uma miúda que vai fazer outra vez o 12º ano para arranjar outras cadeiras quaisquer para fazer outro curso.
Inv	Mas isso é porque não sente perspectivas de …
PC	Não, não sente perspectivas algumas. É terrível que se chegue ao fim de um curso e no dia em que se acaba já está a pensar em retomar outro curso qualquer que tenha uma maior saída profissional. Deus queira que não lhe suceda o que acontece a muita gente que é quando acabar o outro, esse já não está a dar (risos).
Inv	É verdade. Isso é um problema.
PC	Parece que estas miúdas andam sempre 5 anos atrasadas nos cursos que escolhem. Portanto a culpa se calhar é dos crescidos.
Inv	Como curiosidade digo-lhe que do grupo de alunas em prática só duas escolheram este curso em 1ª opção, todas as restantes queriam enfermagem. Não sei se elas lhe disseram..
PC	Não sei, mas, se calhar, é exactamente o resultado é dos adultos … e mais frustradas vão ficar quando ao fim de um ou dois anos e como professoras não conseguem nada.
Inv	Relativamente à PA, ela propôs uns problemas históricos agora no final e ela comentou comigo que as aulas não tinham sido muito bem sucedidas.
PC	Isto é sempre.., como te disse à bocadinho quando estávamos a falar da AA e da CS, isso é sempre a reacção inicial, porque lhes dá mais trabalho. Porque têm … ela já está mecanizada a levar o enunciado de uma situação

	problemática, escrita numa tira, dá a tira, já sabe que vai dar 5 minutos, eles vão ler a tira durante 5 minutos, começam a resolver o problema, ela vai dar a voltinha, vê como é que está a fazer e não sei quantos e não sei quê .. e é sempre assim. Quando tu lhe vais propor um problema em que ela tem que ter algum cuidado com a linguagem, porque é nova para os alunos, tem de fazer a introdução do problema .. para não ser … à bruta. É sempre uma situação nova. Quando fazes isso a .. um mês ou dois de acabar o estágio, ela sente um pouco que lhe puseram à frente um banco de areia movediça e ela pode-se afundar quando até agora estava tudo tão certinho. É a reacção normal, isso não passa digamos … é a mesma história em qualquer profissão, alguém dá-lhe uma situação nova depois de uma pessoa estar habituado a fazer 50 vezes, já estar mecanizado na …
Inv	Foi alguma insegurança …
PC	Insegurança e é digamos… agora vão-me avaliar por esta coisa nova que eu nunca vi e não sei quantos e isto estava-me a correr tão bem e vai agora aqui aparecer uma coisa nova.
Inv	Então e agora, relativamente à AR que pontos fortes e fracos destaca na sua prática pedagógica?
PC	A AR … elas não são muito diferentes, a AR ainda é mais afectiva do que a PA, depois é uma miúda que durante a aula não altera o tom de voz e não é monótona. Como é carinhosa, como é com os miúdos, o ambiente da aula é agradável, é extremamente agradável e eficiente. Porque há aquelas coisas em que dizemos esta *fulana* é uma mosca morta que aqui está, não ela é eficiente, mantendo o ambiente da aula calmo, os miúdos estão a trabalhar .. hãm … e as coisas funcionam sem stresses. Ela, pronto tem alguns, mas não os transmite à turma. A turma tem um ambiente de trabalho sem estar sempre em brasa, como se costuma dizer. Tem um ritmo bom. Também tem algumas dificuldades na forma dos registos. Aí, em todas elas, o que fica registado como conclusão, como súmula do que está a fazer, como resultado .. que se chegou. Às vezes, esses registos não estão ainda suficientemente bem elaborados. Mas pronto vão melhorar, espero eu (risos).
Inv	Para terminar podemos falar um pouco da DB, embora eu tenha trabalhado pouco com ela.
PC	A DB eu tenho … se calhar a culpa é minha, se calhar a culpa é da turma em que ela está inserida, ou a culpa é do grupo onde ela está inserida. Eu não sei, mas a Débora sendo uma miúda esperta, interessada, não teve resultados por aí além. Primeiro pela forma como estavam a trabalhar, não percebo.
Inv	Um grupo de 3 … provavelmente ..
PC	Um grupo de três em que duas faziam panelinha … em que duas ainda conseguiam trabalhar em grupo, mas hostilizavam uma terceira. O ambiente de trabalho não era bom. As passagens de uns conteúdos para outros não eram bons, elas próprias, se estava uma a dar aulas, não estavam a ver a aula.
Inv	As outras desligavam, não é?
PC	Desligavam, isso é terrível. E isso eu chamei-lhes a atenção no final do ano. Estava uma a dar aulas e elas estavam a quilómetros de distância da aula, portanto era impossível depois ter-se sequências. Acho que elas chegavam quando estavam a preparar a sua aula, nem sabiam o que tinha sido tratado antes e isso teve resultados terríveis. Vamos lá a ver, a DB, provavelmente, com outros colegas a trabalhar .. hãm… teria tido outros resultados. Assim, de facto, não passou de uma aluna pouco mais do que suficiente, porque de

	facto temos de ser objectivos quando avaliamos e se os resultados foram maus foi porque não houve cuidado nestas questões… Podemos dizer que são questões para a qual não tiveram culpa directa, mas o dar aulas … ninguém escolhe a turma, ninguém escolhe os alunos com quem tem de trabalhar, ninguém escolhe os colegas com quem vai trabalhar. É obrigação darmo-nos bem … eu não tenho que ser amigo do professor que está a dar comigo a aula, tenho é que respeitá-lo e colaborar com ele, para que os resultados das aprendizagens sejam os correctos. Não se pretende que ninguém seja amigo de ninguém. Se for amigo tudo bem.
Inv	Melhor.
PC	Eu não tenho de ser amigo de ninguém, tenho de encarar como uma equipa que tem objectivos a atingir e que a forma como se relaciona não tem nada a ver uma coisa com a outra. Tem que ver que cada um tem de colaborar para que esses objectivos sejam atingidos e de facto aquelas três meninas não colaboraram da melhor forma na aprendizagem que se propuseram realizar na turma e é evidente que os resultados que têm não são bons.
Inv	Mas aquele grupo formou-se de uma forma um pouco estranha, como sabe.
PC	Sim, mas acima de tudo a responsabilidade é delas, porque nem sempre as condições são as óptimas e condições não óptimas tem de se realizar um trabalho capaz.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

Transcrição de parte da aula de Joana_ Quarto e Vintena,
26/01/2006

	Joana	Início [dirige-se a alguns alunos, orientando os locais onde se devem sentar, uma aluna transmite um recado do prof de música, é dada a indicação explicita a alunos no sentido de tirarem o boné]
3m10s	Joana	Vou-vos projectar aqui uma situação muito interessante e vamos todas, vamos todos…
	al	Todas não, stora… eu não sou uma menina.
	Joana	Se estiveres a ouvir já reparaste que eu corrigi…
	al	Deve ser muito interessante… [voz de fundo]
		Stora quando é que a gente recebe os testes, a stora disse que era agora…
		Bom, eu já vou entregar os testes.
	als	Oh stora aqui está cá escrito Melina ou Melissa?
	Joana	Melissa. Oh, Rui essa parte já passou. Tomem lá atenção, vamos todos resolver, vou-vos mostrar aqui uma situação muito interessante e vamos todos estar com atenção! Sim? (comentário:a sala está às escuras e Joana projecta uma apresentação em Power Point)
	al	Stora nós não vemos nada.
4m03s	Joana	Ana Paula, lê lá o que está!
	al	Lisboa no século XVI [parece ser a voz de uma aluno, não se percebe a leitura da aluna]
		Oh, meninos! […] Francisco já tiraste o boné? Então lê lá?
	Al-Fr	No século XVI Lisboa era uma das maiores cidades…
	Joana	Comerciais …
	al	do mundo…
	Joana	Do mundo… continua Francisco!
	Al-Fr	Continuamente …
	Joana	Continuamente
	al	Cruza , cruzavam…
	Joana	o estuário do Tejo … Lidia, continua lá!
	Al-	O estuário do Tejo naus carregadas de especiarias e outras mercadorias que os portugueses traziam do Oriente
	Joana	Vocês já falaram em História sobre os descobrimentos, não já? E sobre as naus que vinham carregadas do Oriente. Então se calhar esta imagem diz-vos alguma coisa, não diz?
	al	Diz. Estão aí os barquinhos.
	Joana	E esses barquinhos eram chamados como, Zé Paulo?
	al	Naus. Barca [diz outro aluno]
	Joana	Eram as naus. Temos aqui Lisboa no século XVI e podemos observar aqui as naus que chegavam ao porto de Lisboa carregadas de especiarias vindas do oriente. Vocês falaram isso no 1º período. (comentário: Joana aponta para as imagens projectadas)
	al	[não se percebe o que diz a aluna]
5m54s	Joana	Diz?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	al	O dois é o Terreiro do Paço, não é.
	Joana	O dois é o Terreiro do Paço, sim. E temos aqui o 3, que está aqui…
	al	O um é … [comentário: não se percebe bem, porém os alunos parecem indentificar as imagens]
	Joana	É uma casa muito conhecida. Diz lá Inês!
	al	A casa da Índia [creio não ser a Inês a responder]
	Joana	A casa da Índia. Muito bem…. E o que é que acontecia na Casa da Índia, ainda se lembram? [comentário: ruído de fundo sobre o assunto]. Diz, Filipa! Olhem, quero ouvir a Filipa que eu não ouço.
	al	É onde …situavam os produtos de outros países
6m30s	Joana	Sim, que era do Oriente. As especiarias vindas do Oriente. Já vamos ver depois. Aqui temos, podemos observar aqui nesta imagem, aqui, a Casa da Índia. Cá estão as naus que vinham do Oriente e sempre que, cada vez que vinham as naus [alguém refere o paço da ribeira, penso que terá sido a prof. Cooperante]. O Paço da Ribeira, aqui, e sempre que vinham as naus havia sempre muita gente à espera, não era? [...] Eram sempre recebidas por muita gente, por muitas pessoas [ouvem-se alguns comentários da PC. A Ribeira das Naus é aqui. […] Tatiana, lê lá!
	Al-Ta	Ora, quando os barcos atracavam no porto de Lisboa toda a carga era controlada na Casa da Índia, local onde também se procedia ao pagamento dos direitos sobre a mercadoria.
7m30s	Joana	Isto é para vocês verem que a matemática se aplica em todo o lado. [alguns risos]. Sim? Então isso era o que estávamos a dizer, que na casa da índia era o local onde também se procedia ao pagamento dos direitos sobre a mercadoria. Temos aqui uma imagem que retrata bem a quantidade de pessoas que esperavam pelas naus […] E temos aqui, temos aqui, o quê? o que podemos abordar aqui? […]
		animais...
	Joana	O que é que vemos aqui? [várias vozes sobrepõem-se]
	Joana	Uma balança, muito bem, porque as mercadorias quando chegavam eram pesadas, sim? E aqui podemos observar as naus quando chegavam. Tomem atenção! [vozes sobrepostas]. Lê lá Micael!
	al	A mercadoria era pesada em grandes balanças e uma parte dessa carga era imediatamente retirada para o rei.
	Joana	Então as mercadorias eram pesadas naquelas balanças e numas ainda maiores que eu vou-vos mostrar e parte dessa carga era para o rei. Diz lá!
	als	Era um quinto. [outro aluno também diz:] era a quinta parte era para o rei. Era para o rei.
	Joana	Sim, mas neste caso aqui temos outra situação. Lá está a imagem, as balanças que pesavam as mercadorias que vinham nas naus. Depois parte dessas mercadorias era para o rei. Aqui temos uma balança que esteve na casa da índia. Reparem como ela é grande! Vem desde o tecto e há aqui uma varanda onde as pessoas circulam, por isso imaginem o tamanho desta balança. É maior do que esta sala, muito maior. [comentário: os alunos referem que na imagem é visível a presença de um dos elementos do grupo de estágio] Sim, é a professora Daniela. Nós pudemos ver esta balança … [continua o ruído e de fundo e os comentários

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		--9+56] Não só lá está a professora Daniela. Reparem que esta balança é tão grande que ela vem desde o tecto e ainda há ali uma varanda, sim? […] Que era para pesar as especiarias que vinham do Oriente, sim? Esta balança aqui encontrava-se mesmo na Casa da Índia.
	al	Mas a balança não está a bater no chão.
	al	E onde é que está essa balança, stora?
	Joana	A balança não está a bater no chão, porquê?
	Al	Para podermos pesar. Para os pratos não baterem no chão.
	Joana	Para se poder pesar. Muito bem. Aqui ela já não pesa, está no museu, aqui só está exposta. Está no museu de metrologia. Atenção que não é meteorologia. Meteorologia é do tempo. E metrologia vem do quê? Da palavra?
	al	Metro.
	Joana	Metro.
	al	E onde é que isso fica?
	Joana	Fica em Lisboa. Está no Instituto Português da Qualidade.
	al	Aquilo é giro, stora?
	Joana	É muito bonito. Quando vocês puderem vão lá.
	al	A stora já lá foi?
10m52s	Joana	Já, fui com a professora Daniela. […mais comentários dos alunos sobre a presença de pessoas na fotografia; um aluno diz: a stora estava a tirar a foto].
	Joana	Temos aqui um pormenor daquela balança que vocês ali viram que num dos braços tem escrito aqui: Real Casa da Índia [coro em simultâneo com AP]
	al	Está com um z [refere-se à grafia da palavra Caza] [risos]
	Joana	Sim, porque antigamente era a forma como eles escreviam [comentários, ouve-se repetir várias vezes ca<u>z</u>a]. Ricardo lê lá!
	Al-Ri	Parte dessa mercadoria era retirada para o Rei do seguinte modo …
	Joana	Então as mercadorias eram pesadas e retiradas para o rei do seguinte modo. João!
11m37s	Al-Jo	Começava-se por se retirar um quarto da carga e da carga restante eram retirados, de seguida, um vinte avos.
	Joana	Então como é que se retirava para o rei? Diz lá! O que é que tu entendes dali?
11m51s	al	Primeiro retirava-se um quarto …
	Joana	Sim.
	al	E do restante eram tirados um vinte avos.
	Joana	Muito bem. Então da carga que vinha era pesada e depois dessa carga era retirado um quarto e ainda daquilo que restava ainda lhe era retirado mais um vinte avos. Muito bem, João. … Melissa.
	Al-Ml	Para ficares a conhecer um pouco melhor como este imposto foi importante …
	Joana	Como este imposto foi importante
	Al-Ml	propo…
	Joana	propomos-te
	al	que resolvas a seguinte situação proposta por

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	al	Já vamos responder [comentário de outra aluna].
	Joana	um mercador
	Al-Ml	do século XVI.
12m45s	Joana	Do século XVI, sim? Então agora vamos resolver um problemazinho. Está aqui o problema …
	al	Stora o que é que está lá escrito? [comentário: está projectada uma imagem da página do livro de Gaspar Nunolas]
12m54s	Joana	Pois, porque isto estava escrito numa linguagem que hoje já caiu em desuso, que não é a nossa linguagem actual. E esta página aqui foi retirada de um livro que um senhor, … esta página existiu mesmo, sim? Está num livro, mas foi fotografada de uma página real [comentários sobrepostos] Até está carimbada, sim senhor. E aqui eram os cálculos que eles efectuavam para resolver o problema …
	als	Grandes cálculos. Stora, nós vamos aprender essas contas?
	Joana	Sim, vamos aprender, mas na nossa linguagem [Comentário: fazem-se alguns comentários sobre os cálculos visíveis na imagem: 16 menos 14, 64].
	Joana	Vamos aprender na nossa linguagem. Como vocês não conseguem perceber nada do que ali está que é muito complexo, nós traduzimos para português. Para o nosso português actual, sim? Está aqui. E agora vão vocês resolver [comentário: muitos comentários, embora não se perceba o que dizem, os alunos aprecem interessados. Joana acende a luz]
	Joana	Olhem a pessoa em causa percebeu bem que era o nome dela [comentário: Joana entra em diálogo com alguns alunos a propósito dos nomes integrantes de cada grupo e que estavam escritos no quadro]. Tu tens de perceber onde está o teu nome.
14m28s	Joana	Oh, Rui vai-te lá sentar [comentário: Joana distribui uma folha a cada aluno com o problema, continua o ruído de fundo].
14m52s	Joana	Já todos têm, não já?
15m15s	als	Oh stora está aqui quintais. Cinquenta quintais
15m20s	Joana	Sim, os quintais eram aproximadamente 58 kg. Sim?
	Joana	Guarda lá isso. Isso é para o intervalo, não é para aqui.
15m40s	Joana	Vá, tentem lá resolver. (…) Oh, Zé Paulo. Tu não tens mesa? Não tens grupo?
	al	Tenho, stora.
	Joana	Então que estás aí a fazer? Aí não consegues escrever.
	al	Eu não estou a escrever, stora. Estou a ler.
	al	Queres trocar comigo, Zé?
16m04s	al	Oh, stora. Stora. Posso ir para aquele grupo e ele vem para este?
	Joana	Não. Estás muito bem onde estás.
	al	Não estou nada.
	Joana	Quem é que me chamou?
	al	Eu.
	al	A Inês.
	al	Oh, stora eu não estou a perceber o problema.
	Joana	Não estás a perceber o problema?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	al	Nepias. Nada.
	Joana	Quem é que é capaz de explicar o problema? Levanta o bracinho. (…) Levanta o braço quem é capaz de explicar o problema.
	al	Eu ainda nem o li. [não se percebe]
16m22s	Joana	Ninguém é capaz de explicar o problema?
	al	Não, stora.
16m34s	al	Eu sou, stora. [não se percebe]
	als	[não se percebe] eu ainda nem li, stora.
	Joana	Então leiam lá primeiro bem o problema.
	al	Stora, posso ler alto?
	Joana	A Tatiana vai ler alto. Oh, Rui toma lá atenção. A Tatiana vai ler alto. [ouvem-se alunos a dizer coisas descontextualizadas] A Tatiana vai ler o problema em voz alta e depois vai tentá-lo explicar. […]
	Joana	Tatiana. Lê lá!
	al	O quarto e vintena. O problema que te propomos
	Joana	Essa parte já tínhamos visto, envolve o cálculo do quarto e vintena de um carregamento de pimenta. Vamos lá ver agora o processo do cálculo do quarto e vintena.
17m21s	al	Um quarto da mercadoria era imediatamente para sua alteza, o rei.
	Joana	Então, foi o que, à bocadinho, o João disse. O que é que ele disse? […] O que é que quer dizer um quarto da mercadoria era imediatamente para sua alteza, o rei?
17m40s	al	Era para o rei.
	Joana	Então da mercadoria que vinha …
	als	Era um quarto para o rei [responde mais do que um aluno]
	Joana	Era para o rei. Então o que diz a seguir?
	al	Da mercadoria restante era retirado de seguida um vinte avos novamente para sua alteza o rei.
	Joana	Então do que vinha era retirado novamente… do que vinha era retirado um quarto e depois do que restava retiravam …
	al	Um vinte avos.
	Joana	Um vinte avos. Muito bem. Então vamos lá ler o problema que está aí. Tatiana.
18m13s	al	Eu carreguei na Índia 64 quintais de pimenta e quero pagar deles o quarto e a vintena na Casa da Índia. Quero saber o que hei-de pagar a Sua Alteza e o que me resta.
	Joana	[responde a um comentário de um aluno] Porque é que se chama o quarto e a vintena? Quem é que me sabe explicar?
	al	A vintena é um sobre vinte.
	Joana	É um vinte avos, sim. E porque é que diziam que era o quarto?
	al	Um quarto.
18m50s	Joana	Porque era um quarto para o rei e a vintena porque era um vinte avos também novamente para o rei. Por isso é que chamavam o quarto e a vintena. Sim? Então, Tatiana, quanto é que traziam de pimenta da índia?
	al	Pimenta? Traziam 64 quintais.
	Joana	Então, traziam 64 quintais. Então depois daí tinham que pagar
		[…]

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	pagar o quarto e a vintena. Perceberam o que é para fazer? Agora quero saber quanto é que tinham de pagar ao rei e depois ver quanto é que me sobrava […] de mercadoria para o mercador.
19m38s	Joana	Quem é que entendeu o problema? [AP repete a pergunta] Quem é que entendeu o problema?
	als	Eu não (mais o que um aluno) Oh, stora ainda não percebi.
	Joana	Filipa! Filipa! Vai ao quadro e coloca ali os dados do problema. [há um aluna que se queixa de que uma colega lhe tirou a carteira]
	Joana	Os meninos não estão com atenção e depois não sabem resolver o problema. [troca de impressões sobre a carteira, AP acabas por ficar na carteira informando que a devolve no final da aula]
	Joana	Então Filipa diz. Oh meninos! Vocês não sabem resolver o problema, têm de estar com atenção para ver se conseguimos resolver.
	al	Oh, professora […não se percebe] 64 quintais.
	Joana	Diz.
	al	Ponho 64 quintais.
	Joana	Escreves além 64 quintais que era a mercadoria.
	Joana	Então quais eram os dados? [penso que se dirige à turma]. Espera aí, já vamos ver. Não é assim, mas já vamos ver. Então, quanto é que trazíamos de mercadoria da índia? De pimenta? Quanto é que era de mercadoria de pimenta?
21m16s	Joana	Oh Tatiana toma atenção e vira-te para o quadro, senão não consegues ver. Zé Paulo! Tomem lá atenção. Além 64 quintais era a quantidade de pimenta … e depois desses 64 quintais, um quarto é do quê?
	Joana	Um quarto da mercadoria [não estou certa se houve resposta do aluno]. Então pões lá um quarto de 64.
	al	Oh stora, este não para de dizer asneiras.
21m51s	Joana	Oh, Francisco [ruído de fundo].
	Joana	Então um quarto de 64 quintais era o que dávamos logo de imediato, a quem?
	al	Ao rei
	Joana	Dávamos logo de imediato ao rei. E depois do que nos sobrava ainda retirávamos um vinte avos novamente para o rei, não é?
	al	Oh, stora.
	Joana	Carolina, estás a entender? […] Lidia, diz.
	al	Posso ir afiar o lápis?
	Joana	Podes.
	al	Zé Paulo, estás a entender o que além está?
	al	O quê?
	Joana	Vocês não estão com atenção
	al	Eu estou com atenção no meu problema.
	Joana	Mas tomem lá atenção além. E agora Filipa, como é que é? Um vinte avos do quê? […]

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Do que restava. Então pões um vinte avos do restante. [ruído de fundo, alguns risos] …
		Um vinte avos do restante. Então Filipa, como é que nós sabemos o que demos primeiro ao rei? Então dos 64 quintais, quanto é que lhe demos? Temos de ir ver isso.
	A	Demos um quarto de 64.
	Joana	Sim e então quanto é que é um quarto de 64? [comentário: Joana dirige-se à aluna que está no quadro, esta responde mas não se percebe a resposta] Lidia, ajuda lá.
	al	Temos de fazer um quarto vezes 64.
23m37s	Joana	Um quarto vezes 64, muito bem. […] que é para …?
	Al	Saber quanto se dá ao rei.
23m57s	Joana	E quanto é que dá?
	als	Stora, já fiz.
	Joana	Isso não é bem assim […] Mas tens de calcular primeiro o que deste ao rei e depois o que sobra para ti que é para conseguires ver. Para calculares a expressão, para fazeres a expressão [diálogo com um aluno]
	Joana	Então isso dá 64 sobre 4 e isso é igual a 16. Então e o que é aquele 16 além, Melita?
	al	São 16 €.
24m41s	Joana	O que são aqueles 16? Melita o que são aqueles 16? Olha para lá. […]
	Joana	Dinheiro? Nós não estamos a falar de dinheiro. […] Melita, não estamos a falar de dinheiro. Não estás atenta. Carina, o que é aquele 16 além?
	al	É …
	Joana	Filipa?
	al	O que deram ao rei.
	Joana	É o que deram ao rei, percebeste? Então, isso foi o que demos ao rei. Sim? Então quanto é que… demos 16 quintais de pimenta ao rei […]
	Joana	Não, ainda queremos saber … mas desses 16 … temos de saber agora com quanto é que ficámos. Tínhamos 64 quintais e demos ao rei 16, com quanto é que ficámos? [ruído de fundo] 64
25m54s	Joana	O que é que temos de fazer para saber quanto é que nos restou?
	al	Menos […]
	Joana	64 menos 16. Que é para sabermos o que nos resta. Então e agora? Isso é igual a 48.
26m22s	Joana	Tatiana não estás a acompanhar. […] Isso é no intervalo
	Joana	Então, os 48 é o quê? Diz lá, Lidia […].È o restante e então desse restante o que é que nós temos que fazer?
		[muito ruído de fundo, com alunos a falar de outras coisas]
	Joana	Temos que tirar ainda um vinte avos, sim. Que também era, para quem? Para o … rei [ruído de fundo]
	Joana	Atenção que não é um vinte avos vezes 64. Olha lá o que além está! […]

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Filipa, então temos que tirar um vinte avos de 48 que ainda nos resta [ruído de fundo com conversas paralelas]. Isso dá? De, de… quando nós falamos, nós lá em cima não tirámos um quarto de 64? Aí agora temos de tirar um vinte avos do que nos restou, de 48. Isso. Muito bem, é vezes, multiplicar. Isso é igual a 12, ainda podes tornar numa fracção irredutível, […] doze quintos. (comentário: Joana fala com a aluna que está no quadro)
	al	É equivalente?
28m23s	Joana	È, mas irredutível é que não pode simplificar mais. E isso corresponde a dois vírgula quatro [ouve-se a PC a esclarecer ou a chamar a atenção? Também se ouve um aluno a queixar-se de um colega].
28m38s	Joana	Então, agora queremos saber quanto é que eu dei ao rei.
	al	16.
	Joana	Sim, 16 do um quarto e…?
	al	e 12 quintos [não se percebe completamente o que diz o aluno]
	Joana	De um … de…
	Joana	Sim, então quanto é que eu dei ao rei? Temos de fazer o quê? [a voz de um aluno que se queixa de um colega sobrepõe-se à dos outros] Os 12 quintos é a mesma coisa que ter lá 2,4 que é para simplificarmos um pouco os cálculos. Então quanto é que eu dei ao rei, como é que nós sabemos?
	Joana	[em resposta a uma questão de um aluno que parece querer saber como apareceu 12/5] porque fomos tornar o 48 vinte avos numa fracção irredutível. Sim? Então como é que nós sabemos a quantidade que demos ao rei?
	al	É 48 menos…
	Joana	Menos?
	als	Mais.
	Joana	Mais. Mais 16, porque nós demos um quarto da mercadoria que veio e do que restou ainda lhe demos mais um vinte avos. (comentário: Joana fala com a aluna que está no quadro) Então era ..
		[um aluno diz qualquer coisa não perceptível].
	Joana	Sim, mas para simplificarmos os cálculos sabemos que os 12/5 é igual a ..
	al	2,4.
	Joana	2,4. Então …?
	al	2,4 mais 16
	Joana	2,4 mais 16.
30m06s	Joana	Isso dá?
30m14	al	18,4.
	Joana	18,4. Muito bem. Então quanto é que demos ao rei?
		[não se percebe a resposta]
	Joana	Então podes aí já elaborar uma resposta para uma das perguntas que temos do problema. […] Demos ao rei […]
	al	Eh, olha aí …1 vinte avos do restante e depois está 64 quintais.
	Joana	Isso era o quê? A quantidade de mercadoria que tínhamos no início, de

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		pimenta.
	al	De pimenta?
	Joana	Então não estava aí a dizer que era um carregamento de pimenta? […]
	al	Eu não lhe dava nada ao rei.
	al	Eras preso.
	al	Mas porque é que era preso, sabes lá!
	Joana	Todos entenderam porque é que era 18,4? [comentário: A PC sugere a organização do quadro].
	Joana	Sim. [comentário: AP dirige-se à aluna que está no quadro e pede-lhe que reorganize o que tem no quadro, apontando para o lugar onde esta deve escrever] Vê lá se consegues 2, 4 mais 16.
32m12s	Joana	Agora pede-nos para traduzir por uma expressão numérica o processo de cálculo do imposto pago ao rei. Como é que nós traduzimos por uma expressão numérica? Podes-te sentar. […]
	Joana	Então João. Filipa, podes-te sentar. Vai outra pessoa. Inês. Ainda falta outra parte, porque isto foi o que nós pagámos ao rei, não foi? Isto foi o que nós demos ao rei. E então quanto é que ficou para nós? Falta o que nos restou.
32m51s	al	18,4 menos um.
	Joana	Menos 1? Porquê menos 1? […] Inês vem lá ao quadro. [há sempre alunos a fazer queixas uns dos outros]
	al	Stora, a Carina fez esta operação 18,4 menos 64.
	al	A stora traz ali cábulas.
	Joana	Não são cábulas. É o mesmo problema que tu tens.
	Joana	Não, isto.
	al	Isto. São cábulas.
	Joana	Não é.
	al	São cábulas.
	Joana	Não são cábulas. Olha lá.
	al	Stora, stora ela tinha dito que era 64 menos 18,4.
	Joana	Não ouvi. Não ouvi, porquê? Porque está tudo a falar. Então se à quantidade que nós trouxemos da índia lhe retirarmos o que nós demos ao rei, ficamos com o quê? Zé Paulo? Zé Paulo? Não estás na aula.
	al	Estava a pensar na morte da bezerra (risos).
	Joana	Ana. Ana. Lidia. Prestem lá atenção, se a 64 tirarmos o que demos ao rei, o que é que nós, como o que é que nós ficamos, o que é que nós obtemos?
		[…]
		Então dá-nos o valor com que nós ficámos de mercadoria. Sim? Então da mercadoria que trouxemos ficámos com quanto?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Com 45,6 quintais de pimenta. Podes escrever ali por baixo. Se calhar os teus colegas aí não vêem escreve ali em frente. [mais queixas dos colegas]
34m58s	Joana	Oh, Rui! Vá lá caladinho. […] Oh, Francisco. (risos e vozes) Está lá caladinho, Francisco. Estás a ouvir, Francisco. Francisco, eu estou a falar contigo. Queres ir para a rua? Então está lá caladinho. […] Quintais de pimenta.
	al	Oh stora espere aí, ainda não apague. (Comentário: Joana escreve no qaudro)
	Joana	Dinheiro? Mas nós não temos dinheiro.
	al	temos quintais.
	Joana	temos quintais. Mas temos quanto?... 64 quintais [AP está a dialogar com a aluna do quadro?] Então agora temos de encontrar. Oh, Ricardo e Rui. Rui. [a PC intervém: eu acho que têm de ir os dois]
	al	Esta bem stora, para onde é que nós temos de ir.
	Joana	Ricardo vê lá se é preciso dizer para onde é.
	al	Diga, stora.
	Joana	Porquê, queres ir para lá? Queres ir para lá? Então estás calado. […] Bom. Ana vai lá ao quadro e vamos calcular uma expressão que nos traduza. Oh, meninos tomem lá atenção que eu assim não consigo falar. Estás a ouvir, Francisco?
	al	Stora, posso apagar os dados?
37m07s	Joana	Sim, podes apagar os dados.
	al	E agora, stora?
	Joana	Espera João. Isso não está correcto. Já vais ver porquê. […] Não está correcto esse cálculo. Bom então nós vamos criar uma expressão numérica… Oh, Micael quantas vezes é preciso te chamar a atenção? […]
	al	Estava aqui no chão, stora.
	Joana	Dá cá isso! Estava no chão, guardavas, não é? Não era mostrar aos teus colegas todos. Ninguém lhe interessa isto.
		Eu sei de quem era.
	Joana	Pronto acabou a conversa. Vamos tentar agora arranjar uma expressão numérica…shiu! .. do processo do cálculo do imposto pago ao rei. Está bem? Vamos tentar arranjar uma expressão numérica.
	al	64 menos
	Joana	Calma, Inês
	al	1 quarto vezes 64, vezes ã …um vinte vezes 64.
38m06s	Joana	Atenção, espera. Se nós olharmos isto aqui traduz o quê? Tomem lá atenção para arranjarmos uma expressão numérica. Isto que aqui está traduz o quê? [a PC chama a atenção a um aluno] Este cálculo que aqui está traduz o quê? […] Oh, Ricardo.
	Joana	Francisco, este cálculo aqui traduz o quê?
	al	Sei lá.
		Porquê? Porque não estás atento.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	al	Pois não.
	Joana	Inês, traduz o quê?
	al	O que foi dado ao rei.
	Joana	Traduz o imposto que foi pago ao rei. Muito bem. Então nós queremos arranjar uma expressão numérica para demonstrar o imposto que foi pago ao rei. Como é que nós conseguimos, partindo daqui, do último cálculo feito, conseguimos arranjar uma expressão numérica? Se olharmos para este cálculo aqui. Diz lá Inês! (comentário: Joana está junto ao quadro)
	AL	Um quarto vezes 64…
	Joana	Um quarto vezes 64…
	al	Mais um vinte avos vezes 64
	Joana	E porque é que pões um quarto vezes 64?
	al	[não é perceptível]
	Joana	Porque é que pões ¼ vezes 64? Inês, vai lá ao quadro e ajuda a Ana. [comentário: ficam ambas as alunas no quadro. Nova intervenção da PC relativa ao ruído permanente de fundo]
	Joana	Ricardo, não te esqueças que isso tudo conta para a avaliação. Não é só os testes. É bom saber isso.
	Joana	Sim, mas aí ainda falta mais qualquer coisa. Inês, explica-nos lá como é que tu chegaste aí? Um quarto vezes 64 mais um vinte avos vezes 64.
	al	Aqui, um quarto vezes 64
	Joana	Tomem atenção!
	al	Foi o que se deu ao rei.
	Joana	Sim e foi o que se deu ao rei, quando? [mais comentários despropositados de alguns alunos a que se seguiu nova intervenção da PC]
40m35s	Joana	Se olharmos para o último cálculo que efectuámos, podemos chegar à nossa expressão. Então se verificarmos, olhando aqui para este cálculo. Inês de onde vem o nosso um quarto vezes 64? Representa o quê? Um quarto vezes 64, representa o quê?
	al	[Não perceptível]
	Joana	Sim e isso vem de … de qual, daqui deste cálculo, como é que nós encontrámos … como é que nós encontrámos aqui 2,4?
	al	Através de um quarto vezes 64.
	Joana	Um quarto vezes 64, mas atenção encontrámos foi aqui 1 vinte avos vezes 48. E de onde é que vem 1 vinte avos vezes, de onde é que vem o 48? (comentário: Joana está junto ao quadro e aponta para os vários passos da resolução que estão registados do lado esquerdo do quadro)
	al	De 64 quintais menos o que se dá ao rei.
41m31s	Joana	E esse menos que se dá ao rei de onde é que vem? Este 16 aqui vem do…
	al	Um quarto vezes 64.
41m37s	Joana	Lá está, vem do um quarto vezes 64. Então fizemos um quarto vezes 64 para obtermos, porque foi o que nos … deu o valor não é? deste aqui, e depois fizeste aí somar mais um vinte avos vezes 64…aí depois é que falta, Inês, porque nós olhando para a última expressão verificamos que o 16 veio de um quarto vezes 64, não é? (comentário: Joana está junto ao quadro e há troca de impressões com as duas alunas que estão no quadro)

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Tínhamos visto aqui que 16 era um quarto vezes 64, mas depois falta-nos saber, temos de identificar de onde é que vem o 2,4… um vinte avos vezes 48 … um vinte avos vezes 48 vem 2,4, então de onde é que vem o 48? [ouvem-se conversas dispersas, provavelmente sobre outros assuntos]
	al	Dos 64 menos o imposto [não se percebe bem a resposta da aluna]
	Joana	Menos o imposto, menos o quê? Menos o que já tínhamos dado. Então o que já tínhamos dado vinha dali de um quarto vezes 64. Então se nós… [parece haver uma interpelação de alguém] sim? Se colocarmos parêntesis. Sim? [dirigido a um aluno]
	als	[Ouvem-se algumas intervenções de mais do que um aluno, sobressai a palavra parêntesis]
	Joana	Colocar os parêntesis onde? João, diz lá,! Ana, podes-te sentar. (comentário: a launo envolve toda a expressão com 2 grandes parêntesis)
	als	[não perceptível]
43m27s	Joana	Não é bem assim. Se nós fizermos … se começarmos por dizer de onde é que vem o nosso 16 e o nosso 48, verificamos que...
43m35s	al	O 48 vem da soma destes todos.
	Joana	Até aqui está correcto, só que depois aqui temos de explicar de onde é que vem o outro.. (comentário: Joana apaga os parêntesis feitos por João)
	al	64, entre parêntesis … um quarto … [não se percebe] pode ser assim, não pode?
43m52s	Joana	Então verificámos que um vinte avos eram retirados, do quê? Da mercadoria que ainda nos sobrava. Então como é que representamos a mercadoria que nos sobrava?... Colocamos um vinte avos vezes a mercadoria que nos sobrava. Então vezes… não… abrimos parêntesis… não, à frente…
	al	Ai, estou cheia de frio, stora.
	al	Queres a minha encharpe para ficares mais quente?
	Joana	E depois temos de ir ver o quê? … Como é que nós obtivemos os 48, aqui?
	al	64 menos 16.
44m34s	Joana	E então como é que nós obtivemos aqui o 16?
	al	[não se percebe a resposta]
	Joana	Então pomos o 64 menos… o 64 aqui menos … como é que nós obtivemos o 16? (comentário: Joana está junto do quadro e aponta para aquilo para que está a chamar a atenção)
	al	[não se percebe a resposta]
	Joana	Um quarto vezes 64, então fizemos 64 menos …
	al	Um quarto
	Joana	Um quarto, sim, vezes…
	al	64
	Joana	64. Espera lá, senão… Temos de diminuir aqui o tamanho da letra, senão os vossos colegas não percebem. Põe lá um vinte avos, isso, vezes, o quê? [AP tira qualquer coisa a um aluno]
	al	Não é dele, é meu. Oh, stora, eu vou por no bolso.
	al	É só um stora.
	Joana	Não eram mais? Eu vi que eram mais. Guarda lá isso.
	al	E o outro? Eu quero o outro.
	Joana	Toma lá atenção!

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Então eram 64… Oh, João, há pouco não tínhamos escrito assim. Não, não, está correcto. É um vinte avos vezes … [intervenção da PC, penso que para chamar a atenção a um aluno, mas também sobre o problema] João é vezes... Atenção! Temos de dizer de onde vem o nosso 16. De onde é que vem o nosso 16? [há respostas de alunos] Mas primeiro temos de identificar o 48. Tinha parêntesis. Coloca lá o parêntesis! Não tivemos aqui um parêntesis? Porquê? Porque tínhamos de tirar um vinte avos do quê? Da mercadoria que tínhamos… da mercadoria que nos tinha restado. Mas essa mercadoria que nos tinha restado, de onde é que vinha?
	al	Da primeira…
46m27s	Joana	Da primeira que trouxemos e demos ao rei, não é? Então temos de identificar aí. Era …
	al	64 menos um quarto vezes 64… [intervenção da PC]
	Joana	64… [intervenção da PC]. Então não está aqui 64 menos 16? Então é o 64… tu trocaste foi isto quando mudaste …é o 64… como é que nós obtivemos o 16? Então, é menos …o 16 como é que obtivemos? …vezes 64 e agora fechas o parêntesis.
	al	Oh, João, percebeste?
	al	Ia.
	al	Andámos nós aqui a gastar a borracha toda só por causa de tu não saberes fazer a conta. (risos)
	Joana	Perceberam porque é que é? Entenderam porque é que é ali aquela expressão que está dentro de parêntesis.
	als	Sim.
	Joana	Entendeste ou não Tatiana? [não se percebem as intervenções dos alunos]
48m	Joana	Espera, já fizeste o problema, a resolução?
	al	Stora, posso ajudar?
	Joana	Já está a Lidia para me ajudar. Lidia vem cá ajudar-me, faz favor?
48m16s	Joana	Vamos realizar agora um jogo… e os vencedores … olhem tomem atenção senão depois não sabem o que é e os vencedores têm um diploma…
	als	Outro?
	Joana	Então depois no final quem acumular mais diplomas…o que é? Então não é o mérito para essa pessoa?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

Transcrição de parte da aula de Joana, Venda do Trigo
16/03/2006

02m09s	Joana	Início [dirige-se a alguns alunos orientando os locais onde se devem sentar, muito ruído de fundo] Deixem estar as barrinhas. Ainda não é para mexerem, disse eu logo quando entraram. Então agora estão avisados. Toda a gente ouviu? (algum ruído de fundo, Joana avisa mais alguns alunos de que não devem tirar as barrinhas) Já abriram a lição? (continua a dirigir-se a alunos em particular, aquieta a turma) Já escreveram a lição, meninas? Então a lição não está aberta, há tanto tempo? (aquieta a turma)
02m39s	Joana	Vamos lá tratar do que interessa. O que é que estivemos a falar na última aula, Tatiana?
	Al.	Ham? O que é que estivemos a falar na última aula?
	Joana	Sim.
	Al	A divisão.
	Joana	Calma. Eu quero ouvir a Tatiana. (ruído de fundo) Rui, eu ainda não falei nas barrinhas. Tatiana.
	Al	Oh, stora. Estivemos a fazer uma ficha qualquer sobre a divisão.
	Joana	E falámos que a divisão podia ter vários sentidos. Quais é que eram os sentidos? Carolina. (ruído de fundo). Eu quero ouvir só a Carolina. Eu estou a ouvir muito barulho. Carolina. Pode ser como? Que sentidos é que pode ter? Shiu! Eu ainda não disse para mexerem nisso. Carolina.
	Al	De partilha.
	Joana	Pode ter o sentido de partilha, de …, de…?
	Al	Agrupar.
	Joana	Sim, pode ser para agrupar.
	Al	E comparar.
	Joana	E comparar. Muito bem. Hoje vamos fazer uma actividade que está relacionada com a divisão.
	Al	Bué fixe, eu adoro contas de dividir.
		[Joana distribui a folha com o problema] (ruído de fundo) Vão ler, silenciosamente. (pequenos diálogos com os alunos) Oh, Ricardo, vai-te lá sentar. Psiu. Já têm uma actividade para ler e para fazer. Meninos! (ruído de fundo) Já vamos falar sobre isso. Primeiro vamos ler todos a actividade. (ruído de fundo) Eu é que digo quem é que vai ler. Anabela. Lê lá a actividade.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Lê lá o problema.
	Al	(a aluna lê) O gato e o rato. Um rato está em cima da torre que tem quatro braças de altura e, em baixo, à espera dele está um gato. Ora, o rato desce por dia dois terços da braça. Quanto ao gato, este não anda coisa nenhuma.
	Joana	Bom. Então, o problema diz-nos o quê? Quanto é que mede a torre?
	Als	Quatro braças.
	Joana	Quatro braças. Essa medida já foi aqui falada. Lembram-se quando foi falada? As braças?
	Al	Foi no côvado.
	Joana	Quando falámos no côvado. Muito bem, Melissa. Eu não te quero voltar a ouvir, Tatiana. (ambiente calmo). Só quando eu te pedir. Nuno, que andas a fazer de pé? O quê? (o al responde qualquer coisa). Vai-te sentar. Quem é que empresta um lápis ao Nuno? (algum ruído) Bom, falámos nas braças (algum ruído) .. falámos nas braças quando foi do côvado, não foi? Ainda se lembram o que era a braça? Diz lá, Melissa. Lidia.
	Al	Não se percebe.
	Joana	Muito bem.
	Al	Isso não era a vara?
	Joana	Então, a altura da torre era de 4 braças e em baixo o que é que estava à espera do rato?
7m15s	Als	Um gato.
	Joana	Um gato que não se mexia. Então e o rato, quanto é que ele andava, Anabela?
	Al	Andava … braças.
	Joana	Não. Vê lá. (ouvem-se vozes em simultâneo) Diz lá João.
	al	Dois terços de braça.
	Joana	O rato andava 2/3 de braça por dia. E agora queremos saber o quê? Elodie?
	Al	Quantos dias o rato demora a percorrer uma braça.
	Joana	Sim. Então vamos saber quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. Vocês têm aí o material que eu vos distribui[1]. (algum ruído de fundo após estas palavras)
	Al	E o que é uma braça?
	Joana	(ruído de fundo) Vão arranjar aqui uma barrinha que possa ser dividida em 3 partes.
	Al	Em três partes?
	Joana	Sim, em três partes iguais. Queremos saber quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. Essa barrinha vai ser correspondente a uma braça. (diálogos) Essa dá, então podem aplicar essa. Então agora queremos saber o quê?
	Al	Quantos dias é que o rato demora a percorrer uma braça.

[1] NC: Joana orienta imediatamente os alunos para a resolução planeada com o material. Não lhes pede que pense primeiro um bocadinho. Ou seja não são os alunos a delinear a estratégia de resolução. Eventualmente algum poderia ter resolvido intuitivamente o problema colocado.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	E quanto é que anda .. quanto é que o rato percorre?
	Als	Já está. Já descobri, professora.
	Joana	Então o rato anda quanto? Dois terços de braça. (ruído e fundo, vários alunos chamam Joana)
	Al	Oh, stora. Eu tenho isto bem?
	Joana	Sim, Vejam lá se serve. Essa.
	Al	Stora.
	Joana	Pode ser. Muito bem. Então vá, agora têm de fazer daí 2/3 … da braça.
	Al	Quê?
	Joana	Então esta aqui … meninos. Quem encontrou esta barrinha? Há outra que pode ser dividida também em 3. Quem encontrou esta, vai corresponder a quê?
	Al	A duas amarelas.
	Joana	Não, estou a perguntar a que é que vai corresponder no problema.
	Al	A uma braça.
	Joana	A uma braça. Então agora tenho que fazer o quê?
	Als	(não se percebem as várias intervenções, pois sobrepõem-se vozes)
	Joana	Não, então se o rato anda 2/3 dessa braça, temos de dividi-la em quantas?
	Als	Três.
	Joana	Temos que dividir … temos que arranjar ..
	Al	Stora.
	Joana	Sim, essa também dá. (intervenções em simultâneo de alunos) A Filipa encontrou outra barrinha que também pode ser dividida em 3. Que é esta (Joana mostra a barrinha de 9 cm). Então, agora, desta aqui queremos 2/3.
	Al	Dois terços? (ruído)
	Al	Então a nossa não está bem?
	Joana	Quê? Está. Pode ser esta. Muito bem.
	Joana	Então se o rato .. Sim, sim. (dirige-se a alunos que a interpelam) Agora quero daí … se o rato desce por dia 2/3 de braça … quanto é que é 2/3 aí? (não se percebe a resposta do aluno) Não, essas não é preciso.
	Al	Não?
	Joana	Então, daqui já vêem. Dois terços, qual é que é a barra que representa dois terços da braça? Assim. Mas se ele quer descer a braça toda, quantos dias é que demora? Isto é o quê, deste?
	Al	É 1/3 .. ah, é ½.
	Joana	É ½. Então são …
10m45s	Al	Assim é um dia.
	Joana	Sim.
	Al	Assim é outro dia.
	Joana	Não, espera. Então como é que é um dia? Assim.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Então e este aqui?
	Al	Este aqui foi o que ele desceu.
	Joana	Não. Então, vê lá. (não se percebem bem as intervenções do aluno) Demorou um dia e então o resto da braça? Então num dia ele percorre 2/3 e o resto da braça?
	Al	Stora.
	Joana	Sim?
	Al	Nós podemos ir para estas? (ruído de fundo)
	Joana	Não. (ruído de fundo) Vocês estão a fazer com este. Esta é a braça e, agora, quero 2/3 dessa barrinha.
	Al	Não dá nenhum.
	Joana	Então, não dá? Então tem-los aqui.
	Al	Então para tirarmos um.
	Joana	Sim. Então já estão 2/3, não é? Então, mas falta percorrer esta parte da braça. E 2/3 anda em quanto tempo?
	Al	Um dia.
	Joana	Um dia. Então falta, o quê? Para completar a braça precisa de …
	Al	Stora, não é este?
	Joana	O quê? Cabe lá 3 vezes? Vê lá!
	Al	Stora, já descobri.
	Joana	Sim.
	Al	Então se ele está aqui, está na pontinha e desce ham …
	Joana	Dois terços por dia.
	Al	Sim. Então,pronto, fica assim um meio. Agora ..
	Joana	Um meio, falaste bem. Então quanto é que é este?
	Al	Um meio.
	Joana	Sim. Este aqui é?
	Al	1/3.
	Joana	Então?
	Al	Dois terços.
	Joana	Dois terços é este. Então, não é?
	Al	Dois terços é este. Este aqui é ½.
	Joana	Um meio. Então quanto é que é? Então dois terços ele faz em quantos dias?
	Al	Em 3 dias.
	Joana	Em 3 dias? Vê lá.
	Al	Em 2.
	Joana	Em 2? (ruído de fundo)
	Al	Stora. Então, quantos dias demora? Três.
	Joana	Demora 3 dias para fazer uma braça? Vê lá.
	Al	Então stora ele demora um…
	Joana	Não, então isto aqui é o que ele faz num dia. Dois terços. Mas ainda falta para completar ali a braça. Quanto é que é?
	Al	Um dia e meio.
	Joana	Um dia e …
	Al	Meio.
	Joana	Muito bem, demora um dia e meio. Sim, esse também pode ser.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Al	Stora. Eu já descobri.
	Joana	Quanto tempo demora?
	Al	Um dia e meio.
	Joana	Um dia e meio.
	Al	Stora é isto aqui?
	Joana	Sim. Isto aqui é o que ele faz num …
	Als	Num dia.
	Joana	Num dia. Então …
	Al	Um dia e meio.
	Joana	Um dia e meio. Muito bem.
13m35s	Joana	Já todos conseguiram resolver?
	Als	Sim.
	Al	Um dia e meio.
	Joana	João. Levas as barrinhas e mostras aos teus colegas e explicas porque é que é um dia e meio.
	Al	Stora, é para fazer o que o Micael está a fazer?
	Joana	O que é que o Micael está a fazer? Foi esclarecido que as barrinhas eram para fazer o problema e não para brincar. (dirige-se à turma)
	Al	Stora, eu não tenho cá as barras laranjas …
	Joana	Tens o que é essencial.
	Al	Nem as pretas
	Joana	Não precisas dessas. Ou vocês resolvem o problema com as barrinhas ou tenho que vos tirar as barrinhas. Achas que isso é estares a resolver o problema, Rui?
	Al	Estou a ver como é que se faz. (ruído de fundo)
	Joana	Meninos, as barrinhas não são para brincar. São para vos auxiliar a resolver o problema. Perceberam? Porque senão passa-se a não trazer material.
14m38s	Joana	João, vai lá explicar aos teus colegas.
	Al	É preciso levar esta barra?
	Joana	Sim, levas essa. (ruído de fundo) Tomem atenção. (um aluno interpela do lugar a professora)
	Al	Cinco dias e meio.
	Joana	Em qual?
	Al	A percorrer as 4 braças.
	Joana	Será cinco dias e meio? (ruído de fundo e interpelações de alunos)
	Joana	João.
	Al	3 dias.
	Joana	A quê?
	Al	3 dias.
	Joana	Eu quero ouvir o João. Ouçam lá todos a explicação do João.
	Al	Se o rato anda dois terços de braça por dia …
	Joana	Então explica lá com a barrinha (ruído de fundo) Isso é o quê, João?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Al	Isto é o que o rato faz por dia. (vários alunos falam ao mesmo tempo dificultando a audição)
	Joana	Eu quero ouvir o João. Meninos.
	Al	Isto é o que o rato faz por dia.
	Joana	Sim. Então o rato percorre por dia ..
	Al	Dois terços.
	Joana	De quê?
	Al	Dois terços da braça.
	Joana	Dois terços da braça. Então e qual é a barrinha que corresponde à braça.
	Al	A azul.
	Joana	A azul. E, então, os 2/3 são .. essas duas barrinhas verdes. Mas ainda falta percorrer mais um pouco. Oh, Hugo. (ruído de fundo) Shiu, não quero saber. Então isso vai corresponder a quê?
	Al	Meio dia.
	Joana	A meio-dia, sim. Então quantos dias é que ele precisa?
	Al	Um dia e meio.
	Joana	Ele precisa de um dia e meio para percorrer uma braça. Todos perceberam?
16m44s	Al	Não.
	Joana	Então vamos fazer o esquema aqui no quadro. És capaz de fazer o esquema, João? (Joana aproxima-se de João)
	Al-Jo	Como é que eu agora faço?
	Joana	Então, fazes aí o esquema das barrinhas.
	Al	Fazes as barrinhas.
	Joana	Fazes as barrinhas, não é?
	Al	Fazes uma barra muito grande.
	Al-Jo	Muito grande, não.
	Joana	Fazes uma barra.
	Al	Hi, tão pequenina.
	Joana	Mas é muito pequenina, João. Faz lá uma barra maior. (algum ruído de fundo) Oh, Hugo. Eu disse que as barras não eram para brincar. Eu já avisei. (Joana continua a circular e a verificar o que os alunos fazem, chamando-lhes a atenção)
17m50s	Joana	Então indica aí o que é que corresponde à braça. (algum ruído de fundo, Joana está a alguma distância do quadro) Isso corresponde a quê?
	Al	Á braça.
	Joana	Então escreve aí. A uma braça. Põe lá, uma braça. Põe lá 1, atrás. Isso.
	Al	Oh, stora. Falta lá um quadrado.
	Joana	Calma. O João vai explicar agora.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Explica lá João.
	Al-jo	Se o rato num dia percorre 2/3 de braça, ele vai ainda ter que fazer mais e como ..
	Joana	Sim.
	Al-Jo	Num dia ele fez 2/3, no outro dia ele tinha que fazer..
	Joana	Tem que terminar de completar a braça, não é? E quanto é que corresponde?
	Al-Jo	Meio dia.
	Joana	A um meio. E então fica ..
	Al-Jo	Um dia e meio.
	Joana	Um dia e meio. Então nós podemos representar aí. Representa lá. Sim. Daí a aí.. Ai, daquele lado ao outro é um dia e agora ali corresponde .. Como é que tu representas o meio?
	Al-Jo	Um meio.
	Joana	Um meio. Zero vírgula cinco ou um..
	Al	Um terço.
	Joana	O quê? Um meio, então não é? Um meio. Muito bem. E se nós somarmos um mais um meio, dá quanto? Vê lá. Soma lá um mais um meio, que é um dia mais meio dia. Quanto é que dá? Vê lá. É uma soma. Então tens de achar o mesmo denominador .. Dois sobre dois, vê lá. Então tens de achar o mesmo denominador, não é? Então tens de fazer aí, o quê? Multiplicar por … 2 (há algum ruído de fundo que aliado à distância que separa Joana de João não permite ouvir as respostas deste último).
	Al-jo	Por 2.
	Joana	Sim. Então fica .. Não aí não é preciso, senão não fica .. exactamente Rui. (Joana vai acompanhando os alunos no lugar) Isso dá.. 3/2. Muito bem. Então, quanto é que ele demora a percorrer uma braça? Quanto? Não ouvi o João. Quanto é que ele demora a percorrer uma braça?
	Al-Jo	Três meios.
	Joana	Três meios dias. Muito bem.
	Al	Um dia e meio.
	Joana	Sim senhor. Então o que é que nós fizemos .. aqui? Tentámos ver quantas vezes cabia 2/3 numa braça, não foi? Tentámos ver quantas vezes cabia 2/3 numa braça. E como é que nós fazemos?
	Al	Um a dividir …
21m37s	Joana	Um ..
	Al	a dividir
	Joana	Um a dividir ..
	Als	Por 2/3.
	Joana	Pelos 2/3, porquê?
	al	Porque é os 2/3 que ele percorre.
	Joana	Porque é o que o rato percorre. Muito bem. Todos estão a entender? Quem é que não está a perceber? Diz, Inês. (não se percebe o que diz a aluna)

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Porque é que é feita aquela divisão? Porque tu tens a tua unidade que é esta braça e tu queres saber quantas vezes lá cabe os 2/3, não é? Então se tu dividires esta braça por 2/3, sabes quantas vezes lá cabe, não é? Vai dar .. que vai dar quanto? (não se percebe bem se algum aluno dá resposta) Vai dar três meios. Então, vimos aqui. (ruído de fundo, Joana troca impressões com alunos no lugar) Podes sentar-te.
22m44s	Joana	E agora têm o segundo para fazer. Rute, qual é a outra questão que agora queremos resolver.
	Al-Ru	Ao fim de quantos dias o rato o rato chega finalmente ao pé do gato?
	Joana	Então queremos saber ao fim de quantos dias o rato o rato chega finalmente ao pé do gato. O rato chega … Não ouves, porque os meninos estão todos a conversar (Joana eleva a voz). A alínea b … Rute, lê lá.
	Al-Ru	Ao fim de quantos dias o rato chega finalmente ao pé do gato?
	Joana.	Pronto. Agora vamos resolver, ao fim de quantos dias o rato chega finalmente ao pé do gato. Então, para o rato chegar ao pé do rato, quanto é que ele tem que percorrer? Ana. Ana. Que número de braças é que ele tem de percorrer?
	Al-an	Quatro.
	Joana	Quatro braças. Porquê?
	Al-na	Porque o rato está em cima de 4 braças.
	Joana	Sim, porque a torre mede 4 braças e se o rato está lá em cima tem de percorrer aquilo tudo.
	Al	Se cada braça..
	Joana	Sim. Se cada braça …
	Al	Cada uma .. espere. Deixe-me ver. Temos de fazer aquilo tudo 4 vezes.
	Joana	Muito bem. Então vamos lá fazer, a ver quanto é que dá.
	Al	Quantas braças, stora?
	Al	Quatro.
	Joana	Então, quantas braças é que tem a torre, Elodie?
	Al	Quatro.
	Joana	Então, são 4 braças.
	Al	Eu não estou a perceber o problema.
	Joana	Porquê? Diz. Então foi assim. Isto era o que ele tinha de percorrer. Uma braça, não foi? E nós queremos (ruído, há quem chame a stora) e nós queríamos saber quanto é que o rato percorria .. quantos dias é que o rato fazia para percorrer uma braça, não era? Isto era uma braça e ele por dia percorre 2/3, não é? Isto era uma braça e ele por dia percorre 2/3, não é? E nós queremos saber em quantos dias é que ele percorreu uma braça. Então isto aqui corresponde a quê?
	Al	A um dia.
	Joana	Sim a um dia, mas isto aqui … este com este são .. 2/3, não é? isso

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		corresponde a 2/3. Ele andava .. 2/3 corresponde a um dia .. se ele andava 2/3 por dia, significa que daqui até aqui, já fez um dia, mas, depois, ainda lhe faltava este.
	Al	É este.
	Joana	Não é. Porque olha aqui, isto aqui .. é quanto? Dois terços, não é?
	Al	Isto é uma braça.
	Joana	Ainda lhe falta percorrer este bocadinho aqui, que é esta barrinha. E esta barrinha corresponde a quanto .. destes 2/3?
	Al	Metade.
	Joana	Metade destes 2/3, não é? Então se ele andava .. num dia 2/3, agora falta-lhe metade, metade de quê ?
	Al	Do dia. Meio dia.
	Joana	Meio dia.
25m51s	Al	Stora, só uma pergunta: como é que nós fazemos aqui a conta? (trata-se de outro aluno)
	Joana	Como é que nós fazemos a conta? Então nós fomos ver quantas vezes cabia aqui os 2/3 na braça. Então, nós dividimos a braça por 2/3, para sabermos quantas vezes lá cabia os 2/3[2].
	Al	Quatro braças são 4 braças destas.
	Joana	Sim, sim, dessas.
	Al	Oh stora a conta do João, eu não percebo nada.
	Al	Oh stora, eu deixei lá as minhas barrinhas.
	Joana	Ah está bem. Diz qual é que não percebeste. Esse? Espera lá, está bem? Só dar aqui ao teu colega para ele fazer.
26m36s	Al	Eu não estou a perceber agora.
	Al	Eu não percebi.
	Joana	Então é uma braça que ele tem que percorre, não é? e queremos saber em quantos dias é que ele percorre uma braça. Nós sabemos que por dia ele percorre ..
	Al	2/3
	Joana	2/3 de braça.
	Al	Isso aí eu já percebi.
	Joana	Pronto.
	Al	Que tem que ser um e meio.
	Joana	Isto é a braça, não é?
	Al	Sim.
	Joana	E 2/3 da braça .. não é isto? Então pronto. Então, isto aqui ele percorre por dia 2/3. Aqui já está um dia, não é? Mas ainda falta este pedacinho.
	Al	É um dia e meio. Isso eu percebi, eu não percebi foi isto aqui.
27m12s	Joana	Ah, o cálculo. Como é que nós chegámos aqui. Nós fomos ver quantas vezes é que 2/3 cabia aqui na braça e então dividimos a braça por 2/3 e vimos quantas vezes é que cabe lá .. na braça.
	Al	E 3/2 é um dia e meio.
	Joana	Já tínhamos visto, é um dia e meio.
27m44s	Joana	Então e este, agora? Então isto agora? Já está percorrida uma braça. Então

[2] Terá sido eficiente a passagem do trabalho com materiais para a situação formal, isto é para a abstracção?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		agora queremos percorrer outra braça. Ah vocês não têm peças verdes.
	Al	Oh stora, eu não estou a perceber nada disto.
	Joana	O quê?
	Al	Não estou a perceber nada disto.
	Joana	Qual a parte é que tu não entendeste? Sabes porque é que não percebeste? Porque vocês estiveram a fazer isto enquanto eu estava a explicar. Estiveram a brincar, enquanto eu estava a explicar. Depois não percebem, claro.
	Al	Stora, não são seis dias?
	Joana	Seis dias.
	Al	São seis dias. (ruído de fundo)
	Al	Stora chegue aqui.
	Joana	Então 12/2 quanto é que é?
	Al	Seis.
	Joana	Seis quê?
	Al	Dias.
	Joana	Muito bem. Inês?
	Al	Posso ir escrever a resposta do 4?
	Joana	Do 4? Este aqui, a alínea b?
	Al	Sim.
	Joana	Agora nós queremos saber 4 braças, quantos dias é que ele anda.
	Al	3 dias.
	Joana	3 dias para percorrer 4 braças? Não é, não.
	Al	É 4?
	Joana	Sim são 4 braças. Então agora temos que fazer o mesmo processo para 4 braças. (não é perceptível o que lhe diz um alunos) Então temos que fazer agora quanto? Então temos que pôr aqui 4 braças. Temos que ver quantos dias é que ele demora. Isto era uma braça, não era? Então agora pões aqui 4 braças[3]. E agora vê lá, quantos dois terços é que cabe aqui nas 4 braças. Vê lá. Olha aqui[4]. (ruído de fundo) Vais dividindo assim. Vais colocando os 2/3 … nas 4 braças. Foi como fizeste aqui. Faz lá.
	Joana	Vais lá ao quadro Lidia explicar? (ruído de fundo) A Lidia já chegou ao resultado … shiu. Meninos tomem atenção. A Lidia chegou ao resultado e houve mais pessoas que chegaram, por isso a Lidia agora vai explicar. Vai lá ao quadro. (ruído de fundo) Melissa … não estás na rua!
	Al	Stora eu não percebo isso. Chegue aqui.
	Joana	Um. Dois, três, quatro.
	Als	Só que a nós dá-nos seis dias e meio.

[3] Joana chama a atenção para a resolução formal anterior (expressão envolvendo a divisão) e sugere uma resolução análoga, com a devidas adaptações.
[4] Os alunos para a obtenção da resposta estão a trabalhar com as barras.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	Então como? Dá seis dias e meio? Vejam lá.
	Al	Nós fizemos 2, mais 2 …
	Joana	Dois? Então isto é um dia ..
	Al	Um dia ..
	Al	Eu venho aqui para ao pé destras meninas que a stora anda lá sempre e para aqui não vem.
	Joana	Esse meio, não sei de onde é que veio.
	Joana	Que foi, Anabela?
	Al	Aqui .. não é isto que se faz?
	Joana	Não. Ah espera aí. (ruído de fundo) Não.
	Al	Não percebo isto.
	Joana	Essa parte? Ainda só vamos na b. Calma. Lidia, quero que expliques porque é que … Olhem eu quero ouvir a Lidia. Oh Nuno, eu há bocadinho acabei de avisar toda a gente que não era para brincar com as barrinhas. (ruído de fundo) Lidia explica lá o que aí tens. Olhem eu não consigo ouvir nada (Joana eleva a voz). Só quando toda a gente estiver calada é que ela explica. Explica lá. Lidia.
32m14s	Al	(não se percebe dada a distância a que a aluna está de Joana)
	Joana	Então numa braça ele demorava .. 3 meios dias .. 4 braças, não é o que aí tens? Porque é que multiplicaste por 4? (não se percebe um aluno)
	Joana	Porque eram as 4 braças. Muito bem João. Então significa que quê? Se ele para percorrer uma braça demorou três meios, para percorrer 4 braças vai demorar
	Al	Seis dias.
	Joana	Seis dias, porquê? Porque vai demorar o quádruplo do tempo. Porque eram 4 braças. Muito bem vai dar 6 dias. Se nós … Lidia faz aí o esquema no quadro.
	Al	Oh stora, também podia ser 4 a dividir por 2/3.
	Joana	Muito bem, já falas disso João.
33m11s	Al	Faço as 4 braças?
	Joana	Sim, sim podes fazer.
	Al	Oh stora eu já sei como é que se dividem. Muda-se o denominador com o numerador.
	Joana	Muito bem, João.
	Al	Muda-se o denominador pelo numerador. É muito fácil.
	Joana	E isso é o quê? Quando se troca?
	Al	A divisão.
	Joana	Não, quando nós fazemos a troca do denominador pelo numerador .. isso é o quê? Que nome é que demos a isso? Invertemos .. é o ..?
	Al	É o inverso.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	Muito bem[5].
	Al	É o quê?
	Al	É o inverso.
	Joana	Não é 4 barcas, é 4 braças (Joana dirige-se ao aluno que está no quadro).
	Al	Oh stora.
	Joana	Diz.
	Al	Nós não aprendemos a fazer contas de dividir como …?
	Joana	Sim, mas o João já … o que é que tu pode ver. Olhando aqui para este cálculo o que é tu verificas? Vê lá, não há nada aí assim...
	Al	Stora já descobri o que é. É porque se nós aqui multiplicarmos vai dar o mesmo que aqui. É só trocar os números.
	Joana	Quando nós fazemos isso ..
	Al	É o inverso.
	Joana	Muito bem. Sim senhor.
	Al	Também já sabem? (um al questiona em voz baixa a professora).
	Joana	Também (risos).
34m42s	Joana	Então agora podes dividir aí. Exactamente. (dirige-se ao aluno que está no quadro). Então cada braça corresponde a um dia e meio. As quatro braças, hão-de corresponder ao quádruplo dos dias. Vai ser 6 dias. Pronto. E pões no final o total. Perceberam agora?
	Al	Stora continuo sem perceber.
	Joana	Há meninos que ainda não entenderam. Qual foi a parte que não entendeste?
	Al	Não consegui perceber nada.
	Joana	Vamos todos ouvir a dúvida do Zé. Pode ser também alguma dúvida vossa. Está bem? Que é para todos esclarecermos o Zé. Então qual foi a parte que não percebeste?
	Al	Posso explicar?
	Joana	Então o que é que nos diz o problema? Olha lá para o problema e o que é que nos diz? Quais são os dados que podes daí retirar?
	Al	(não se ouve a resposta do aluno Zé)
	Joana	Pronto, então temos um rato em cima de uma torre que tem 4 braças. E depois?
	Al	(não se ouve a resposta do aluno Zé)
	Joana	E cá no fundo temos um gato, não é? e depois diz-nos o quê?
	Al	(não se ouve a resposta do aluno Zé)
	Joana	Então o rato desce por dia 2/3 de braça. E depois queremos saber .. a primeira pergunta é «quantos dias o rato demora a percorrer uma braça». Foi o que fizemos na primeira alínea e vimos que a barrinha azul correspondia a uma braça, não era?
	Als	Está aqui.
	Joana	E nós se dividirmos esta barrinha em 2/3 que era o que ele percorria,

[5] NC: Joana não explorou completamente o raciocínio do aluno. Não o levou a verbalizar que a divisão dá lugar à multiplicação pelo inverso do divisor.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		verificamos que ainda falta percorrer mais um bocadinho para completar a braça toda. Não era?
	Als	Sim.
	Joana	Então já aqui temos o quê? Quantos dias o rato já andou?
	Als	Dois.
	Joana	Dois?
	Al	Ai, um.
	Joana	Então 2/3 corresponde a um dia. Então o rato já demorou um dia. Ainda lhe falta mais um tempinho para percorrer o resto. Se nós compararmos estes 2/3 verificamos que a parte que falta corresponde a quê? A metade dos 2/3 e os 2/3 corresponde a um dia. E então a metade vai corresponder .. a metade dos 2/3, que corresponde a um dia, vai corresponder a .. meio dia. Por isso é que é um dia e mais meio …para percorrer uma braça. Percebeste?
	Al	São 3 meios-dias.
38m05s	Joana	São 3 meios-dias. Muito bem. Percebeste? E agora, depois a alínea b diz-nos quanto tempo demora o rato a chegar cá ao fundo. Então se ele tem 4 braças, temos uma braça, mais uma braça, mais outra braça e mais outra braça, não é? Então se ele a percorrer uma braça demorava 3 meios-dias que é a mesma coisa que um dia e meio, a percorrer as 4 braças vai demorar …
	Al	(há intervenções de alunos que não são perceptíveis)
	Joana	Vezes 4, porquê? Porque vai demorar o quádruplo do tempo. Porque são 4 braças. Sim? Todos perceberam?
	Al	Sim
	Al	Não (deve ser o Rui que aproveita a ocasião para repetir a negativa , como um gato a miar).
	Joana	Então foi o que a Lidia esteve aqui a fazer (responde a alguém cuja intervenção não foi captada). Então vemos aqui. Então isto era um dia ..
	Al	Eu sei professora. Eu percebi.
39m27s	Joana	(Joana troca breves impressões com a PC) Mas o João viu além também uma divisão que podemos fazer. E como é que fizeste, João? Explica lá aos teus colegas. João vai lá ao quadro explicar aos teus colegas.
	Al-Jo	Posso levar o caderno?
	Joana	Sim podes levar.
		(a PC pergunta aos alunos se já passaram o que está no quadro e pede ao João que apague. O aluno vai apagando e questionando Joana sobre o que deve ficar por apagar)
	Joana	Então o que é que fizeste, João? Explica lá aos teus colegas. Tu tinhas 4 braças
	Al-Jo	E dividi por …
	Joana	Dividimos por
	Al-Jo	Por dias
	PC	Pelo tempo em dias que o rato demorava
	Joana	A percorrer
	PC	A braça. Para veres quantos dias.
	Joana	Então como é que fizeste?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	PC	Fizeste 4 a dividir
	Joana	Por quanto?
	Al-Jo	Por 2/3.
	Joana	Pelos 2/3. Porquê? Porque o rato deslocava-se 2/3 por dia.
	PC	Agora no esquema mostra quantos dias (não se percebe o que aluno diz) então vais pintar 2/3, 2/3, 2/3, 2/3, …
	Joana	Sim, pinta com o outro giz.
	PC	Pintas 2/3 que é um dia, assinala um dia (a PC continua a orientar o aluno)
	Al-Jo	Assim, stora?
	Joana	Sim vá, podes fazer assim. E assim é o quê?
	Al-Jo	Outro dia.
	Joana	Outro dia.
	PC	Estejam com atenção (ruído de fundo)
	Joana	Depois temos mais.
	PC	Vejam se estão a perceber, se estão a acompanhar o raciocínio.
	Joana	Oh Micael .. eu ponho-vos na rua, se volto outra vez a ver isso. Também é para ti, Rui
	Joana	Mais um dia e agora ainda falta daquele lado, não é?
	PC	Aí só estão 4 dias.
	Al-jo	(não se percebe)
	Joana	Então mais 2/3 faz outro dia .. Esse 1/3 mais 1/3
	Al-jo	dá 2/3.
	Joana	Dá outro dia, não é? Não, escreves 1 dia.
	Al-Ti	Oh stora, eu não estou a fazer. Estou a arrumar as peças.
	Joana	Então deixa estar aí as peças em cima da mesa. Eu garanto que vos tiro as peças e ponho-vos na rua.
	Joana	(dirigindo-se a João) sempre que temos 2/3 corresponde a 1 dia. Então temos aqui 2/3 corresponde a 1 dia. Faz assim.
	Al	Então porque é que ali é só um, um
	Joana	Porque é este com este. (a PC faz intervenções, provavelmente a representação feita pelo aluno no quadro não estará muito bem[6])
44m28s	Joana	O rato percorre sempre 2/3 por dia. Quando temos 2/3 já passou 1 dia.
	Al-Jo	Mais um dia.
	Joana	Mais um dia. Então e isso vai dar quantos dias?
	Al-jo	Seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (conta João batendo com o pau do giz em cada parte colorida).
	Joana	Então demora quanto tempo a percorrer as 4 braças? Seis dias.
	PC	Então o resultado daquela divisão é quanto?
	Als	Seis.
	Joana	É seis.

[6] NC: não foi possível ficar com a gravação desta aula. Porém esta representação não terá sido planificada por Joana. Pareceu-me que foi sugerida na aula pela PC. Teria sido mais adequado representar as 4 braças e começar por pedir ao aluno que decompusesse cada uma em terços de braça.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	PC	Foi outra maneira de resolver.
	Joana	Igual a 6 dias (Joana dirige-se a João). E agora podem começar a fazer aí … meninos. Diz Filipa. Que foi Inês?
	Inês	Não estou a perceber porque é que 2/3 corresponde a um dia.
	Joana	Porque aqui diz .. ora o rato desce por dia 2/3 da braça, não é? Então temos aqui uma braça, não é? E ele desce estes 2/3 aqui.. é este com este .. E este aqui já corresponde um dia. Depois desce mais este bocadito que é meio dia, com mais este bocadinho já dá 2/3, não é? Uma peça igual a esta com outra peça igual a esta dá 2/3, não é? Então aqui este meio-dia mais este meio-dia já dá mais um dia. Já aqui temos mais um dia. Pronto. Depois anda aqui mais dois terços. Já dá outro dia, não é? Depois anda estes dois terços, dá outro dia. Depois anda este pedaço mais este pedaço, já dá mais dois terços que é outro dia. Anda estes dois terços já dá outro dia. Dá 6 dias. Sim? É a mesma coisa de teres esta braça aqui 4 vezes. Percebes? Tens este esquema 4 vezes .. que é o que tu fizeste aqui com as barrinhas. Olha ali, queres ver? Oh pst João. Olha que eu estou a ouvir. Vê lá. Então temos aqui as 4 braças: uma, duas, três, quatro, não é? Então vamos lá ver. Sempre que temos assim são 2/3, não é? E estas duas peças correspondem a …
	Al	Um dia.
	Joana	Um dia. Pronto. Então temos aqui um dia. Sobra este meio-dia que juntado com este já dá mais um dia. Depois temos aqui estes dois terços que dá um dia. Depois temos estes dois terços que dá outro dia, não é? Depois temos este meio-dia que juntamos com este meio-dia e já dá 2/3, não é? Então temos outro dia. Mais estes 2/3 dá outro dia. Se nós contarmos .. contamos um dia, 2, 3, 4, 5, 6. Demora 6 dias. Percebeste? Foi a mesma coisa que .. olha aqui .. temos ou não este esquema aqui montado 4 vezes?
	Al	Sim.
	Joana	Vês. Tens este esquema repetido 4 vezes.
	Al	Oh professora, eu fiz assim: estes 2 era um dia, depois fiz assim, este era meio-dia, depois juntava-se dois fazia um dia
	Joana	Fizeste bem.
	Al	E mais estes dois, outro dia.
	Joana	Outro dia. Então depois aqui já tens ..
	Al	Um, 2, 3, 4, 5, 6.
	Joana	Muito bem.
	Al	Stora, eu não estou a compreender isto.
	Joana	Então e agora? Isto aqui já tínhamos ali representado. Um a dividir por 2/3 dava quanto? Olha aqui, tu escreveste. Onde é que está? Não escreveste? Pois não, mas nós escrevemos ali no quadro. Um a dividir por 2/3 que dava .. então porque fomos ver quantas vezes 2/3 cabia numa braça, quantas vezes é que era?
	Al	Três meios.
	Joana	Sim, eram 3/2. (Joana dirige-se a outros alunos) Já chegaram à conclusão? Então olha aqui, nós escrevemos ali em cima. O 1 corresponde a uma braça e os dois terços queremos ver quantas vezes os

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		2/3 .. cabem numa braça. Foi o que nós fizemos ali. Quanto é que é? (pausa) Quanto?
	Al	Três meios.
49m20s	Joana	Os 3/2. Então vamos lá. Melissa. Então mostra lá. Então porque é que viraste a folha? E o resultado? Eu quero aqui o resultado. João já fizeste?
	Al.jo	Já. Ele não sabe fazer com a conta, stora. Por isso é que tem as contas de dividir mal.
	Joana	Ai, Francisco, Francisco.
	Al	Mas eu copiei mal por ele.
	Al	Vê stora, ele não sabe copiar por mim.
	Joana	Não é para copiar, vira lá a folha João. Ele tem que fazer por ele. Acabas depois de pintar, vamos fazer agora este.
	Al	Oh stora, agora não estou a entender.
	Joana	O quê?
	Al	Aqui é para fazer o resultado das barras.
	Joana	Sim, foi o que nós vimos ali em cima. Este um corresponde a uma braça, não é? Então nós queremos ver quantas vezes os 2/3 cabe na braça.
	Al	É esta conta.
50m35s	Joana	Exactamente. Vês. Então quanto é que era?
	Al	3/2.
	Joana	3/2. Verifica lá. Ai eu quero o resultado aqui (verifica a resolução)
	PC	(dirigindo-se a Joana) a conclusão já foi generalizada?
	Joana	Ainda não. Vamos fazer já.
	Al	Stora.
	Joana	Diz Anabela.
	Al	Nós aqui também podemos concluir isso. Se fizermos esta ou esta conta vai dar o mesmo resultado.
	Joana	Podem concluir, mas atenção o que eu quero ver é como se resolve os quocientes que aí estão. Bom. Vamos ver agora a conclusão que nós podemos tirar deste problema todo. Está bem? E o João foi o primeiro a lá chegar, mas houve mais meninas que chegaram lá. A Patrícia e a Ana também já chegaram à conclusão. Então Ana vai lá ao quadro explicar aos teus colegas. Colocas esses quocientes que aí estão no quadro e esses produtos e escreves o resultado.
	Al	É o inverso da multiplicação
	Joana	(risos) Sim, mas não é só isso. Vê lá. Tens meios … então e outro que está lá? Micael. Senta-te em condições e tu também Rui.
	al.-Ti	Eu estou sentado em condições.
	Joana	Não, não estás. (ruído de fundo, vários alunos a conversar) Estou a ouvir muito barulho.
	Joana	(dirige-se à aluna que está no quadro) espera .. sobre doze .. terços. Então como é que fazes .. Shiu (dirige-se à turma onde se sobrepõem algumas

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		vozes) como é que fazes aí o produto? Então quanto é que dá 4 vezes três meios? Micael não te volto a avisar.
53m46s	Joana	Então nós podemos ver … o que é que nós vimos aqui? Este cálculo aqui nós já o tínhamos feito.
	Als	Sim.
	Joana	Então e para quê? Foi para ver o quê? Quantas vezes cabia 2/3 ..
	Al	Na braça.
	Joana	Na braça. Muito bem. Fomos ver quantas vezes cabia 2/ 3 na braça. E quantas vezes era?
	Als	Três meios.
	Joana	Três meios. Muito bem. E agora podemos concluir dali o quê? Ah, e em relação alia ao .. 4 braças, este 4 aqui que vai corresponder às 4 braças. Então vamos dividir as 4 braças por 2/3 para quê? (não se percebe o que é respondido) Sim, então fomos ver quantas vezes 2/3 cabia nas 4 braças. Sim? E vimos que cabia..?
	Als	Seis.
	Joana	Sim. Então nós podemos chegar aí a uma conclusão, não podemos João? E qual foi .. e a Ana também sabe. Qual foi a conclusão? Olhando além para aqueles cálculos[7], qual a conclusão que podemos retirar?
54m54s	Al	Nós multiplicamos o dividendo pelo inverso do divisor, o resultado vai ser o mesmo.
	Joana	Exactamente. Porque se vocês repararem o que nós temos aqui é o inverso do que está aqui na divisão. Não é[8]? Quando temos uma divisão .. aqui está 1 a dividir por 2/3, para fazermos aquela divisão, transformamos os 2/3 no seu inverso que neste caso fica .. quanto?
55m23s	Al	Três meios.
	Joana	Três meios e fazemos uma multiplicação. Então fazemos o 1 vezes o inverso do divisor, que fica 1 vezes 3/2 e obtemos então o resultado. Que vemos ali vai dar o mesmo. Que é igual a 3/2. Diz Inês.
55m54s	Al	Se a dividir, multiplicar pelo inverso dá sempre …
	Joana	Não. Nós para fazermos a divisão multiplicamos pelo inverso .. do divisor. Então vimos que multiplicando o dividendo .. se multiplicarmos .. Tomem lá atenção. Se multiplicarmos o dividendo pelo inverso do divisor, que é o que aqui está, estamos a multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor. Sim? Diz Inês.
	Al-In	Stora, na última não é 2/3?
	Joana	Na última o quê? Aqui? Porque estamos a fazer a multiplicação. Porque nós fazemos,

[7] NC: presumo que no quadro tenha sido registado o seguinte 1: 2/3=3/2 e
4:2/3=4x3/2=12/2=6.
Joana deveria ter feito uma questão mais dirigida ao objectivo que estava relacionado com o estabelecimento de uma regra para calcular o quociente de números racionais.
[8] NC: Joana está junto ao quadro e aponta para os aspectos que está a salientar.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		multiplicamos o dividendo pelo inverso .. que aqui .. se aqui era 2/3 o seu inverso vai ser o quê? Três meios, não é? Então multiplicamos pelo seu inverso e vamos obter o resultado. Que é 3/2. Não foi o que obtivemos ali também? Então se multiplicarmos o dividendo, que está aqui, se multiplicarmos o dividendo pelo inverso do divisor, que era 2/3, se é o inverso, fica 3/2, multiplicamos o dividendo pelo inverso do divisor que vai dar o resultado 3/2. Que foi o mesmo que aconteceu aqui, não foi? Temos aqui o dividendo, quando multiplicado pelo inverso do divisor que neste caso o divisor era 2/3, o seu inverso é .. quanto Elodie?
	Joana	(não se percebem as respostas do aluno) Quanto? Sim, o inverso do divisor é quanto? 3/2, muito bem. Que vai dar 12 a dividir por 2 ou doze meios, que é igual a seis. Vai dar o mesmo que aqui.
58m07s	Joana	Então agora vamos escrever a conclusão a que vocês chegaram ...
	Al	A conclusão é que o inverso (não se percebe)
	Joana	Como é que é a conclusão, Ana?
	Al-an	Quando o divisor multiplica pelo inverso o resultado vai ser o mesmo.
	Joana	Não.
	Al	Eu pus assim: concluímos que a divisão é o inverso da multiplicação e dá sempre o mesmo.
	Joana	Não é bem assim. Não é bem assim. Então é assim, para dividirmos .. dois números racionais[9] (pausa) em que pelo menos um deles
	Al	Não estou a perceber nada.
	Al	Oh stora, repita lá.
	Joana	Pois não, ainda não estiveste atento, como é que queres perceber.
	Al	Oh stora, repita lá.
	Joana	Em que pelo menos um deles está representado (pausa) por uma fracção, não é? Em que pelo menos um deles
	Al	Isso é a conclusão?
	Joana	Eu começo outra vez. Podemos dividir dois números racionais (pausa) em que pelo menos um deles está representado por uma fracção .. vírgula .. Querem que eu escreva no quadro?
	Als	Sim.
	Al	Stora isso é a conclusão (Joana escreve no quadro).
	Joana	É.
	Al	Shi!
	Joana	Não a letra é que está muito grande para vocês verem. Então temos além: podemos dividir dois números racionais em que pelo menos um deles está representado por uma fracção, que é a situação que aqui está, está pelo menos um deles representado por uma fracção, não está? Multiplicando o dividendo pelo inverso do divisor. Foi o que vimos aqui, multiplicámos o dividendo pelo inverso do divisor.
1h3m	Joana	Entregam só no final da aula. Ricardo o que andas aí a fazer?

[9] Joana começa a escrever no quadro, mas parece interromper logo de seguida.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

		Quem já passou, vai verificar se a conclusão a que nós chegámos se verifica para outros quocientes para além daqueles ali[10]. Está bem?
	Al	Vai dar alguma coisa, professora?
	Joana	Não está aí. Então não têm aí outros quocientes, para resolver? Vê lá. Então como é que nós dissemos que fazíamos a divisão? Então estivemos ali a ver. Multiplicámos o dividendo pelo inverso do divisor. É o que aqui tens que fazer.
	Al	Nestas coisas temos de dividir o 5 po ??? e o denominador fica sempre igual (não é perceptível o que diz a aluna)
	Joana	Na divisão? Então estivemos a ver ali que na divisão .. podemos fazer o quê? Então multiplicamos .. qual é que é o dividendo aqui? (pausa) O dividendo? É o cinco, não é? é o 5. Então este é o dividendo e este é o divisor e o que der há-de ser o quociente, não é? Estivemos a ver isto na última aula. Pronto, o dividendo é o 5 .. só um bocadinho Rute. Então temos o dividendo que é o 5 e ali diz-nos multiplicando o dividendo pelo inverso do divisor, não é? Então, este é o dividendo, vezes o inverso do divisor, que é este, já sabemos calcular. Shiu.
	Al	A dividir por 3?
	Joana	Cinco .. estavas a dizer que é a multiplicar, não pode ser dividir. Multiplicar pelo inverso. Qual é que é o inverso de 2/3?
	Al	Três.
	Joana	É quanto?
	Al	Três
	Joana	Três?
	Al	Meios.
	Joana.	Três meios. Elodie o que é que se passa? Queres ir lá fora? Então o que é que foi? (o aluno soluça). O que é que foi, Elodie?
	Al	É por causa do irmão (informa um colega).
	Joana	Não fiques assim que já passa está bem? Vê lá, se queres ir lá fora, vai lá fora. Rui. (ruído de fundo, alguns alunos falam entre si, em voz alta, de outros assuntos)
	Joana	Isto interessa para alguma coisa agora? (refere-se à caixa cuisenaire e dirige-se a um aluno que brinca com as barras)
	Al	Faltam cá peças.
	Joana	Pois faltam, porque não estão lá todas que nós tivemos que as dividir. João.
	Al-Jo	Eu estava a fazer outra coisa já mal, outra vez.
	Joana	Então como é que nós fazemos a divisão? Então, chegámos aqui à conclusão.
	al-Jo	Pois foi.

[10] Pelo que se segue, parece poder concluir-se o que Joana pede aos alunos é que apliquem a regra, acabada de enunciar, ao cálculo de quocientes. Porém, com o desenrolar da aula consegue que os alunos confirmem os quocientes através da manipulação das barras.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	Multiplicando o quê?
1h6m37s	Al-Jo	O dividendo pelo seu inverso.
	Joana	O dividendo pelo inverso do divisor. Meninas, já calcularam?
	Al	Já.
	Al	Oh stora, mas aqui não sei qual é que hei-de ...
	Al	Stora pode chegar aqui.
	Joana	Luís. (ruído de fundo)
	Al	(não se percebe o que pergunta)
	Joana	Então temos que fazer .. isto é igual, a mesma coisa que teres o dividendo, qual é que é?
	Al	É este.
	Joana	Sim. Vezes …
	Al	O inverso do divisor.
	Joana	Então indica lá isso tudo. Queres que escrevas aí o dividendo vezes … (há muito ruído de fundo) Meninos já resolveram? Oh Micael.
	Al	Assim stora?
	Joana	Ai, então na multiplicação este 5 é como se estivesse sobre 1. Então não é? Atenção. Então quanto é que é 15 a dividir por 2?
	Al	Oh stora. Stora. Aqui no 5 é a mesma coisa, 5 ..ham…
	Joana	Cinco sobre … é isso que queres dizer? Sobre 1. É a mesma coisa se estivesse sobre 1.
	Joana	A mesma coisa. E então agora como é que fazemos a divisão? Estivemos agora a ver. Multiplicamos, não é? o dividendo pelo inverso do divisor. Indica-me isso tudo. Qual é que é o dividendo?
	Al	Sei lá, stora (risos).
	Joana	Então, estivemos a ver isso aqui na divisão. Qual é que é o dividendo? Então é o 5. E o divisor?
	Al	É o 2.
	Joana	Dois terços. Está a dividir por tudo, por 2/3.
	Al	Oh stora mas tenho que meter isto aqui? Isto.
	Joana	Aqui. Escreve. Põe aqui à frente. Multiplica lá .. o 5
	Al	O 5 vezes 2/3.
	Joana	2/3? Então se é pelo inverso.
	Al	Ah, 3/2.
	Al	(trata-se de outra al) não sei qual é que havemos de …
	Joana	Então este aqui é o dividendo e este aqui é o divisor. Shiu. Todos para a frente. Rápido. Ouviste, Micael?
	Al	Ouviste, Rui? Vira-te para a frente.
	Joana	E calados. Micael.
	Al	Stora já fiz.
	Joana	Então aqui tem que ser .. Então se este é o dividendo, este é o divisor. É sempre a mesma coisa. O dividendo é este. então quanto é que é este?
	Al	5/3.
	Joana	5/3, agora multiplicamos pelo inverso do divisor.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Joana	Já fizeste? Então vai lá fazer. Olhem o Ricardo já fez, ele vai explicar. Então vai lá ao quadro. A verificação … e vão confirmar com o material que aí está. (Joana foi alertada pela PC para a verificação). Nuno, já fizeste? Já fizeste? Então isto é para quem? Vamos lá resolver.
	Al	Não consigo fazer as contas de dividir.
	Joana	Então foi o que nós estivemos aqui a fazer. Então como é que nós fizemos aqui? …Tínhamos o dividendo, tínhamos aqui o dividendo, e depois multiplicámos pelo inverso do divisor. Qual é que é o dividendo nesse cálculo, nesse quociente? É o quê?
	Al	É o de baixo.
	Joana	Não, é o 5.
	Al	O 5?
	Joana	Então vamos lá. Se a regra diz que fazemos o dividendo vezes o inverso do divisor .. Senta-te. Tanto tempo? Diz Inês. Ah, é assim. Muito bem. Porque é o dividendo vezes o inverso do divisor. Dá 15/2. Muito bem. E, agora, neste aqui fazes a mesma coisa.
1h11m30s	Joana	Percebeste, Filipa? Então é o dividendo .. qual é que é o dividendo aqui neste cálculo?
	Al	É o 5.
	Joana	É o 5. Então vá, põe lá, 5 … vezes, multiplicando o dividendo pelo inverso do divisor. Muito bem. Agora fazes o cálculo. Quanto é que é? (muito ruído de fundo) Pouco barulho.
	Al	Oh stora, eu enganei-me.
	Joana	Se te enganaste, corriges.
	Joana	Sim, então é 5/3 vezes
	Al	Vezes 3/2.
	Joana	Muito bem. Vezes 3/2. O Ricardo vai explicar. Ricardo, como é que tu fizeste?
	Al-Ri	Eu … agarrei em 5 braças (Há alunos que sobrepõem a voz)
1h12s24s	Joana	Sim, agarraste em 5 braças
	Al-Ri	E …
	Joana	Alguém está a ouvir? Nuno o que é que el está a dizer?
	Al-Ni	Nada.
	Joana	Ah. Não está a dizer nada. Ainda por cima és mal educado. E falta de educação sabes onde é? É lá fora. É para ti e para todos. (o aluno riposta) Está calado. Vira-te para a frente.
	Al-ri	Sabendo que uma braça … deu 7 um meio
1h13m06s	Joana	Deu 7 … explica lá outra vez.
	Al-ri	Um e meio mais um e meio, três … mais um e meio, seis ..
	Joana	Então que conta é que fizeste? Multiplicaste o quê?
	Al-ri	3/2
	Joana	Por ..

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Al-ri	Por 5
	Joana	Que deu ..
	Al-ri	Sete e meio.
	Joana	Sete e meio que é a mesma coisa que ter ..
	Al-ri	Quinze meios.
	Joana	Que é a mesma coisa que ter 15/2. Muito bem. Então indica lá o cálculo aí, Ricardo. Escreve aí os quociente que estão na folha. Shiu.
	Al	Stora, eu confirmei já.
	Joana	Já está?
	Al	Já.
	Al	Um e meio, um e meio vezes 5 …
	Joana	Dá sete vírgula cinco. E quanto é que dá 15 a dividir por 2, 15/2? Sete vírgula cinco, não é? (ruído de fundo relativo à resolução)
	Al	Então e como é que nós podemos fazer a divisão? Micael vira-te para a frente. Estou farta de te avisar. Tatiana está calada. Bom, como é que nós podemos chegar ao resultado da divisão? Tínhamos visto … Oh, Nuno!
	Al-Ni	Eles é que estão a falar para mim.
	Joana	E tu respondes, porquê? Está calado.
	Al-ni	Eles ..
	Joana	Está calado.
	Joana	Então nós como é que podemos fazer a divisão? Tínhamos visto uma regra anteriormente que … Diz lá, Inês.
1h15m27s	Al-In	… o divisor multiplicava-se pelo inverso do dividendo.
	Joana	Não. É ao contrário.
	al	Dividendo a multiplicar
	Joana	Que podemos multiplicar o dividendo
	Als	pelo inverso do divisor
	Joana	Pelo inverso do divisor. Exactamente. Mas o Ricardo comprovou isso através das barrinhas e ele agarrou em 5 barrinhas … que ele sabia valia cada uma um dia e meio. Não era? Que isso era o quê? 3/2. Que eram 3/2. Que chegou à conclusão que eram sete vírgula cinco. Contando as vossas barrinhas dá para ver.
1h16m22s	Joana	E o outro quociente? Inês, vai lá resolver o outro quociente.
	Al	Ela ainda não percebeu.
	Joana	Então ainda não percebeste a regra da divisão? A que nós estivemos a falar.
	Al-In	Isso percebi.
	Joana	Então pronto é a mesma coisa. Como é que nós fizemos? Qual é que é o dividendo aqui? Neste cálculo qual é que é o dividendo?
	Al-In	É 5.
	Joana	É 5. Muito bem.
	Al-In	Este é o divisor.
	Joana	E este é o divisor. Muito bem. Então multiplicamos o dividendo .. por quê? (não se ouve o que diz a aluna) Pelo ..?
	Al-in	Pelo inverso ..
	Joana	Do?

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Al-in	Divisor.
	Joana	Do divisor. Então faz lá. (ruído de fundo, conversas diversas)
	Joana	Indica tudo. Indica aqui tudo, dividendo vezes .. põe lá. dividendo que é 5 .. muito bem .. vezes o inverso do divisor, que é 3/2. e agora faz lá igual .. Inês explica aí o teu processo. Shiu. Resolvem esses assuntos lá fora.
	Al	Stora o Benfica perdeu.
	Joana	Está caladinho. (ruído aumenta) Inês o que é que tu fizeste? Oh, eu não sou capaz de ouvir e não estamos a falar de clubes. Diz lá Inês. Vira-te para a frente.
1h18m10s	Al-In	Para fazer a divisão vou multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor. (a aluna executa no quadro o cálculo pedido, ou seja, 5/3: 2/3)
	Joana	Que deu? Dois e meio.
	Al	Isso também é para passar, professora?
	Joana	Mas nós podemos observar isso através das barrinhas. Então há pouco nós tínhamos a braça e vimos que duas barrinhas .. vimos que duas barrinhas correspondia a 2/3. Esperem lá. Que era 2/3, que era um dia. Põe lá isso tudo dentro da caixa. Duas barrinhas correspondia a 2/3 e isso era um dia … e meio. E porquê? Porque aqui tínhamos 1/3, mais 1/3. não era? Então no final isto era igual a quê? Quanto é que isto dava? … Dava o quê? Um dia e meio, que era o quê? Três meios-dias. Era a mesma coisa, não é? isto é igual a 3 meios dias. Então nós aqui temos 5/3 a dividir por 2/3. Então temos 5/3 .. um, dois, três, quatro, cinco. Então temos 5/3 (está a fazer um esquema). Shiu. Temos 5/3, temos aqui 5/3 e nós queremos 2/3, então não é? Então quantos 2/3 é que cabem nos 5/3? Um, dois e mais meio. Então não é? Aqui temos um, aqui temos o outro e aqui temos mais meio. Então não temos? … aqui mais meio, zero virgula cinco? Então quanto é que vai dar?
	Al	Dez meios.
	Joana	Então temos 2/3, mais 2/3 e ainda sobra .. meio, não é? Por isso é que vai dar dois e meio. Um, dois e meio. Perceberam?
	Joana	Então agora vamos resolver mais actividades (Joana distribui ficha?)
1h21m37s	Al	Mais? Está quase a tocar.
	Als	Mais?
	Al	Oh stora só faltam 5 minutos. (há algumas trocas de impressões sobre a arrumação das barras)
1h23m36s	Al	Stora estão a arrumar. O Micael já arrumou.
	Joana	A barra imedaitamente.
	al	Nós queremos fazer isto.
	Joana	Então e fazes.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula16_03_06)

	Al	Mas é com as barras.
	Joana	Não são preciso barras. Dá cá. Mau. (Joana repreende os alunos que estão com comportamentos menos adequados à sala de aula) Zé Paulo estou farta de te verde pé. Senta-te lá.
	Joana	Nuno, lê lá a actividade.
	Al-ni	Se repartirmos 12 maçãs por 4 pessoas
	Joana	Eu disse o Nuno. O Nuno vai ler a actividade.
	Al-ni	Se repartirmos 12 maçãs por 4 pessoas …
	Joana	Alguém ouviu alguma coisa? O vosso colega vai ler. (ruído de fundo) Lê lá Nuno. Não é a Inês. Oh Inês não és tu. Vocês não entendem? Não cumprem as regras porquê? Lê lá Nuno.
		(continua o ruído de fundo e não se percebe a leitura)
	Joana	Então se repartirmos 12 maçãs por 4 pessoas, com quantas maçãs fica cada pessoa?
	Als	Três.
	Joana	Vai lá ao quadro. Sim, apaga tudo. Micael onde é que é o teu lugar. Diz Inês.
	Joana	Então o segundo é quantas metades de maçã há em 3/2. Faz aí o cálculo. Sim, retiras os dados e escreves tudo em condições.
	Al	Stora. Aqui, quantas metades de maçã há em três meios. Dois a dividir ..
	Al	Stora não dá isto?
	Joana	O quê? Calma, vão-se lá sentar. Vão-se lá sentar que já vamos fazer no quadro. Tudo de pé não pode ser.
1h26m43s	Joana	Ui. Tu fizeste aqui um cálculo qualquer mal. Ah! Porque aqui diz: quantas metades de maçã há em 3/2. Então é três meios, não é 3. E metade .. como é que nós escrevemos a metade?
	Al	Um meio.
	Joana	Um meio.
	Al	Stora é a dividir?
	Joana	Sim. Faz lá. Quanto é que dá? (muito ruído de fundo e muita agitação) Vai-te sentar Ricardo. Meninas. Ricardo vai-te sentar. Ponham lá as barrinhas dentro.
	Al	Stora deu-me isto.
	Joana	Não é preciso fazer a conta. Dá 3 maçãs. E agora quem já fez o outro a seguir?
	Als	Eu.
	Joana	Lidia.
		[Toque da campainha de final de bloco]
	Al	Ela já foi, stora.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

Transcrição de parte da aula de Joana
21/03/2006

	Joana	Tomem atenção. Eu mandei-vos um problema para casa. (troca de impressões sobre as fichas que são para entregar à professora, Joana repreende os alunos que estão mais agitados) Oh Micael, onde é que está o problema que eu mandei para casa?
	Al-Mi	Está em casa.
	Joana	Então, não era para ter ficado em casa. Quem é que resolveu?
	Als	Eu.
	Joana	Levantar o braço. (pausa) Pode ser a Carina. Então o que é que dizia o problema? A primeira alínea já tínhamos feito cá. Oh Hugo, calado. Lê lá a alínea b.
	Al-Ca	Quantas metades de maçã existem em três meios.
	Joana	Então queremos saber o quê?
	Al-Ca	Quantas metades de maçã existem em três meios.
	Joana	Então queremos saber quantas metades de maçã há em 3/2. E o que é que temos que fazer para isso?
	Als	Dividir.
	Joana	Atenção é a Carina. Dividir o quê? Vai lá ao quadro.
	Al	Stora fiz assim.
	Joana	Sim. Pode ser. Mas pela divisão que é o que nós temos andado a trabalhar .. Então queremos saber ..
	Al	Está mal, Carina. O primeiro nunca se muda.
	Al	És mesmo burro.
	Joana	Atenção. Porque multiplicamos o dividendo pelo inverso do divisor. O que é o inverso é só o divisor. Caladinho.
	Al	Não é nada.
	Joana	Não senhor. Mantém-se.
	Al	O primeiro nunca se muda.
	Joana	Isso (dirige-se a Carina que está no qaudro). Diz (Joana foi interpelada por uma aluna).
	Al	Por que é que é ½?
	Joana	Por que é que é ½? Porque nós queremos saber quantas metades. O que é metade? É ½. Que foi Patrícia? Então nós queremos saber quantas metades de maçã há em 3/2. Então como é que nós fazemos? Colocamos os 3/2 e dividimos .. por ½. Então metade não é ½? Se dividirmos por ½ já sabemos qauntas vezes é que lá cabe o ½, a metade. É a mesma coisa que fizemos da outra vez com as barrinhas. Nós

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		não as dividimos também por aquilo que o rato andava? … Tínhamos a braça e depois fomos ver quantas vezes é que ele andava 2/3, não foi? Quantas vezes 2/3 cabia. Aqui é a mesma coisa. Temos os 3/2 e queremos saber quantas vezes cabe ½ nos 3/2, não é?
	Joana	Quero isso passado no caderno. Ricardo. Deixa lá. Lá por teres ganho não quer dizer nada. Tens de trabalhar na mesma. (Joana circula na sala e verifica o que os alunos estão a fazer)
	Al	Mas olhe stora aqui falta o sumário da última aula.
	Joana	Deixas aí o espaço. Eu não tenho cá o livro de ponto.
	Al	Stora qual é o sumário da aula passada?
	Joana	Não tenho cá o livro de ponto. Se estivesses atento já sabias.
	Al	A stora não tem cá o livro de ponto (em voz alta um aluno informa os colegas e dá origem a algum barulho)
4m15s	Joana	Agora vamos fazer outro problema. Também é muito fácil. (Joana distribui uma ficha. Há alguns diálogos que não transcrevi. É de notar que vários alunos à medida que recebem a ficha dizem que já fizeram o “problema”, ao que Joana responde negativamente «comigo não». alguns alunos dizem que foi no fim do teste de ciências)
	Joana	Não foi não. Tem aí as pizzazinhas, mas se vocês lerem não tem nada a ver. Vocês deixam-se enganar por um desenho.
	Al	É 2 a dividir por 4?
	Joana	Se dividirmos metade de uma pizza. (Joana lê parte do enunciado)
	Al	É 2 a dividir por 4.
	Joana	Dois a dividir por 4? Não. Então dizemos «se dividirmos metade de uma pizza por 4 pessoas que parte da pizza cabe a cada pessoa?». Então é metade .. se dividirmos metade por 4. Está tudo a dizer. Então o que é que lá tinhas? Estava bem.
	AL	Mas não é 2? Dois também é ..
	Joana	Então metade ..
	Al	Metade também é 1 …
	Joana	Oh Zé Paulo .. tens de organizar isso é em casa.
	Al	Estou à procura de uma ficha.
	Joana	Lidia. Oh Rui.
	Al	Oh stora eu só sei fazer sem contas.
	Joana	Só sabes o quê?
	Al	Não consigo fazer as contas, mas sei a resposta.
	Joana	Então, como não sabes fazer as contas? Vamos lá fazer as contas.
	Al	Ih, oh stora. Não.
	Joana	Então dizes, se dividirmos metade de uma pizza por 4, já está a dizer tudo o que tens de fazer.
	Al	Mas oh stora eu não ..
	Joana	O que é metade? Como é que nós representamos a metade?
	Al	Um meio.
	Joana	Então? E depois temos de dividir por quanto?
	Al	Por 4.
	Joana	Então, como não sabes fazer as contas? Lidia vai lá fazer a alínea a).

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Podes fazer deste lado do quadro.
7m16s	Joana	Lê lá primeiro o problema.
	Al- Li	Se dividirmos metade de uma pizza por 4 pessoas, que aprte da pizza fica para cada uma. (a leitura é pouco perceptível pois dois alunos falam em voz alta sobre canetas)
7m29s	Joana	As canetas são para escrever e não para estar a brincar com elas. Se te volto a ver brincar com elas ficas sem elas. Não tas dou mais.
8m	Joana	Então queremos dividir metade de uma pizza por 4 pessoas.
	Al	Stora não é preciso fazer contas.
	Joana	Não precisas de fazer contas? Então como não precisas de fazer contas? Quanto é que deu? (Joana observa o procedimento seguido pelo aluno) Tens isso mal. Vê lá. Está bem. Podes-te sentar. (Joana dirige-se à aluna que estava no quadro) Não vês daí Tatiana?
	Al-Ta	Não.
	Joana	Espera aí que eu ligo-te a luz. Já vês.
	Al	Preciso de uma calculadora.
	Joana	Precisas de uma calculadora para fazer aquele cálculo?
	Al	São burras.
	Joana	Psiu. Ninguém é isso aqui dentro. Quem já fez a alínea b levanta o braço.
	Al	Eu já fiz.
	Joana	Patrícia, então vai lá.
	Al-Pt	Não stora … (não se percebe)
	Joana	Já fizeste a alínea b, Ricardo?
	Al-Ri	Já.
	Joana	Então vai lá fazer.
9m17s	Joana	Os cálculos. Eu quero que me representes tudo. Se puseres lá só isso .. então vá identifica tudo (Joana dirige-se, em voz baixa, a Ricardo)
	Al	Eu acho que é ¼ … (não se percebe)
	Joana	Um oitavo? Um oitavo, porquê? Aqui? Na alínea b? Porquê 1/8?
	Al	(não se percebe)
	Joana	Se calhar é ao contrário. Vê lá o que tens: «se cada pessoa comer um quarto de pizza, para quantas pessoas dá metade da pizza». Queremos saber metade da pizza para quantas pessoas é que dá.
	Joana	Está correcto. Vai lá fazer.
	Joana	Vocês escrevam a resposta à alínea a que a Lidia esqueceu-se e eu não reparei.
	Al	Qual é que é a resposta?
	Joana	Então qual é que é? Vê lá, de acordo com o problema que aí tens … Então quantas partes da pizza é que cabe a cada pessoa?
	Al	Cada pessoa .. 1/8 de pizza.
	Joana	1/8 de pizza. Muito bem. Ricardo, abres o caderno e pões-te a trabalhar.
	Joana	(Joana circula por entre os alunos, mas há vários alunos que continuamente falam com os colegas)

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Qual é que é a resposta?
	Al	Tu consegues, Patrícia?
11m10s	Joana	Cabe a cada pessoa ..
	Al	Duas fatias.
	Al	Duas fatias de pizza?
	Joana	Sim. (pausa, bastante ruído de fundo) Não, a duas pessoas.
	Joana	Então perguntam-nos o quê? Patrícia, lê lá. Mas tens de te virar para nós, assim de costas não dá. (muito ruído de fundo)
	Al-Pa	(não se percebe bem o que lê) para quantas pessoas dá metade de uma pizza.
	Joana	Então queremos saber: se cada pessoa comer um quarto de pizza, para quantas pessoas dá metade de uma pizza». Então quanto é que dá? Para quantas pessoas é que dá metade de uma pizza?
	Als	Duas.
	Joana	Duas pessoas. Atenção, não é cabe a cada pessoa duas fatias.
		(Joana distribui outra ficha)
	Al	Outro, stora?
12m32s	Joana	Sim. Então são tão pequeninos. (muito ruído de fundo) Shiu. Então Patrícia, já está? Pergunta-nos para quantas pessoas dá metade de uma pizza. Então … metade de uma pizza dá para duas pessoas. (muito ruído de fundo)
	Joana	Está lá metade (Joana responde aos alunos que interpelam Patrícia sobre o que acabou de escrever no quadro)
	Al	Esta é assim?
	Joana	Não. Vê lá bem se é assim.
	Al	Então não é divisir, stora.
	Joana	É dividir. Mas vê lá bem se é assim. O que é que nós queremos saber? «Quantos pedaços de três meios centímetros podem ser cortados». Podem ser cortados numa fita com 15 cm. Portanto, tens 15 cm, queres saber quantos pedaços de 3/2. se calhar não é assim. Vê lá. Assim tens 3/2 e queres saber quantos 15 é que lá cabe.
	Al	Stora então não é 15 a dividir por …
	Joana	Tu tinhas ao contrário. Resolve aí no lugar, para ires resolver ao quadro.
	Al	Stora (não se percebe) pode ser? Não pode não.
	Joana	Porquê? Mostra lá.
	Al	Fiz mal.
	Joana	Não, não.
	Al	Está bem?
	Joana	Ah.
	Al	Fiz mal.
	Joana	Não está bem é aqui. Então a multiplicação .. o que é que fizeste? Achaste o mesmo denominador? Atenção não é nenhuma soma, é uma multiplicação.
		(Joana circula e observa oq eu os alunos estão a fazer. Há pequenos

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		diálogos de confirmação do procedimento seguido)
15m41s	Joana	Inês já fizeste?
	Al –In	Vou a quadro?
	Joana	Sim. Apaga este lado. Lê lá o enunciado, primeiro.
	Joana	Sim. Assim já está bem. Por isso é que dava uma coisa impossível (Joana comenta a correcção do cálculo do aluno com que trocar impressões há pouco)
	Joana	Lê lá, Inês.
	Al-In	Quantos pedaços de três meios centímetros de comprimento podem ser cortados de uma fita com 15 cm.
16m28s	Joana	Então queremos saber o quê? Quanto é que temos de fita?
	Al-In	15 centímetros.
	Joana	Shiu. Micael estou-vos a alertar. Então temos de fita 15 cm e queremos saber o quê?
	Al-In	Quantos pedaços podemos cortar em 15 cm.
	Joana	De quê? De três meios centímetros, não é? Então vamos lá a ver quantos podemos cortar.
		(Joana circula pelo lugar enquanto a aluna resolve no quadro, verifica o que os alunos estão a fazer e chama a atenção aos que nada fazem)
	Joana	Atenção, 30 a dividir por 3 dá 10. (dirige-se a Inês) Diz. (responde à interpelação de um aluno)
	Al	Eu meti 15 sobre 1. Faz mal?
	Joana	Ah não faz mal, sim porque 15 é a mesma coisa do que se estivesse sobre 1, não é? 15 a dividir por 1, qaunto é que é?
	Al	15.
	Joana	15, não é? (dirige-se a Inês) Então a resposta é ..?
	Al-In	Podem ser cortadas 10 fitas[11].
	Joana	Sim. Dez fitas, não. Pedaços .. podem ser cortados 10 ..
		(Joana começa a distribuir outra ficha)
	Al	Oh stora, só há fichas. Nós nunca usamos aqui o livro.
	Al	Stora não apague que eu tenho de passar.
	Al	Ainda mias fichas.
	Joana	Não são fichas, são problemas e são tão giros de resolver.
	Al	São!
	Joana	Pois são. (há um aluno que diz qualquer coisa que não se percebe) Pois mas se tu continuares a resolver vais saber resolver depois, no final. Meninas, recortes é em casa. Sim?

[11] NC: a aluna resolve do seguinte modo:

15 : 3/2 = 15 x 2/3 = 30/3 = 10
R: podem ser cortadas 10 fitas.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	Al	Não sei fazer .. dividir com fracções
	Joana	Então .. Oh Elodie, vimos que é multiplicamos o divisor pelo inverso do dividendo. Então é só inverteres o dividendo, mais nada, e multiplicares .. pelo dividendo.
19m34s	Joana	Estou-vos a distribuir um problema …que é um problema an… Luís pára lá! … É um problema antigo e é muito interessante. Vocês vão ler em silêncio e vão ver o que é que conseguem retirar daí, está bem? Os dados todos.
	al(a)	(algum ruído de distribuição da folha).
	Al	Stora posso ler o problema?
	Joana	Eu disse para lerem em silêncio. Todos têm? Francisco lê o problema. Luís estás a ler o problema? E o Ricardo?
	Al	Não. Não sei, não faço.
	Joana	Então ainda nem sequer leste. Vamos lá a ler. Oh, Micael não é para estares a pintar isso.
	Al	Já retirei os dados todos.
	Al	Oh stora eu não percebo nada isto.
	Joana	Porque estás só a conversar desde a primeira aula que começamos a dar a divisão.
	Als	(não se percebe)
	Joana	Desde a primeira aula. Diz.
	Al	Stora já tirei os dados e agora?
	Joana	Já leste bem o problema?
	Al	Já. [AP circula entre os alunos]
	Joana	Oh Rui eu disse que os recortes era em casa, guarda lá a tesoura e lê o problema.
	Al	É merrador ou mercador?
	Joana	O mercador.
	Al	Mas está cá merrador.
	Joana	Não é o mercador
	Al	Tá, tá
	Joana	Faz diferença, atenção. Está em letra antiga porque é um problema antigo. Mercador olha ali a diferença. O r tem ali uma perninha e este não tem.
	Al	O que é isso, merrador?
	Joana	Mercador.
	Al	Está cá merrador.
	Joana	Lê correctamente o que lá está.
	Al	Está cá merrador.
	Al	Mercador[12].

[12] NC: na própria aula, a PC referiu à investigadora ter sido ela a sugerir a escrita do problema em letra antiga. Há um aluno perto de mim que comenta que a professora devia ter posto outro tipo de letra. Eu

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

22m08s	Joana	Já todos leram?
	Al	Já.
	Al	Se isto fosse um c stora …
	Joana	Olha ali a diferençam, o r tem uma perninha ali e este não tem. Faz diferença.
	Joana	Quem é que me quer explicar o problema? Levanta o braço.
	Al	Oh stora este problema é parecido com aquele que estava lá em Castelo Branco.
22m37s	Joana	Muito bem, estava a ver que ninguém chegava a essa conclusão.
	Al	Quê?
	Joana	Este problema esteve na exposição.
	Al	Eu não o fiz.
	Al	diz era o do *money*.
	JOANA	Este? Vês que ainda não leste o problema?
	Als	Era o do trigo … É o do trigo …
	Als	Eu não fiz o do trigo.
	JOANA	Inês explica-nos lá o problema.
	Al	Eu fiz-os todos.
	JOANA	Mas agora vamos todos fazer. (continuam a ouvir-se vozes que dizem não ter feito e outras que dizem ter feito)
23m06s	JOANA	Eu pedi à Inês e não sou capaz de a ouvir.
	Al	Dá 501.
	JOANA	Grande mentira.
	Al	É, é.
	JOANA	Vamos ver quanto é que dá. Se fizerem já vão ver. Inês.
	Al	A stora disse que era igual, só que os números são diferentes.
	JOANA	Não é tal e qual.
	Al	Dá 501.
	JOANA	Inês qual foi a ideia geral que tiraste do problema[13]?
23m36s	JOANA	Então lê lá o problema. Se calhar é melhor lermos o problema. Lê lá em voz alta.
	Al	«Um mercador empregou 300 réis em 30 alqueires de trigo. Este mercador quer vender o trigo e, para isso, tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era 3/4 (três quartos) do dele e vendeu cada alqueire pequeno por 10 réis.»
	JOANA	Então o que é que nós podemos retirar daí? O que é que fez o mercador?
	Al	Foi ao mercado.
	JOANA	Filipa ajuda lá.

também concordo, pois o facto foi aproveitado pelos alunos mais indisciplinados, gerando confusão desnecessária..

[13] NC: Foi pena não ter apelado à memória dos alunos para tentar perceber do que é que eles se recordavam, nomeadamente, se se recordavam da estratégia de resolução seguida na exposição. Isso permitiria encarar o problema, naturalmente, como uma situação de divisão por agrupamento.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	Al	(Não se percebe)
	JOANA	Então temos o mercador …e empregou, ou seja, comprou, não é? Gastou 300 réis em … quantos alqueires?
	Als	Em 15 … em 30.
	JOANA	Em 15? Vejam lá. Quanto …?
	Als	Em 30 (coro).
	JOANA	Em 30 alqueires. Então o que é que ele fez? Com 300 réis comprou 30 alqueires de trigo e depois esse mercador …
	Al	Dividiu em metade, em 15 …
	JOANA	Dividiu, muito bem, o trigo ao meio que eram …
	Al	15 alqueires.
25m08s	JOANA	15 alqueires. Então fez 15 alqueires para um lado e 15 alqueires para o outro… que é metade de 30…
	al	15 levou-os a um mercado…
	JOANA	Levou-os onde Hugo?
	Al	A vender, a um mercado.
	JOANA	Levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era quanto …?
	als	Três quartos do dele.
	JOANA	Então o alqueire era igual ao dele, ou não?
	Al	Não.
	JOANA	Então quanto é que era?
	Al	Era ¾ do dele.
	JOANA	Eram ¾ do dele[14] e vendeu cada alqueire pequeno a …
	Al	A 10 réis.
	JOANA	10 réis. Muito bem. Então vendeu cada alqueire daqueles[15] a 10 réis. E depois?
	al	Depois levou os outros 15 a outro mercado.
	JOANA	A outro mercado. Sim, e onde alqueire era quanto?
	Al	5/4 do dele.
	JOANA	5/4 do dele. Então era maior ou menor do que os ¾ anteriores?
	Als	Era maior.
26m02s	JOANA	Então temos que … foi ao outro mercado onde o alqueire era 5/4 do dele e vendeu cada alqueire por quanto?
	Al	Por 10 réis.
	JOANA	Por 10 réis. Ao mesmo preço ou não do outro?
	Als	Não.
	JOANA	Não? Vê lá a quanto vendeu o outro, então, Ricardo? … Por quanto é que vendeu o outro?
	Al	(não se percebe)
	JOANA	Era o mesmo, 10 réis. Depois temos a alínea a). Nuno lê lá a alínea a).
	Al	«Com os 15 alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado (merrador), quantos alqueires pequenos conseguiu fazer o mercado (o

[14] **NC:** Não explorou o significado da fracção ¾ no contexto do problema, isto é que estes ¾ significam uma relação entre os volumes dos dois alqueires. Pode colocar-se a quewstão de saber se chamei pouco a atenção para esse aspecto nas SF?
[15] NC: Não questionou os alunos sobre a razão porque se chama pequeno a esse alqueire.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		mercador)?»
26m57s	JOANA	Então vamos lá resolver.
	JOANA	Resolve. Não tens o teu caderno?
	Al	Não trouxe, esqueci-me.
	joana	Tens uma folha aí, depois em casa passas para o caderno. Muito bem. Já podes ir tentando fazer o outro. Tu ainda não foste ao quadro, pois não?
	Al	Oh stora, então se é igual tem que de dar o mesmo.
	Al	15 a dividir por ½.
	AP	Por ½? ½ porquê? … (silêncio do aluno) 15 a dividir por ½? È 15 a dividir por qualquer coisa, mas não é por ½[16].
	Al	Por 30 alqueires?
	AP	Por 30? Não. Pior ainda.
	Al	(não se percebe)
	AP	Eu é que vos mando cheirar isso se não fizerem o problema. Francisco. Aqui não há corrente de ar . . Vá Luís.
	Al	(não se percebe)
	AP	Sim. Então dá quanto?
	Al	20, salvo erro.
	AP	ok.
	Al	Stora não percebi nada.
	AP	Não estás a perceber?
	Al	Não.
	AP	Então o que é que ele fez? Tinha os 30, dividiu em 15, não foi? 15 levou para um mercado e levou outros 15 para o outro. Num mercado, os alqueires era quanto do dele?
	Al	¾.
	AP	3/4 e no outro mercado o alqueire era quanto do dele?
	Al	(20?) (não se percebe)
	AP	5/4 no outro. Agora queremos saber quantos alqueires é que fez no …
	Al	Fazemos também o b?
28m49s	AP	Sim, fazem também o b. Carolina. Carolina, vai lá resolver. Mas tens de colocar os dados tudo direitinho.
	Al	Faz a letra grande para se ler bem.
	AP	Escreve em cima, tu és alta.
	Al	(ouve-se algum ruído de fundo, mais do que um aluno dirige-se á aluna que está no quadro)
	AP	Carolina. Shiu! Carolina. Escreve lá em cima, tu és alta.

[16] NC: Não foi discutida com os alunos a questão de saber qual a operação que nos permite saber quantos alqueires pequenos foram feitos, bem como a uestão de justificar que se trata de um problema resolúvel através da divisão.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Muito bem. Vinte quê? Porque é que puseste aqui 10? [AP circula e fala com os alunos] Porque é que puseste 10? Quantos alqueires é que ele tinha? Ai … quantos alqueires é que ele levou, para esse mercado? Quanto é que foi? Espera aí. Sim? Quantos alqueires é que ele levou?
	Al	(não se percebe)
	AP	Por 10? Porquê? Nós queremos saber quantos alqueires
	Al	(a aluna diz qualquer coisa que não se percebe)
	AP	Ah. Muito bem.
	Al	Eu aqui dá-me 8, só que aqui já …
	AP	Mas eu quero saber em todos, neste mercado e nesse. Tudo junto. Nós já vamos fazer esse.
30m54s	AP	Carolina explica lá porque é que fizeste isso. Tomem atenção porque há pessoas que não perceberam.
	Al Carolina	15 alqueires…
	AP	Então tínhamos 15 alqueires, o senhor tinha 15 alqueires. Foi quanto levou para onde?
	Al Carolina	Para o mercado.
	AP	Para o primeiro mercado.
	Al Carolina	E … (não se percebe)
	AP	E nesse mercado…
	Al Carolina	Nesse mercado vendeu os alqueires por ¾…
	AP	¾ porquê? Porque era o alqueire que era utilizado nesse mercado.
	al Carolina	Depois fui …
	AP	Fomos ver …
	Al Carolina	…(não se percebe)
31m38s	AP	Diferença não. Fomos ver o quê? Filipa?
		Quantos alqueires ficaram (voz de outro aluno que se sobrepõe)
	AP	Quero ouvir a Filipa. Quantos? Olhem eu ainda não consegui ouvir a Filipa.
	al	(não se percebe)
	AP	Então fomos ver quantos alqueires de ¾ podíamos fazer nos 15, não foi? E quanto é que pudemos fazer? Quantos alqueires é que fizemos? … Então é só olhar para o resultado[17].
	als	20.

[17] Nota de campo (cópia da resolução feita no quadro pela aluna Carolina):

Dados 15 alqueires ¾ 300 reais	 15: 3/4_= 15x4/3 = 20 R: Conseguiu fazer 20 alqueires pequenos

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	AP	Conseguimos quê?…
	Al	20 alqueires.
	AP	Então conseguimos fazer 20 alqueires, quê? Pequenos.
	Al	Sim pequenos.
32m27s	AP	Pequenos. … (há alguns alunos a falar, mas não me parece que seja sobre o problema)
	AP	Todos perceberam porque é que dividimos o 15 por ¾? Percebeste Melissa? …Anabela? …Percebeste Inês? … Sim André?
	Al Rui	Eu fui lá e perguntei: você tem aí alqueires? E ele: tenho, tenho….
	AP	Onde está a resolução dos problemas?.... Espera. Já todos resolveram o seguinte?
	Als	Eu já … eu já … mas a stora tem de ver se está bem.
	AP	Já fizeste o seguinte Zé Paulo?
	Al	Eu já.
	Al	Stora.
	Al	Olhe aqui stora.
	AP	Percebeste porque é que fizemos aquilo, Zé Paulo? Estás tão sério. Olha o Zé Paulo ainda não percebeu.
	Al	Eu também não.
33m39s	AP	Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo?
	Al	Eu não porque eu também não percebi.
	JOANA	Então eu perguntei se todos tinham percebido e disseram-me que sim.
	Al	Sim …
	Al	Eu não falei. Não falaram por mim.
	JOANA	Manifestavas-te. Quem é que é capaz de explicar ao Zé Paulo e à Elodi?... Então ninguém é capaz? Oh, Carolina explica lá outra vez. Tomem atenção.
	Al	A Carolina enganou-se ali, não é consegui fazer 20 alqueires pequenos.
	JOANA	Conseguiu, falta lá o u. Muito bem. Carolina explica lá o teu raciocínio. Porque é que fizeste aquilo?
34m14s	Al Carolina	Tínhamos 15 alqueires e no mercado ã …
	JOANA	Então tínhamos 15 alqueires e fomos levar a um mercado onde o alqueire lá utilizado era …
	Al Carolina	¾.
	JOANA	¾ do alqueire do mercador. Sim? Então queremos saber com os 15 alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado, quantos alqueires pequenos conseguiu fazer o mercador. Percebeste Elodi? Então se temos os 15 alqueires no primeiro mercado, o alqueire pequeno eram ¾ do dele. Tínhamos 15 alqueires fomos ver quantos ¾ podemos fazer nos 15[18]. Sim? Quantos grupos de ¾ podemos fazer. Depois diz que não percebes.

[18] NC: AP não questiona o aluno de modo a que este tenha a percepção clara que sendo usado um padrão mais pequeno, o mercador vai conseguir fazer mais de 15 alqueires e esse aspecto foi tratado explicitamente nas SF.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	Al	Stora chegue aqui, se faz favor.
	JOANA	Ouviste, Micael? Estás na aula para resolveres o que os outros estão a fazer.
	Al	Stora já fiz.
	Al	Oh stora é 10 a dividir por 5/4.
35m22s	JOANA	10? Porquê?
	Al	Então stora 10 …ou …
	JOANA	10?
	Al	5/4 a dividir por 10…
	JOANA	Então quero saber o segundo mercado, põem-me 10?
	Al	5/4 a dividir por 10.
	JOANA	10? Então os 10 é o quê?
	Al	São 2 (?) a dividir por 5/4? … 2 … 2 stora?
	JOANA	Já resolveste o outro? Sim? Vai lá resolver Melissa.
36m03s	JOANA	Não, não apagues. Espera aí.
	Al	É preciso por 5/4?
	JOANA	Sim, pões os dados ao lado. … Põe um traço para saberem que esses são do primeiro. Isso está bom.
	Al	Oh stora chegue aqui, se faz favor.
	JOANA	48? Fizeste isto mal. 15 vezes 4 quanto é que dá?
	Al	Oh stora chegue aqui, se faz favor.
	JOANA	15 vezes 4 não dá isso. Olha ali 15 vezes 4 quanto é que deu?
	Al	60.
36m47s	JOANA	Então não dá 24.
	Al	Oh stora chegue aqui, se faz favor.
	JOANA	Não sei por quê mas para o teu lado há sempre muito frio.
	Al	Oh stora é por 30?
	JOANA	30? Não. Já vamos ver. Achas que é por 30?
	Al	O mercador ganhou dinheiro, não ganhou?
	JOANA	Ganhou, mas eu quero saber quanto. Então, Melissa. Tomem lá atenção, depois dizem que não percebem. Melissa porque é que fizeste isso? Porque é que fizeste esse cálculo? (ruído de fundo)
	JOANA	Porque é que fizeste esse cálculo? Quem é que ajuda a Melissa? Lidia. Tomem atenção[19]. (ruído de fundo) Lidia
	Al	Nós tínhamos 15 alqueires, fomos a um mercado onde o alqueire era …
	JOANA	Então tínhamos outros 15 alqueires porque dividimos o quê? Os 30 … dividimos os 30 ao meio. Então levámos 15 alqueires para um mercado e levámos outros 15 para outro mercado. Então temos os 15 alqueires e

[19] Nota de campo (cópia da resolução feita no quadro):

Dados 5/4	b) 15: 5/4 = 15x4/5 = 60/5=12 R: Ele conseguiu vender 12 alqueires grandes.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		levámos ao segundo mercado e depois?
	Al	(não se percebe)
	JOANA	Alguém ouviu o que ela disse?
	Al	Não, estávamos só a falar.
	JOANA	Então estão lá caladinhos. (ruído de fundo) Diz lá. Shiu!
	Al	O alqueire era …5/4 do dele.
38m36s	JOANA	Então no segundo mercado o alqueire era 5/4 …do alqueire dele. Então tínhamos 15 alqueires e fomos ver quantos 5/4 de alqueire conseguimos fazer nos 15. Por isso é que dividimos os 15 que era o que nós tínhamos por 5/4 porque era o alqueire que se usava nesse mercado, que se utilizava nesse mercado. Então quantos alqueires é que ele conseguiu fazer?
	Als	12.
	JOANA	12. Então ali era o alqueire grande.
	Al	Stora na c é só para dizer se perdeu ou …se ganhou …
	Al	Tens de mostrar os cálculos.
	JOANA	Mas temos de fazer cálculos. Então perdeu ou ganhou assim …
	Al	(não se percebe)
	Al	Já fiz.
	JOANA	O c? Quanto é que deu?
39m36s	Al	320. Ganhou!
	JOANA	É. … Esses alqueires eram pequenos ou grandes?
	Al	Stora como é que se chamam àquelas …
	JOANA	E o cálculo, onde é que está? Então eram pequenos ou grandes?
	Al	Grandes.
	JOANA	Então eram grandes.
40m27s	JOANA	Já todos leram a alínea c)?
	Al	Já …Eu já.
	JOANA	Deixa estar aqui o caderno quietinho, senão tenho que o tirar. (comentário despropositado de um aluno) Oh Rui a última parte é que foi muito feia.
	Al	Foi por causa do porra?
	JOANA	Estava-te a alertar não era para dizeres outra vez.
41m14s	al	Oh stora não estou a perceber. É assim … com isto?
	JOANA	Estás lá quase. Muito bem. Mas espera, antes de fazeres isto. Isto aqui não é preciso agora. Queres saber se ganhou … espera faz-me primeiro este cálculo aqui. Quanto é que dá?
	Al	… quanto é que ele ganhou…(Toque da campainha)[20]
	JOANA	Já vamos ver.

[20] Notas de campo: ao ouvir o toque um aluno (João) sentado perto de mim comenta, dirigindo-se às outras estagiárias: « Toque da 2ª hora. Passou tão rápido! Quando se gosta de uma coisa passa tão rápido!». Alguns momentos antes esse mesmo aluno tinha também comentado sorridente: Ganhou! Fez mais 20 réis.»

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Então João. Lê lá o segundo … lê lá a alínea c. Vá todos atentos.
	Al	«O mercador ganhou ou perdeu dinheiro na venda do trigo?»
	JOANA	Então queremos saber o quê?
	Al	Ganhou.
42m00s	Al	Se ganhou ou perdeu …
	JOANA	Se o mercador ganhou o perdeu na venda do trigo.
	JOANA	Então por quanto é que ele vendeu o trigo? … (ruído de fundo) 10 réis. Ricardo vendeu o trigo por 10 réis em que mercado?
	Al	No mercado …
	Als	Nos dois.
	JOANA	Nos dois, nos dois. Nos dois mercados ele vendeu o trigo por 10 réis. Vai lá João.
	Als	Eh! Oh, stora. ….Eu ainda não fui. Já foste ao quadro Inês. (ruído de fundo)
	EB	Apagam as respostas e escrevem do outro lado. … Não espera. Apaga aqui. Atenção, meninos.
	Al	Stora não apague. Ainda não passei.
	JOANA	Só vou apagar as respostas.
	Al	As respostas pode apagar.
	JOANA	Esperem lá …
	Al	Oh stora ainda não acabei de passar essa.
	JOANA	Calma![21] … Vamos reduzir este aqui também.
	Al	Oh stora.
43m53s	JOANA	Então vamos ver se o mercador ganhou ou perdeu dinheiro.
	Als	Ganhou.
	Al	Perdeu trigo, mas ganhou dinheiro.
	Al	Ganhou 20 réis a mais.
	JOANA	Então João porque é que estás a fazer 10 vezes 20?
44m08s	Al	Porque … 10 réis vezes 20 alqueires.
	JOANA	Vezes 20 alqueires que ele fez em que mercado?
	Al	No primeiro (há outras vozes que não se percebem)
	JOANA	No primeiro! (ruído de fundo)
	JOANA	Então se o alqueire era mais pequeno (ruído de fundo de vários alunos que se dirigem a JOANA, não se percebe) sim era 10 réis … Então vendeu os alqueires a 10 réis tanto num mercado como no outro, não foi? Então no primeiro mercado ele fez 20 alqueires…
44m40s	Al	Stora também se podia fazer …20 … 20 mais 12 e depois vezes 10.
	JOANA	Muito bem. O Luís está ali a dizer que poderíamos substituir estes dois cálculos por …
	Al	10 vezes 30.
	JOANA	10 mais 12 que dá 32, vezes 10 … que vai dar o mesmo. Sim?

[21] Notas de campo: AP tenta organizar o que está no quadro. Para isso apaga algumas coisas e reescreve-as noutro lado.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Podemos fazer assim ou 20 mais 12 vezes 10.
	Al	Ele ganhou 20 réis a mais.
	JOANA	Vamos ver, vamos ver. Então quanto é que isso dá João?
	Al	320.
	JOANA	Sim…faz aí ao lado … podes fazer uma chaveta ao lado e dizer quanto é que é. Isso.
	Al	(ruído)
	JOANA	Dá 320 quê?
	Al	Réis.
	Al	… (não se percebe) ou 10 vezes 32.
	JOANA	Sim senhor. Dá 300 réis. Então quanto é que ele tinha feito? Por quanto é que ele comprou os alqueires?
	Al	Por 300 réis.
	JOANA	Por 300 réis. E agora o que é que temos de fazer? Shiu! Oh meninos está muito barulho. (silêncio gradual) Se ele comprou por … 300 é para vermos o quê?[22]
46m35s	JOANA	João escrevemos aqui em cima como é que nós obtemos os 320. (vozes que se sobrepõem)
	Al	Oh stora tanta coisa não sei para quê? Nós já sabemos que 320 é maior do que 300.
	JOANA	Sim mas nós precisamos disso. Sim podes. Então a resposta …(várias vozes)
		Se fosse em fracção …
	Al	Ah é verda… a expressão numérica.
	JOANA	Sim, sim. Muito bem. Já vamos ver.
	Al	Ali antes do mais 120 é dois x?
47m38s	JOANA	Dois x?
	Al	Além tá … além em cima …
	JOANA	120? É 200. Então como é que obtemos 320? (ruído de fundo)
	Al	Oh João eu não estou a perceber nada disso.
	JOANA	O que é que não estás a perceber Rui? Shiu! Olha assim também eu não te percebo, não te posso entender.
	Al	Não estou a perceber nada…
	JOANA	Se falares em condições, respondo também em condições. Percebes? O que é que não estás a perceber, Rui?
	Al	Nada.
	JOANA	O quê?
	Al	Aquilo que o gajo …

[22] A PC chama AP e sugere-lhe que o aluno em vez de por a chaveta pode por baixo a soma. AP diz que foi só para reduzir o espaço. Ao que a PC diz que é importante.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	JOANA	Olha pior. Enquanto não falares em condições não te explico.
	Al	Não explique, a professora … por causa da stora, pronto. (acrescenta algo despropositado que não se percebe bem)
	JOANA	O quê?
	Al	Consigo fazer doutra forma.
	JOANA	Qual outra forma? (O aluno anterior continua a falar, como é se hábito, em voz alta e impede a audição do que os colegas dizem) Espera, já vamos ver.
48m41s	JOANA	Então o mercador ganhou quanto?
	Al	É preciso dizer quanto?
	JOANA	Sim, quero saber quanto.
	al	…
	JOANA	Sim ali só pede se perdeu ou ganhou. Mas pronto, o mercador ganhou dinheiro na venda do trigo que foram quanto?
	Al	Professora …
	JOANA	20 réis.
48m57s	Al	Professora dá para pormos assim… 10 vezes estes aqui …
	JOANA	Sim, já te tinha dito que sim
	Al	…menos os 30
	JOANA	menos os 300…
	Al	pois … dá para por assim de fora?
	JOANA	Sim, guarda a resolução vai-te ser útil para daqui a bocadinho.
	JOANA	Então apaga a parte do dinheiro. Se escreves 20 réis tens de apagar o dinheiro. Ganhou 20 réis na venda do trigo[23].
49m20s	Al	Eu meti assim: o mercador ganhou dinheiro na venda do trigo que foi 20 réis.
	JOANA	Sim.
	JOANA	Eu agora vou-vos pedir que me traduzam, tomem todos atenção, que me traduzam por uma expressão numérica o processo de cálculo do dinheiro realizado pelo mercador na venda.
	Al	Ah a stora quer complicar a vida.
	Al	Stora posso ir à casa de banho.
	JOANA	Não. Achas?
	JOANA	Vai lá num instante.
	JOANA	Quero uma expressão numérica que traduza o dinheiro realizado pelo mercador na venda. Quanto é que ele fez? Não foi 320? Ele não fez na venda 320? 320 réis. Eu quero uma expressão numérica que traduza como é que ele chegou a obter 320. Estão aqui os dados todos que precisam. (vários alunos falam ao mesmo tempo)

[23] Nota de campo: o quadro fica assim organizado

200+120=320
10x20 = 200 (chaveta a englobar estes dois cálculos) 320
10x12= 120 réis

$$\begin{array}{r} 320 \\ \underline{-\,300} \\ 20 \end{array}$$

R: o mercador ganhou dinheiro na venda do trigo

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	Al	…
	JOANA	Sim, mas como é que obtiveste os 20? e 12? É isso que vos falta.
	Al	Stora pensava que era para chegar aos 20.
	JOANA	Diz.
	Al	Eu fiz para chegar aos 20. Isto é para fazer a resolver?
50m49s	JOANA	Ah, deixa estar … faz agora aqui uma para só para chegares aos 320… depois vais lá fazer a outra, está bem? Mas espera, como é obtiveste 20? E 12? Falta-te por lá isso, a expressão toda.
	Al	Oh stora, stora, chegue aqui.
	JOANA	Elodi estás a fazer o que eu te pedi?
	Al	Stora.
	JOANA	Foi lá o Luís, Agora espera.
	JOANA	Atenção… mas falta alguma coisa. Então ¾ mais 5/4 …os 20 foi ¾? Não, falta ali alguma coisa. Vê lá.
	Al	Foi dos ¾ vezes 10.
	JOANA	O que é que além está?
	Al	Foi dos ¾ vezes …15.
	JOANA	Exactamente, mas atenção … Sim, ¾ vezes 15. … ¾ vezes 15, mas donde é que vêm esses ¾ vezes 15?
51m41s	al	É 15 a dividir por 3.
	JOANA	¾, não é só por 3.
	Al	Posso?
	JOANA	Vai lá num instante.
	Al	O que foi Inês?
	Al	15 a dividir por ¾ mais…(não se percebe)
	JOANA	Sim e isto aqui dá-te quanto? Agora quero saber … falta isto aqui ….isto aqui dá-te os alqueires todos que ele fez, não é? Agora falta saber por quanto é que ele vendeu que é para obter o lucro. Falta-te multiplicar isto tudo por… Por quanto é que ele vendeu os alqueires?
	Al	Por 10.
	JOANA	Por 10.
	Al	Stora.
	JOANA	Sim.
	Al	É assim?
	JOANA	Não precisa… atenção aos 300, não precisa…
	Al	Oh stora …
52m34s	JOANA	De onde é que te vêm os 20 e os 12?
	Al	Fiz assim 10 vezes 15 a dividir por 5/4, 15 a dividir por ¾.
	JOANA	Sim e agora falta … isto aqui dá os alqueires todos que ele fez. E ele vendeu por quanto?
	Al	Por 10.
	JOANA	Então o que é que tens que fazer?
	Al	Está aqui 10 vezes.
	JOANA	Ah, está bem… tens aqui o parêntesis, não o via. Está bem assim.
53m04s	JOANA	Inês já fizeste? Então vai lá colocar a expressão.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

	JOANA	Aqui os parêntesis, aqui, não é preciso. O que é que se faz primeiro?
	Al	Ah!
	JOANA	Porque assim só fica este 10 a multiplicar por este … atenção esse está bem, porque tem de ter um parêntesis nesta expressão toda. O 10 não multiplica por todos? Tens de tirar é …esse e …esse. Muito bem.
	JOANA	Ah apagaste tudo, era para fazeres aqui. Não faz mal.
	JOANA	Já, daqui a bocadinho estamos a sair (…[24]). Todos têm a primeira expressão, não têm?
54m12s	al	Stora, stora, stora.
	JOANA	Atenção o que é que falta aí? Falta lá uma coisa.
	Al	Stora fica assim?
	JOANA	Os 10 assim só está a … (dirige-se à aluna que está no quadro)
	Al	Stora é assim
	JOANA	Muito bem. Porquê? Vai-te lá sentar.
	Al	Stora…
54m33s	JOANA	Oh Inês estamos a corrigir além no quadro, não há necessidade nenhuma. Porque é que nós pusemos ali… diz-me lá de onde é que vem essa expressão…. Shiu! Meninos! Oh Micael andas-te a comportar muito mal.
		[a PC intervém e recoloca a questão à aluna que está no quadro]
	al	Dividindo os 15 alqueires por ¾…
	JOANA	Que era no …
	Al	No 1º mercado
	JOANA	Que era no primeiro mercado. E deu quanto?
	Al	20.
	JOANA	Deu 20.
	Al	Mais …
	JOANA	Shiu!
	al	Alqueires grandes que ele vendeu que foram 12.
	JOANA	Mais alqueires grandes que ele vendeu que foram 12 e que foi no 2º mercado. E porque é que multiplicámos todos por 10. Shiu! (ruído de fundo, há sempre alunos a falar de outros assuntos) Porque é que multiplicámos por 10? …Então, porque os alqueires todos que ele fez … Então daqui, deste cálculo, resultou quanto? … resultou?…
	Als	20.
	JOANA	Resultou os 20.
55m54s	Al	E 15 a dividir por 5/4 também é o 12.
	JOANA	E daqui resultou? …
	als	12
	JOANA	O 12. 20 mais 12 dava quanto?
	Als	32.
	JOANA	32, que foi o quê? Os alqueires todos que ele fez. Então se ele vendeu

[24] A PC questiona AP sobre o facto da aluna ter apagado o quadro, ao que AP responde: apagou, professora, quando olhei já estava apagado.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		todos os alqueires que ele fez por 10 réis, o que é que temos de fazer? 32 vezes 10 dá?…
	Als	320.
	JOANA	320. muito bem. Por isso é que lá está os 10 a multiplicar por aqueles todos. Toda a gente entendeu a expressão[25]?
	Als	Sim … sim.
	Al	Stora posso ir à casa de banho?
	JOANA	Não e eu digo-te porquê. Porque estás-te a comportar muito mal, senão ias como os outros meninos foram. (alguns alunos falam de outras coisas, sobretudo o Rui)
57m34s	JOANA	Já todos escreveram? … A expressão numérica onde é que está?
	Al	No quadro.
	JOANA	Escreve aqui … E tu também Micael. E agora vou-vos dar uma informação e é para relembrar …
58m04s	JOANA	Percebeste porque é que multiplicaste por 10[26]? (comentário: AP começa a distribuir pelos alunos uma folha informativa relativamente ao cálculo do valor duma expressão numérica.). (vários alunos pedem para ir à casa de banho)
	al	Estou farta de folhas.
	Joana	Então a partir de agora, em vez de vos dar folhas, vou-vos mandar escrever. (coro de protesto) Tudo o que cá está nas folhas.
	Al	Eu tenho as informações todas.
	Joana	As informações são muito importantes.
	Al	E as folhas?
	Joana	Também.
		(bastante ruído de fundo, jona vai alertando alunos sobre a forma de estar na aula)
59m51s	Joana	Tomem atenção à informação que eu vos dei. É so para relembrarmos. Anabela, lê lá a informação. Meninos! Nuno senta-te. A Anabela vai ler.
	Al-Na	(não se percebe)
	Joana	Anabela, tens de começar outra vez, porque ninguém ouviu nada. Passas na minha frente, imediatamente, para apanhar a borracha. Espera aí. Deixa passar o teu colega. Nuno senta-te, orgnizas isso em casa. Vá tomem atenção. Anabela lê lá.
1h1m05s		Não transcrevi – a leitura dos alunos e as explicações suplementares dada por Joana relativamente a cada uma das regras para o cálculo do valor de uma expressão numérica.

[25] Notas de campo (cópia da resolução que está no quadro):
(15:3/4 + 15:5/4)x10

20 + 12 = 32

[26] NC: Terminou assim a resolução do problema, sem qualquer verificação da solução, nem uma síntese da estratégia de resolução problema.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

1h3m50s	Joana	Então agora vamos fazer outra actividade. Esta é muito interessante.
	Al	Outra stora?
	Joana	Sim.
	Al	Outra? (coro de protesto)
	Al	Quer-nos matar ou quê?
	Joana	Não. Achas? Esta é muito interessante. (muiot ruído de fundo)
	Al	Oh stora eu posso deixar as fichas em casa?
	Joana	Sim. Trazes as das últimas aulas. Não podes lá deixar tudo, claro. (muito ruído de fundo)
1h05m22s	Joana	Todos a lerem, em silêncio. (… não transcrevi diálogos sem interesse) Leiam lá o problema. Primeiro lêem o problema. Já leram? Boiões sabem o que são. São uns frascos, boiões. Francisco a ler a informaçã, a informação não, o problema. Ana lê lá o problema.
	Al-Na	«A tia Matilde é uma especialista a fazer compota para toda a família. Com os 12 kg de compota de morango encheu oito boiões que não eram todos iguais.
	Joana	Então o que é que ela fez?
	Al	Dividiu ..
	Joana	Não, espera. o que é que fez aos 12 quilos de compota? (várias vozes em simultâneo) A Ana é que está a falar.
	Al-Na	Dividiu-os em 8 boiões.
	Joana	Dividiu-os em 8 boiões. E qual era a particularidade desses boiões?
	Al-An	Não eram todos iguais.
	Joana	Não eram todos iguais. Muito bem. Continua.
	Al-Na	Para os três sobrinhos, encheu os seus três maiores boiões, rigorosamente iguais, para não haver ciúmes.
	Joana	Então para os trê sobrinhos que é que ela fez.
	Al-Na	Dividiu … deu aos seus sobrinhos os três maiores boiões.
	Joana	Encheu 3 boiões e deu a cada um, um boião daqueles que eram os maiores e eram quê?
	Al	Todos iguais.
	Joana	Todos iguais, para não haver confusões. E agora a alínea a, queremos saber..
	Al	Oh stora o que é que os boiões lá tinham dentro?
	Joana	O doce de morango. Queremos saber o quê, Ana?
	Al-An	Quantos quilogramas de compota recebeu cada um desses sobrinhos.
	Joana	Então queremos saber quantos quilogramas de compota recebeu cada um desses sobrinhos. Para isso temos de descobrir o quê?
	Al	Os .. os .. cálculos dos boiões .. (há outras respostas em simultâneo)
	Joana	Qaunto, o quê?
	Al	Quantos quilogramas têm cada boião.
	Joana	Quantos quilogramas levam cada boião. Então, vamos lá descobrir.

Anexo 15
Transcrição da prática de ensino de Joana (Aula21_03_06)

		Tomem atenção ao desenho, porque o desenho diz-vos aí a quantidade ..
	Al	Não é preciso fazer as contas ..
	Joana	Então, quanto é que é? (não se percebe se a aluna diz alguma coisa) Não é , não. estás enganada.
	Al	Estão aqui os 3 boiões, mas não está lá..
	Joana	Os 3 boiões são esses aí do meio, são os maiores e não têm lá quanto é que leva[27]. Queremos saber quanto é que é. Ele tinha 12 quilos no total, agora temos que fazer ..
	Joana	Dividir por 3? Então e este aqui? Não são iguais, estão ali as medidas. (dirige-se a um aluno)
	Al	Stora já sei. Chegue aqui. São 6 quartos ..
	Joana	Não podes estar assim a dizer números ao acaso.
	Al	Stora é assim?
1h9m46s	Joana	Atenção. Então e os outros?
	Al	Não, mas é que … (não se percebe)
	Joana	Então 12 kg, mas ele não deitou ali.. não eram todos iguais, para dividires por 3. ele não tinha mais frasquinhos?
	Al	Tinha. Mas era só para os sobrinhos.
	Joana	Tinha. Então temos que saber o quê, primeiro? Então apra saber quanto é que levou, estes aqui (dirige-se à turma) Então para saber quantos quilos é que levou cada boião, temos de fazer o quê? Temos de ver quantos quilos é que estão nos outros.
1h10m		Não transcrevi mais.

[27] NC: na imagem podem ver-se pousados sobre uma mesa 8 boiões abertos, com as tampas ao lado, uma senhora a verter para um deles “doce de morango”. Cinco deles têm inscrições: 1/2kg, 1/2kg, 3/4kg, ¾kg e ½kg.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

7m23s	**INÊS**	Vamos abrir os cadernos.
	al	Esqueci-me da ficha.
	INÊS	Esqueceste-te? Nós já falamos disso mais para a frente Agora vamos ver outra coisa. Podemos? Tiago?
	al	Hã, Stora?
	INÊS	Podemos começar?
		[algum ruído de fundo, alunos que entram e se acomodam]
		Eu tenho aqui, isto era previsto aparecer em grande aqui, era para vos mostrar aqui (aponta para o écrã), só que o aparelho não funciona. Portanto eu vou tentar mostrar-vos aqui para ver se vocês conseguem ver, está bem? […] Agora ainda não viram nada. […] Eu vou-vos mostrar para ver o que é que vocês conseguem ver. Conseguem ver o que aparece lá?
	als	Sim, um barco.
	INÊS	Que tipo de barco é?
9m17s	al	É uma caravela.
	INÊS	É uma caravela. O que é que as caravelas vos fazem lembrar? […]
	INÊS	Dedos no ar.
	al	Barcos … as descobertas.
	INÊS	As descobertas! O que é que aconteceu com os portugueses? Foram para o mar fazer as suas descobertas e o que é que traziam dos sítios?
	al	Especiarias
		Por exemplo. Mercadorias, não é? Traziam as mercadorias nos barcos e depois o que é que acontecia? Os portugueses chegavam cá, chegavam ao porto de Lisboa com os seus barcos carregados e depois alguém sabe o que é que acontecia? Chegavam e a mercadoria ficava toda para eles?
	al	Não [várias vozes].
	INÊS	Rafael?
	Rafael	Acho que se calhar roubavam-na.
	al	Era para o rei.
	INÊS	Era para o rei. Era toda para o rei?
	al	Não… ficava presa.
	INÊS	Não percebi, desculpa.
	al	Ficava presa.
	al	Ficava presa, naquele tempo?
	INÊS	Ficava presa? Presa, não. Para o rei era. Então o que é que acontecia? Os portugueses traziam … Miguel! … os portugueses traziam, vou-vos ler o que está ali, vocês não conseguem ler. Os portugueses traziam as mercadorias da Índia, de África,
10m28s	al	do Brasil
	INÊS	Do Brasil e depois o que é que acontecia? Chegavam a Portugal, ao porto de Lisboa e iam, vocês sabem para onde?

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

	als	Não.
10m39s		Para onde é que as especiarias eram levadas? À Casa da Índia. Vocês não ouviram falar da Casa da índia?
	al	Não
10m43	INÊS	Na Casa da Índia o que é que acontecia? Eram cobrados uns impostos sobre as mercadorias que eles traziam, sim? O que é que acontece? Era cobrado um imposto que se chamava o quarto e vintena. O que é que estes nomes vos fazem lembrar?
	als	Quatro e vinte.
	INÊS	Quarto e vintena.
	al	Quatro e vinte.
	al	E o vinte.
	INÊS	Quatro e o vinte, mas quê? O que é que vocês acham relativamente às especiarias, que parte das especiarias seria?
	al	Um quarto.
	INÊS	Um quarto, o quarto. E a vintena?
	al	Vinte.
	INÊS	Vinte, quê?
	al	Vinte avos
11m25s	INÊS	Um vinte avos. Então o que é que acontece? Eram cobrados dois impostos, o quarto e a vintena. Primeiro o quarto e depois da parte restante a vintena. E essa parte que era retirada era para o rei.
	al	Ia!
	INÊS	E o resto ficava para o mercador, certo?
	al	Ia!
	INÊS	Então eram retirados dois impostos, o quarto e a vintena. O quarto representava um quarto da mercadoria e a vintena representava um vinte avos da mercadoria. Essa parte que era retirada era para o rei. Aqui na imagem temos uma balança [aponta para o monitor do portátil] que era usada, vocês conseguem ver a balança?
	als	Não (coro).
	INÊS	Aqui estão as pessoas [INÊS aponta para a fotografia] Vocês conseguem ver as pessoas?
	als	Não [há alguns comentários de alunos que têm boa visibilidade de doutros que não a têm]
12min 13m10s	INÊS	Vocês já cá vêm ver. Eu já vos mostro. Aqui temos as pessoas e depois a balança é isto tudo. Esta balança era usada, estava na Casa da Índia, e era usada para pesar as especiarias que vinham da índia, do Brasil. [dirige-se a alguns alunos que mostram não conseguir ver a imagem] Vocês já vêm ver, eu já vos deixo ver. E então eram cobrados dois impostos, o quarto e a vintena. Eu tenho aqui uma situação que vocês me vão ajudar a resolver, para vermos como … só um bocadinho … vocês já vêm ver, eu já vos deixo ver. O que é que acontece? Tenho aqui uma situação para vocês me ajudarem a resolver, para vermos se a parte que era para o rei era muito grande ou não. Eram dois impostos, o quarto e a vintena, logo vamos ver. Então a situação é a seguinte [lê a partir do monitor] *: para ficares a conhecer um pouco*

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

		melhor como este imposto foi importante e como se calculavam os direitos do Rei sobre as mercadorias descarregadas no porto de Lisboa, que eram pesadas na Casa da Índia numa daquelas balanças, *propomos-te que resolvas a seguinte situação proposta por um mercador do século XVI*, época dos descobrimentos, certo? *Eu carreguei na Índia 64 quintais de pimenta e quero pagar deles o quarto e a vintena na Casa da Índia.* Certo? O quarto e a vintena na casa da Índia. *Quero saber o que hei-de pagar a Sua Alteza*, Quem é sua Alteza?
	Als	O rei.
13m20s 13m44s	INÊS	É o rei, e *o que me resta*, certo? Fala aqui nos quintais, é uma unidade antiga de medidas de massa. Equivale a cerca de 58,75 kg. Sim? Agora eu vou-vos distribuir, a vocês, porque senão vocês não conseguem decorar, como é óbvio, para vocês resolverem e entretanto vamos já mostrar aqui a balança a quem não consegue ver. Vamos lá. [distribui a cada aluno um exemplar do doc1]
	al	64 quintais?
	INÊS	64 quintais, sim.
	al	64 quintais é quanto? […]
	INÊS	Um quintal são 58,75 kg. Um!
	al	Um?
	INÊS	Portanto podem imaginar a quantidade que era trazida, a quantidade de pimenta, mas não precisam estar a reduzir a quilogramas, fazem em…
	al	Fracção.
14m28s	INÊS	Quintais. Utilizam essa unidade antiga, era uma unidade daquela altura. [A partir deste momento, INÊS chama vários alunos, 1 ou 2 de cada vez, para observarem a imagem da balança no monitor; chama-lhes a atenção para a grandiosidade da balança por comparação com o tamanho das pessoas que estão ao lado desta] […]
18m44s	INÊS	Ouçam lá, vocês para resolverem a situação, escuta lá, não precisam de estar a reduzir os quintais a quilogramas. Utilizam os quintais. O que é que vocês vão ter que fazer? Desses 64 quintais, primeiro o que é que têm de tirar?
	al	Um quarto.
	INÊS	Um quarto é o imposto chamado quarto. E depois?
	al	Um vinte avos.
	INÊS	Um vinte avos do quê?
	al	Vintena.
	INÊS	A vintena do quê?
	al	Quintais.
	INÊS	Quais quintais?
	als	Sim … Não [respondem outros alunos]
	INÊS	Ou do que sobrou?
19m03s	al	Do que sobrou, porque nós tirámos um quarto [pouco audível, sobrepõem-se vozes].
	INÊS	Da parte restante. Estou a falar contigo Raul. Tens os 64, tirámos um

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

		quarto, da parte que sobrou vamos retirar a vintena.
	al	Então é tudo menos, eu estava a fazer de multiplicar.
	INÊS	È tudo menos. É assim como estás a fazer, essa está bem [Inês dirige-se a outro aluno que a chamou]. [ouve-se algum ruído de fundo, INÊS continua a mostrar a balança, mas é chamada por mais do que um aluno]
20m43s	INÊS	Já fizeste Raul?
	al	Já.
	INÊS	O que é que tens de calcular primeiro?
	al	Não sei.
	INÊS	O que é que está a calcular?
	al	Sessenta e quatro avos
	INÊS	Estás a calcular quanto é o quê, um quarto de?
	al Rafael	64 quintais.
	INÊS	Então a operação é o quê?
	al	Vezes.
21m12s	INÊS	Agora faz a conta.
	al	Posso usar calculadora?
	INÊS	Podes. [INÊS circula entre os alunos e esclarece-os. O ruído que se ouve denota que os alunos estão a trabalhar no problema, ouvem-se por exemplo alunos a aplicar o algoritmo da multiplicação a ¼ x 64 e depois a encara 64/4 como um quociente]]
23m21s	INÊS	64 a dividir por 4. Divides, vá lá.
	al	Pois!
24m54s	INÊS	[INÊS continua a circular entre os alunos, ouvem-se de vez em quando alunos a chamarem: stora/professora e ouvem-se partes de diálogos] Como é que multiplicas Tu sabes fazer! E agora? (…) Como se faz? Exactamente. Põe aqui por baixo.
25m47s		Carla, já fizeste? … Vai ao quadro registar os dados.
	INÊS	[registo de diálogo com um aluno:] Está bem. Já pagámos isto, certo? Nós queremos tirar um vinte avos do que resta. […] Já pagámos 16, ficamos com quanto? […] dos 64, pagámos os 16, o que é que temos de fazer? […] Exactamente!
	INÊS	Que é a parte restante. Dessa parte restante é que vais calcular quanto ele ainda paga. Vamos tentar fazer?
27m	INÊS	[O ruído de fundo aumentou de tom] Porque é que estamos todos na conversa, voltados para trás? Luís?
	INÊS	Foste daqui porque falas, foste para aí falas na mesma.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

27m19s		Então, sshh! Então, vamos lá ver o que a Carla tem ali no quadro[1].
		Aqui temos a quantidade total, 64 quintais. E depois? Queremos pagar ao rei os impostos. Miguel! Queremos pagar ao rei os impostos. Posso falar, Miguel? Quantos impostos são? São dois. A quarta e a vintena, certo? E é para eu não me chatear, Luís [dirige-se a um aluno] Então primeiro o que é que fazemos, vamos calcular o quê?
	al (Carla)	Um quarto de 64 quintais.
	INÊS	Um quarto de 64 para vermos quanto temos de pagar. Miguel! Miguel! Sabes fazer?
	al	Não.
	INÊS	Não sabes […] E agora quanto é que dá? O traço de fracção é ao nível do igual, Carla. Quanto é que isso dá, Carla? Qual é o resultado?
	al	Hã?
	INÊS	Não, Carla. Como é que fizeste? Exactamente. Tira o 1, não é preciso o 1. [Carla tinha escrito: 1/4x 64 = 64/4 = 16/1] Então o que é que tivemos de dar ao rei dos 64, numa primeira parte?
	al	Ao rei?
	INÊS	Sim.
	al	16 quintais.
	INÊS	16 quintais, certo? Mas ainda nos falta apagar outro imposto.
	al	A vintena.
	INÊS	A vintena. Mas a vintena pagamos sobre …? Rafael! Miguel!
28m57s	al	Sobre os 16 quintais.
	INÊS	A vintena pagamos sobre que parte?
	al	Um vinte avos.
	INÊS	Isso é a vintena.
	als	64 menos 16.
	al	Pois que dá 48 e depois 48 vezes um vinte avos.
	INÊS	Já posso? Já posso falar, Rafael? Posso? Eu estava a dizer, a vintena. Vocês querem ser vocês explicar? É que eu sento-me e vocês explicam. Estás à vontade, X.
	INÊS	Temos que pagar ainda um vinte avos de que quantidade? Quanto é que nos sobra?

[1] NC: Inês troca algumas impressões com esta aluna a propósito dos dados do problema, nomeadamente a propósito do cálculo da vintena. Carla tinha começado por escrever o seguinte na parte esquerda do quadro:

64 quintais ¼ de 64 quintais 1/20 de 64 quintais;

Porém torna-se evidente a hesitação da própria aluna quando escreve esta última expressão. De um breve diálogo com Inês, a aluna corrige para 1/20 da parte que sobrou.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

	al	48.
	INÊS	48, como é que chegaste aos 48?
	al	64 menos 16.
	INÊS	Percebes porque é que é 48, Carla?
	al Carla	Porque temos de saber o que é que sobrou dos 64 quintais.
30m21s	INÊS	Exactamente. Nós tínhamos 64 e já tirámos 16 para pagar ao rei, sobraram-nos 48. Não te mando calar outra vez. Sobraram-nos 48 quintais e agora desses 48 vamos calcular a vintena. […] O luís está a precisar de ir lá para fora arejar um bocadinho. Então, Carla consegues dividir mais?
	al	Consigo.
	INÊS	Consegues. Então quanto é que isso dá? 48 […] Quanto é que dá?
	al	2,4.
	INÊS	2,4. Então, dois vírgula quatro...
30m58s	al	Mais 16.
	INÊS	Exactamente. Vocês estão a ouvir? [INÊS dirige-se a alunos que estão a conversar e/ou virados para trás] No total quanto é que pagámos ao rei?
	al	16 mais 2,4.
	INÊS	Esperem lá. Primeiro pagámos 16 e depois pagámos 2,4.
	al	18,4.
	INÊS	No total quanto é que é?
	als	18,4.
	INÊS	Regista! [dirige-se à aluna que está no quadro].
	al	Rápido.
	INÊS	Ainda temos muita coisa para fazer. Não é preciso estarem com tanta pressa.
	INÊS	Quanto é que isso dá?
31m14s	al	18,4.
	INÊS	18,4, quê? […] E a unidade?
	Al	Quintais.
	Al	Como é que isso se representa? [um dos alunos perto do quadro pretende saber qual é o símbolo do quintal]
	INÊS	Não se representa, não tem nenhum símbolo.
	al	É o q.
	INÊS	Escrevemos quintais.
	al	[ao que outro aluno acrescenta] é o k.
	INÊS	Então e o mercador, com quanto é que o mercador ficou? Miguel? […] É para o Miguel. Como é que calculamos a quantidade que ficou para o mercador? […] Eu estou a falar com o Miguel, vocês importam-se?
	al	Eu já sei.
	al Miguel	Somamos.
	INÊS	O quê? […] Sabes porquê? Queres que eu te explique? Queres?

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

		Porque estavas na conversa.
	al	São 64 menos 18,4.
	INÊS	64 menos 18,4, ou seja à mercadoria total tiramos o quê? À quantidade que pagámos ao rei. […]
32m41s	INÊS	[ouve-se a aluna a escrever no quadro] Quintais. E agora registas a resposta, Carla, se faz favor. […] A parte que ficou para o rei e que parte que ficou para o mercador.
	al	45,6.
	INÊS	Quanto é que paguei ao rei e quanto é que ficou para mim.
33m00s	al	Oh stora! Para o mercador ficou muito mais.
	INÊS	Também foi ele que teve o trabalho do trazer. […] Já não era nada pouco o que ficava para o rei. Miguel! Miguel! Oh! Miguel! Estás a falar muito hoje, o que é que se passa? […] Vocês hoje estão a falar muito! Vá lá vira-te lá para a frente. […] Eu vou ver os cadernos. Quem não tiver resolvido, vai para casa seis vezes. Portanto podem começar a passar.
	al	Eh, stora!
	INÊS	Já fizeste?
33m57s	al	Já. [… diálogo entre INÊS e alunos, falou-se de férias e isso gerou alguma agitação]
34m48s	INÊS	Já está tudo? Luís, já está tudo?
	al Luís	Não.
34m55s	INÊS	Nem vale a pena começar com os desenhos, Miguel.
35m02s	INÊS	Então o que é que acontecia nesta situação? Ouçam lá!
	al	Demos uma nova matéria, os quintais.
	INÊS	Não! O que é que acontecia nesta situação? Primeiro, o que é que acontecia? Tiravam-se os impostos […] Eu estou a tentar falar, vocês conseguem ouvir o que eu estou a dizer, com todos a falar ao mesmo tempo? [silêncio] Já posso?
35m32s	al	Sim.
	INÊS	Como eu estava a dizer, nesta situação o que é que acontece? Nós pagávamos os dois impostos, um de cada vez, certo? Primeiro pagávamos a quarta e depois pagávamos a vintena. E se pagássemos os dois ao mesmo tempo?
	al	É fácil [comentário de um aluno].
	INÊS	Será que era o mesmo valor?
35m51s	al	Não, porque assim não sobrava.
	INÊS	Não sobrava o quê? […] Será que a quantidade que era para o rei e a quantidade que ficava para o mercador era a mesma? Ricardo?
	al	Não, porque depois a fracção … [não se percebe, há sobreposição de vozes]
	INÊS	Era?
	al	Não.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

	INÊS	Não? Então vamos lá verificar isso. Façam lá os cálculos.
	al	Fogo!
	al	É fácil, um quarto mais um vinte avos.
	INÊS	Um quarto mais um vinte avos. E depois?
	al	Vezes 64 [esta resposta foi dada por mais de um aluno] ou menos [afirma outro aluno] E depois?
	INÊS	Como é que é? Vezes, menos?
	als	É vezes.
	INÊS	Calculamos o quê? Somamos um quarto com a vintena e depois multiplicamos por 64 para calcular a parte do imposto que tínhamos que retirar. Então vamos lá fazer. [algumas vozes de protesto] Não se esqueçam que têm que adicionar o quarto e a vintena e têm que ter o quê? Parêntesis.
	al	Parêntesis e denominadores iguais.
	INÊS	O mesmo denominador, exactamente.
	al	Professora, posso fazer aqui?
	INÊS	Façam por trás.
	al	Oh, stora eu fiz à frente.
	INÊS	Está bem, mas tu tinhas espaços, mas havia colegas teus que não tinham. Mas vocês têm de estar sempre a comentar? Em vez de pagares o quarto … [dirigindo-se a um aluno] Oh, Miguel já chega de palhaçadas.
	al Miguel	O que foi?
	INÊS	Já chega. […]
37m47s	als	Já fiz, …eu também. [confirma outro aluno]
38m06s	al	Oh, stora não dá a mesma coisa. [outros confirmam]
	als	[Diálogo entre dois alunos:] É 19,2, olha aqui, oh, é 19,2. Quanto é que te deu? 320 a dividir por 20. Am? É 320 ou 384? Am? Am? 6 vezes 64 dá 384. Olha aqui, olha.
38m58s	INÊS	Eu não quero que vocês estejam a comparar. [INÊS dirige-se a um aluno:] 19,2, o quê?
	alas	Quintais.
	al	Que ele dava ao rei.
	INÊS	Que ele dava ao rei. Quanto fica para o mercador?
	al	44,8.
	INÊS	Então vá, vamos lá fazer.
39m23s	als	È igual a 44,8. Ele não ficou com mesma coisa. Foi roubado. O mercador foi roubado. Olha aqui, só recebe 44 e aqui recebia 45. Foi roubado.
3935s	INÊS	Foi roubado. Era assim que se fazia. Vamos ver se…[…]
39m51s	als	[Diálogo entre dois alunos:] Olha, um quarto é igual a cinco vinte avos. Cinco vinte avos vezes um vinte avos é igual a 6 vinte avos. Onde é que foste buscar o 6? Olha ali, cinco… Ai! […]

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

40m02s	INÊS	Rafael!
	als	[continuam o diálogo:] 5 vezes 1 vinte avos, 5 vezes 1 é 6. Hã?
		Eu estou a ouvir muito barulho, muito, muito barulho. São tão implicativos uns com os outros.
	al	Isso é verdade.
	INÊS	Luís! Tenho que te mandar lá para fora, Luís? Nem por eu estar a falar contigo.
40ms28	INÊS	Carla vai lá para o quadro fazer.
	al	Eu tinha bem [comentário de um aluno].
	INÊS	Apaga.
	al	Agora vamos ver se eu tenho certo.
	INÊS	Vamos lá. Então o que é que nós pretendíamos? Em vez de pagar os dois impostos, um de cada vez, pagarmos só um. Como é que fazemos, Carla?
	al	É igual a 16, meu!
	INÊS	Já fizeste Miguel?
	al	Mete assim, Oh! […] mete assim, oh Rafael. Rafael.
	INÊS	[diálogo com um aluno:] Adicionamos um quarto com a vintena. Sim senhor. Tens de encontrar fracções equivalentes.
	al	E agora 64 menos 16 dá 48. E agora fazes outro cálculo ainda. Agora é 64,… fazes … [continuam a ouvir-se diálogos entre alunos, confrontos entre resultados].
41m47s	al	Não dá a mesma coisa, stora.
	INÊS	Oh, Carla. Carla! Carla, espera! Simplifica-me esta fracção.
	al	[depois de olhar para o quadro, para o que a colega fez (1/4+1/20)x1/64=(10/40+2/40)x1/64=12/40x1/64, um aluno comenta:] eu não fiz assim]
42m32s	INÊS	Ela fez, em vez de 20, fez denominador 40. Divides por 2 dá quanto, Carla?
	al Carla	6 … 20.
	INÊS	Exactamente, 6 vinte avos. […]
	INÊS	[…] dá por 4. Quanto é que dá por 4?
	al Carla	Dá 3, 3 dez avos.
	INÊS	Exactamente.
43m17s	INÊS	Ah, vocês, vocês e a conversa paralela […]
	al	Ah!, Ah!
	INÊS	Ah, Ah, não. Vamos lá ter educação.
	INÊS	Quanto é que isso dá? Dá isso, de certeza?
	al	Acho que não.
	INÊS	E agora? Fica assim ou podes dividir? Oh, Carla se divides por 10 como é que fica [a aluna preparava-se para efectuar o algoritmo da divisão de 192 por 10].
	al	É 19,2.
		É directo, não é preciso estarmos a fazer. Carla basta escreveres à frente.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

		[…] 19,2 quê? Unidade.
44m44s	INÊS	Olhem eu estou a ouvir muito barulho. Luís! Rafael! [ouvem-se alguns risos] A falta de educação acabou aqui. Estamos entendidos? E aplica-se a todos, não é só ao Tiago.
		Carla são 19,2 quê? Unidade.
	al Carla	Quintais.
	INÊS	Consegues ouvir o que a Carla diz, Miguel?
	al	Ela fala baixinho.
	INÊS	Ela fala baixinho, vocês é que estão todos na conversa ao mesmo tempo. Quintais. Essa parte é a que fica para o …
	al Carla	Rei.
	INÊS	Rei, estiveste a calcular a parte que fica para o …
	al Carla	Mercador.
45m21s	INÊS	Para o mercador. Então regista a resposta, se faz favor.
	al	6 vezes 64?
	INÊS	Nem te vou responder, Miguel. […]
46m01s	al	Stora, não dá o mesmo.
	INÊS	Não dá o mesmo. O que é que acontece? Assim o mercador ficava beneficiado ou prejudicado?
	als	Prejudicado [vários alunos dão a resposta].
	INÊS	Prejudicado. A outra forma era melhor para o mercador.
	al Carla	O rei é que ficava beneficiado.
46m20s	INÊS	O rei aí é que ficava beneficiado. Podes-te sentar, obrigada.
	INÊS	[Andreia começa a distribuir uma nova tarefa e comenta:] Essa aí não tem a ver com quintais, que os quintais a vocês pelos vistos fizeram [não é perceptível].
46m39s	al	Então tem a ver com quê?
	INÊS	Então vamos tentar fazer este? Este é mais [não é perceptível] não tem quintais. Não consegues ver, Luís? {…} Oh, Luís tu estavas lá à frente, tu é que quiseste vir cá para trás. [alguns alunos ainda estavam a copiar a resolução, registada no quadro, do problema anterior] O que é que não vês? O rei ficou… [Exclama] Eu estou a ditar para vocês conseguir escrever Com 19,2 quintais e o mercador fica com 44,8 quintais.
47m38s	INÊS	Leiam com atenção.
47m50s	al	60 000 reais? Quanto é 60 000 reais? […]
	INÊS	60 000 reais. Reais era uma moeda antiga.
	al	Sim era réis.
	INÊS	Eu tenho aqui uma informação.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

	al	Eu quero ver essa informação [diz baixinho um aluno].
	INÊS	Então podemos dizer que, por exemplo, hoje os 60 000 reais equivaliam mais ou menos a … vocês estão-me a ouvir? Miguel, já leste o problema? Lê lá o problema em voz alta.
	al Miguel	Um homem tinha algum dinheiro e mandou-o distribuir por 4 pobres, pelo amor de Deus. Mas antes de lho dar, olhou-os bem a todos e a quem melhor lhe pareceu mais mandou dar (deixemos este melhor se é mais pobre, pensou para si). Depois de os ter visto bem, mandou que a um dos pobres dessem um terço daquele dinheiro, a outro um quarto, ao terceiro um quinto e ao último um sexto. Se te dissessem que o dinheiro era 60 000 reais, pergunto quanto calhou a cada um desses homens? Sobrou algum dinheiro?
49m16s	INÊS	Exactamente. Fala aí em reais. O real era …
	al	Brasileiro.
	INÊS	Não, era português. O real também havia no Brasil, mas era uma antiga unidade monetária. Se nós fizéssemos a equivalência com a actualidade equivale a cerca 30 cêntimos.
	als	Ih!
	INÊS	Vocês vão dizer que é uma quantidade irrisória para distribuir por 4 pobres […] 60 000 reais, 30 cêntimos. […] O que é que acontece, mas se nós considerarmos, por exemplo […] Escutem. Só para vocês terem uma ideia de como aquela quantidade era uma grande quantia, por exemplo, a canela, eu tenho aqui uma arroba de canela naquela altura custava 2000 reais, dois mil, actualmente, a mesma quantidade custa 400 euros.
	al	Am?
	INÊS	Dois mil reais equivale a 400 euros. Portanto, 60 000 reais, os 30 cêntimos agora é uma quantia irrisória… mas naquela altura era uma quantia. […] O que eu estou a dizer é que se considerássemos a mesma quantidade de canela, custava 2000 reais e agora custa 400 euros. […] Vamos lá.
		Eu estou a ouvir tanto barulho porquê?
		[esclarece um aluno:] Naquela altura era muito dinheiro. […] O que eu estou a dizer é que se fizéssemos só uma equivalência eram 30 cêntimos, mas se formos por uma proporção …
	al	Então temos 60 000 reais igual a 30 cêntimos.
51m18s	INÊS	Pronto. Vamos lá. Mas aí o que interessa menos é a unidade. O que eu quero saber é quanto deu a cada pobre. Cada um dos quatro homens. Vamos lá então tentar fazer. Tínhamos 4 homens, um recebeu 1/3, outro ¼, outro 1/5 e outro 1/6 do dinheiro.
	al	[…] Teve de dar um quarto ao outro
	al	Eu queria ficar com 1/3.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula13_01_06)

	INÊS	Querias ficar com 1/3?
	al	Eu queria ficar com o dinheiro todo.
	INÊS	Mas era dividido. Não podias ficar com o dinheiro todo. Vamos lá fazer.
	al	Oh, professora, então, um terço …
	al	Oh stora.
	INÊS	O que é que tens de fazer primeiro?
	al	Então se é um terço desses um quarto.
	INÊS	Desses … [tosse] Aqui como é que calculas um terço disto?
	al	Vezes.
	INÊS	Então vá, vamos lá. Sim, vou já, espera só um bocadinho. Vamos lá calcular.
	al	Então vamos lá calcular. Onde é que está a minha coisa pensante?
	INÊS	[INÊS ajuda um aluno:] Calculas quanto é um terço de 60 000, quanto é ¼ de 60 000 …
53min	al	[comentários de um aluno:] O meu cérebro? Eh, dá-me o meu cérebro. Eh, tu aí dá-me o meu cérebro. É um génio da matemática. Sabes quem é que é? A calculadora. [ruído de fundo enquanto INÊS acompanha os alunos]

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

00m34s	Inês	Vamos lá então abrir a lição. Lição nº 107/ 108. Já está?	
00m46s	Inês	Nós já falámos cá .. vocês devem-se lembrar daquela .. (AA afasta-se do gravador e entra em diálogo com alguns alunos que já terão trabalhado em Estudo Acompanhado o conceito de percentagem) Como eu estava a dizer, nós já falámos cá … (AA chama a atenção a um aluno que está a brincar com o caderno) falámos daquelas naus que vinham com os carregamentos da Índia. Vocês lembram-se de falarmos nisso? Falámos dos impostos que era preciso pagar ao Rei. Vocês ainda se lembram? …Quarto, vintena … já ninguém se recorda? … O que é que acontece? .. Essas naus durante as viagens … (há ainda alunos a entrar na aula, a fazer ruído com o arrastar das cadeiras, AA faz uma pausa)	
2m	Inês	Durante as viagens havia perdas das mercadorias (AA chama a atenção a uma aluna) … sofria algumas percas nas mercadorias, ..certo? Hoje vamos falar um bocadinho das perdas que as mercadorias sofriam… essas perdas chamavam-se quebras (AA começa a distribuir pelos alunos a tarefa –anexo – e esclarece os alunos sempre que questionada, informa por exemplo que o texto introdutório conta a história das perdas referidas. Dirige-se também a um aluno pergunta-lhe se tem muito sono).	
3m50s	Inês	Vamos lá começar por ler o texto. Tânia...	
	Al	Ham, stora?	
	Inês	Vamos lá.	
4m	**Al**	(a aluna inicia a leitura do texto, mas há alunos que falam entre si o que leva AA a intervir)	
	Inês	Queria ouvir a Tânia …. (a aluna continua a leitura)	
4m17s	**Al**	Tânia, continua se fazes favor.	
		(a aluna continua leitura a parti de viagem marítima)	
	Inês	Intempéries … quem sabe o que são intempéries? … Ninguém sabe? .. Intempéries naturais …pensem lá o que é que será … Diz, Ricardo.	
4m49s	**Al**	Dificuldades no mar.	
	Inês	Assim não ouço, (há algum ruído de fundo) eu perguntei ao Ricardo.	
	Al	Coisas más.	
	Inês	Coisas más. Então se são naturais, o que é que achas que podia acontecer às naus?	
	Al	Ham .. qualquer coisa, por causa da água ..	
	Inês	Por exemplo, o mar muito agitado, a chuva, as tempestades ..vamos lá. Susana, continua. (outra aluna continua a leitura do texto)	
5m57s	Inês	E então? (a aluna continua com a leitura, agora do problema. Um aluno tem de a ajudar a ler a palavra gengibre) Exactamente. Então carregou … vamos pegar .. primeira pergunta. Que quantidade de gengibre ficou danificada durante a viagem?	\

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

		Vamos ver quanto que parte … quanto é que ela carregou, que quantidade ..	
	Al	40.	
6m30s	Inês	Não é 40 (responde a um aluno) … quê? Que ficou danificada? (AA dialoga com um aluno). Vamos lá tentar resolver essas perguntas: a (a), a (b), a (c) e a (d).	
(Inês começa a circular entre os alunos, a acompanhar o que estão a fazer e a orientar a resolução. Durante um certo tempo, cerca de 12 min, é pouco perceptível o que se diz na sala, bem como os diálogos mantidos com os alunos) (Durante este período o PC intervém (+/- 10 min) para chamar a atenção aos alunos para a necessidade de trazerem para a aula a calculadora, já que não são capazes de fazer as contas.)			
18min41S	Inês	Vocês já fizeram?	
	Als	Só as primeiras.	
	Inês	Só as primeiras? Então vamos começar já a primeira. … [vai um aluno ao quadro] O que é que nós queremos saber na primeira? …	
	Al	A quantidade de gengibre que ficou danificada.	
	Inês	Sim. Então como calculamos? [AA entra em diálogo com um aluno] Escreve a resposta por extenso. (AA dirige-se ao aluno que está no quadro)[2] (pausa longa) 40 quê? .. Joel, …Joel, .. falta ali a unidade, que unidade é que é?	
	Al	Quintais.	
	Inês	Quintais, exactamente. (continua a ouvir-se ruído de fundo)	
21m20s	Inês	Filipe. …Vamos lá fazer a (b). Rui vira-te para a frente. [AA continua a ser interpelada por alunos que querem confirmar a resolução]	
21m48s	Inês	Então, Filipe? (não se percebe a resposta do aluno) É isso que tens lá escrito na tua ficha?	
	Al	Não.	
	Inês	Mas tu ainda não tens calculadora (AA dirige-se a um aluno). O que é que tu queres saber? A razão entre o quê, Luís? A razão entre o quê?	
	Al	A razão da …	
	Inês	É o Luís … Oh, Rui! Importas-te?	
	al	Entre a quantidade de gengibre que ficou danificada .. (AA tem de interromper o aluno, para chamar a atenção a outro aluno que distrai os colegas)	
	Inês	Entre a quantidade de gengibre que ficou danificada e..?	

[2] Notas de campo (cópia da resolução feita no quadro)

400 -360 40 R: A quantidade de gengibre que ficou danificada foi 40 quintais.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

	al	E a quantidade que foi carregada na Índia.
	Inês	Todos concordam com o que o Filipe disse e escreveu?[3] Com a razão de 40 para 400?
	Als	Sim.
	Inês	Podes sentar.
23m04s	Inês	E agora a (c)?
23m25s	Inês	Marco, vamos lá. (ruído de fundo)
	Al	Stora, posso ir fazer a (c)?
	Inês	A (c) vai fazer o Marco. … Calma. Marco! (não se percebe) Porque é que está toda a gente a falar ao mesmo tempo?
	Al	Estamos a dar os parabéns ao Marco.
	Inês	E não podem dar lá fora?
	Al	Não.
24m02s	Inês	Marco. .. O que é que eu quero saber na alínea c)?
	Al	Quanto foi a quebrada por..
	Inês	Quebra.
	Al	A quebra por cada 100 quintais.
	Inês	100 quintais. O que é que acontece. Nós na Índia carregámos quantos quintais?
	Al	400.
	Inês	400 .. e tivemos uma quebra de ..
	Al	40.
24m24s	Inês	40. Imagina que tínhamos carregado com100 quintais, .. mantendo .. aquela razão quanto é que tínhamos de perda?
	Al	10.
	Inês	10. Então, escreve essa razão. (o aluno está no quadro) Escreve alínea c), porque já ninguém se entende. Escreve lá um c).
	Al	Assim?
	Inês	Isso. .. Espera não fazes mais nada[4].
	Inês	É só isso. (ouve-se um aluno a dizer eu fiz de outra maneira) Como é que tu fizeste? Como é que tu pensaste para chegar a essa razão?
	Al	Então, fiz como a outra e depois aqui fiz como o store M fez …(este aluno foi apoiado pelo PC, mas creio poder dizer-se não ter compreendido o que este lhe disse)
	Inês	Ora pensa lá. … Escreve .. escreve aquela razão que tens deste lado, 40 sobre 400. Faz antes ao lado dessa que tens aí[5]. (o aluno escreve a identidade entre as duas razões)

[3] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$\frac{40}{400}$

[4] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$\frac{40}{400}$ $\frac{10}{100}$

[5] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

		Porque é que tu puseste aí o igual? (alguns alunos falam para o aluno que está no quadro, embora este não responda à pergunta) Porque é que tu puseste aí o igual? (há bastante ruído de fundo) Não estou a ouvir, estão todos a falar ao mesmo tempo.
25m49s	Inês	Marco. Marco, inverte lá a ordem do que tens aí escrito. (o aluno faz o que AA lhe sugere)[6] Exactamente.
26m07s	Inês	Então … no início tínhamos aquela quebra. .. Marco, estou a falar contigo. Em 400 danificaram-se 40 quintais. Se eu só tivesse 100 quintais danificavam-se … 10. (parece-me que alguém disse 6, mas não se percebe o que dizem os alunos que estão longe do gravador) Como é que passámos da razão 40 para 400 para a razão 10 para 100?
	Al	Dividimos.
	Inês	Por quanto? (ruído de fundo, vozes quê se sobrepõem) … Só o Marco, perguntei ao Marco. (não se percebe) (…) João. … Manuel … Como é que passámos da razão 40 para 400 para a razão 10 para 100?
	Al	Eu sei.
27m05s	Inês	O Marco diz que dividimos, correcto? .. Dividimos por quanto? … Ai, por amor de Deus. Catarina, por quanto é que dividimos? … Por quanto é que dividimos?
	al	Por 4.
	Inês	Por 4. E escreve …dividir por 4[7]. Então calculamos o quê? … Uma razão equivalente .. de consequente …
	Al	100.
	Inês	100. Correcto. Vamos sentar.
	Al	Posso?
27m44s	**Al**	Mas podia-se fazer de outra maneira.
	Inês	E pode, … mas esta chega (AA não aprofunda o que este aluno diz, nem sequer vai ver o que este quer dizer)
	Al	Não chega nada.
	AA	Se houvesse 10 maneiras de fazer, tinhas que fazer todas. (o aluno diz qualquer coisa que não se percebe) E agora a próxima?
	Als	Eu … eu ..

$$\frac{10}{100} = \frac{40}{400}$$

[6] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$$\frac{40}{400} = \frac{10}{100}$$

[7] Notas de campo: sobre o registo anterior o aluno coloca uma seta do 40 para o 10 e debaixo dela escreve « **: 4** ».

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

	AA	Eu ainda não vou mandar fazer, vamos falar um bocadinho. O que é que vos pede? .. Para comparar ..	
	Al	Qual é que é?	
	AA	A (d). (ruído de fundo) Estás com algum problema, Tiago? (AA dirige-se a um aluno que conversava) … Lá fora está mais fresco.	
28m25s	**AA**	Então na alínea (d) o que é que nós queremos? Queremos comparar … a quebra sofrida entre a quantidade de pimenta e a quantidade de gengibre..	
	Al	O que é que é gengibre?	
	AA	É uma especiaria. (um aluno diz qualquer coisa) A pimenta também. Vinham da Índia.	
	Al	Posso ir fazer?	
	AA	Calma ainda não vamos fazer. Eu quero que vocês tentem fazer por si sós.	
	Al	Eu estou a fazer por mim, stora	
	AA	Mas as tuas colegas ainda não. Como é que nós podemos comparar uma quebra e a outra? … se calhar primeiro vamos ter que escrever a quebra que ainda não calculámos .. que é a de …	
	Al	Pimenta.	
	AA	De pimenta. Então vamos calcular essa quebra e depois quero que vocês encontrem uma forma de comparar .. uma com a outra.	
	Al	Eu sei.	
	AA	Que é para saber em qual delas a quebra foi maior.	
	Al	Eu sei (ouve-se muito barulho de fundo)	
	AA	Eu quero que vocês tentem.	
29m13s	**Als**	Eu já fiz … eu já fiz..	
29m19s	**AA**	Já fizeste? (AA dirige-se a um aluno que ainda não tinha dito nada, há algum ruído de fundo)	
	AA	Sentem-se (AA circula entre os alunos). Já fizeste? (Pergunta a outro aluno) Oh Ana, não vale a pena estares assim tão exaltada. (continua a haver ruído de fundo, com alguns alunos a brincar com a calculadora, a conversar com o colega do lado, ..)	
30m21s	**AA**	Sim, o que é que tu calculaste?	
	Al	Aqui para ver quanto foi o prejuízo em cada 100.	
	AA	Então, comparaste este com ..	
	Al	Este.	
	AA	Com este que dá 11	
	Al	e este dá 10.	
	AA	E este dá 10	
	Al	Portanto o prejuízo foi maior.	
	AA	(AA dirige-se a outros alunos e não perceptível o que diz, apenas se ouve inicialmente a sugestão: têm de calcular primeiro …)	
31m31s	**Al**	Stora, já fiz.	
	AA	(AA continua a circular entre os alunos e acompanhar o que estão a	

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

		fazer. Continua a haver ruído de fundo, com muitos alunos distraídos do problema)	
32m46s	**AA**	Ena, tanto barulho! Tânia, já fizeste? (continua o ruído de fundo) Ricardo. (…) Oh, Ricardo é para resolveres o exercício, não é para estares na conversa. (…)	
33m35s	**AA**	Então, Ricardo explica-me lá o que tu fizeste.	
	Al	.. tive de saber quanto é que se perdeu .. que quantidade de pimenta é que se perdeu. (Ricardo vai para o quadro)[8]	
	AA	Isso é do quê? (AA dirige-se a outro aluno. Não se ouve a resposta deste) É a percentagem. Tenho que te mudar ali para trás (AA dirige-se a outro aluno)	
	Al Ric.	É a razão entre os quintais que se perderam de pimenta e o total.	
	AA	Vocês percebem de onde é que vêm os 33? Escreve por baixo. (continua a haver ruído, AA chama a atenção a outro aluno)	
35m35s	**AA**	Então, aquela razão que o Ricardo escreveu .. 33 para 300 o que é que significa …, Ana?	
	Al	O prejuízo .. aa..o prejuízo que ele teve da pimenta e o que embarcou na Índia.	
	AA	A quebra … no fundo .. da pimenta, certo? Eu quero que vocês me comparem uma .. a da pimenta com a do gengibre, para saber qual delas foi maior. Ricardo escreve lá a razão que representa a quebra sofrida na quantidade de gengibre. (…) Então e agora será que nos é fácil comparar essas duas razões? … Que é que estás a fazer Ricardo?	
	Al	Uma razão equivalente..	
36m47s	**AA**	Porquê? .. por exemplo, para vocês é fácil olharem para ali, para aquelas razões 33 para 300 e 40 para 400 e dizerem-me qual é que é aquela que sofreu a maior quebra ou aquela que sofreu a menor quebra? … É fácil dizer.., olhando .. só a ssim?	
	Al	Não	
	AA	Não. O que é que o Ricardo está a fazer? A tentar encontrar fra …razões equivalentes que nos sejam mais fáceis comparar. A razão de consequente 100 torna-nos mais fácil a comparação. Faz lá na de cima (AA dirige-se ao Ricardo) à frente da outra,.. senão não nos entendemos. .. Ricardo já a lá tens escrita .. à frente. Razão de consequente 100 equivalente a esta (AA aponta para a razão 33 para 100 que o aluno já tinha escrito no quadro). (…) À frente ..do que tens ali escrito. … Isso. E agora .. já me conseguem dizer em qual delas a quebra foi maior? …Ou não.	
	Al	Já.	
	AA	Já? Só assim? .. Em qual é que foi?	

[8] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$$\frac{33}{300}$$

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

	Al	Foi a de gengibre … ai, a de pimenta[9].
	AA	Pimenta, mas para nos facilitar ainda mais, ainda podemos calcular mais. O que é que podemos calcular?
	Al	Dividir 33 por 300.
38m44s	**AA**	O Ricardo escreveu ali uma coisa muito estranha[10]
	Al	Dez por cento.
	AA	… ao contrário, Ricardo. …
	Al	Isso é por cento?
	AA	É. Como é que o Ricardo chegou aqueles 10 por cento? .. Como é que o Ricardo chegou aos 10%? Como é que lá chegaste, Ricardo? Não apareceu assim … do ar. .. Então aí é 10 e na outra?
	Al	11.
	AA	É 11% … Porque é 10 e 11 por cento?
	Al Ric	Por causa que aqui é 11 por 100 e aqui é 10 por 100.
	AA	Exactamente. 11 por cem e 10 por cem. O que é que nós temos ali? Uma percentagem. … O que é uma percentagem? … é uma razão de quê?
	Al	Cem.
	AA	Cem? Não. É uma razão de quê? Temos aqui, temos aqui (AA aponta para o quadro[11]) … O que é que estas duas razões têm em comum?
	Als	São equivalentes… (outro aluno) Não, os mesmos consequentes
	AA	Quanto é que é o consequente?
	Als	Cem.
	AA	Então o que é a percentagem?
	Al	É sempre uma razão ..
	AA	O que é a percentagem? É uma razão de .. de quê?
	Al	De consequente igual ..
	AA	De consequente..?
	Al	Equivalente.
	AA	consequente?
	Al	100.
	AA	É sempre .. a percentagem tem sempre … é uma razão sempre de consequente 100. Vamos escrever aqui ao lado (AA dirige-se ao aluno Ricardo que

[9] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$$\frac{33}{300} = \frac{11}{100}$$

[10] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$$\frac{33}{300} = \frac{11}{100} = 11\%$$

[11] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

$\frac{33}{300} = \frac{11}{100} = 11\%$ e por baixo estava: $\frac{40}{400} = \frac{10}{100} = 10\%$

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

		ainda continua no quadro) A percentagem … per- cen - ta – gem .. Ricardo! Ricardo! Per, não é pre .. não é com um s, é com um c. É uma … quê? (está em diálogo com o aluno que está no quadro) uma razão de ..	
	Al	Consequente 100.	
	AA	Consequente 100. É isso que caracteriza as percentagens. As percentagens são um caso especial das razões. … são aquelas que têm consequente 100. todas aquelas que têm consequente 100 é sempre percentagem[12]. Exacto. O Ricardo .. consequente também está mal escrito, não é com aquele c é com o outro c (s).	
	Al	(os alunos passam para os seus cadernos a definição de percentagem.)	
42m10s	**AA**	O Ricardo calculou a percentagem, mas também podia ter calculado o quê? Ana, acho que foste tu que calculaste. Não calculaste a percentagem. O que é que tu fizeste? … Quando chegaste aqui … a esta razão .. a ti não te deu os 11%, não calculaste em percentagem .	
	Al Ana	Deu só 11.	
	AA	Deu quanto?	
	Al	11.	
	AA	Não deu 11. Deu quanto?	
	Al	Zero vírgula onze.	
	AA	Zero vírgula onze. Calcularam o numeral decimal .. que é o mesmo. Podemos ter .. a razão, o numeral decimal ou a percentagem. Representam todos a mesma coisa. Com a percentagem torna-se mais fácil. … Então qual foi maior a quebra sofrida?	
	Als	A da pimenta. (ouvem-se vários alunos a falar, mas não se percebe)	
	AA	Na pimenta …ou no gengibre? (alguns alunos confirmam que foi na pimenta). A pimenta. Vou só escrever aqui (AA regista no quadro: a pimenta sofreu maior quebra). Certo?	
	Al	A pimenta sofreu maior quebra.	
	AA	Sofreu maior quebra. (os alunos passam a resposta para o caderno)[13]	

[12] Notas de campo (cópia do que está escrito no quadro):

a percentagem é uma razão de consequente 100.

[13] Notas de campo: uma vez resolvidas todos os itens do problema, Ines deveria ter voltado ao problema e fazendo uso do conceito de percentagem fazer notar aos alunos o que este realmente significa no contexto do problema. O próprio conceito de percentagem foi insuficientemente tratado, até porque este conceito só terá sido abordado em Estudo Acompanhado com metade da turma. Aliás não se percebe bem porque razão o PC terá feito isso. Aliás o problema permitia dar um significado concreto ao conceito de percentagem e sobretudo enfatizar a vantagem do uso dessa forma de representação para efectuar comparações. Esta observação acaba por se confirmar numa intervenção posterior do PC a propósito de outro problema. Também não se percebe porque é que não ficou registado no quadro a equivalência entre a razão de consequente 100, o numeral decimal e a percentagem.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Inês (Aula05_05_06)

43m38s	**AA**	Agora que já resolvemos um problema histórico .. muito complicado, não era? (não há reacção dos alunos) (AA começa de seguir a distribuir uma segunda folha de papel com três problemas (anexo).	

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

Transcrição da 2ª parte da aula de Beatriz, 20/04/2006, 15h51min (1h23m16s de gravação)

		[Não transcrevi o início da aula. Agravação inicia-se com um imenso barulho de fundo. Beatriz diz aos alunos que estão ainda de pé que se sentem].
45s	Beatriz	Calem-se lá, o intervalo já acabou. (apesar do aviso e de outros que seguem o ruído sobe de intensidade)
01m41s	Beatriz	Vamos fazer uma situação problemática. Temos aqui ..em cartaz. José Paulo começa lá a ler, se faz favor.
	Al-JP	Eu?
	Beatriz	José Paulo.
	Al-Jp	[Não se percebe a intervenção do aluno, apenas que envolve algo relacionado com a escala musical]
		[não transcrevi]
35m58s	Beatriz	Eu agora vou-vos dar uma actividade ..
	Al	Outra?
	Beatriz	Mas vão tentar abri-la sem rasgar nem desatar as coisas.
	Als	(vários alunos falam ao mesmo tempo)
	Beatriz	Tem de tentar tirar sem rasgar .. Lêm primeiro as instruções que estão na primeira folha[1].
	Al	Já abri.
	Beatriz	Não podem .. não podem
	Al	Stora, isto deu uma trabalheira.
	Beatriz	Por isso .. É para saberem utilizá-la (muito ruído) Lêem as instruções que estão na primeira folha.
		(não transcrevi, os alunos continuam a tentar abrir e Beatriz a dar as indicações já dadas anteriormente)
38m50s	Beatriz	A Patrícia e o Ricardo já foram capazes. (Comentário: muito ruído de fundo, alunos afirmam não conseguir, alunos que vão para junto de colegas que já conseguiram, Beatriz que continua a dar as mesmas indicações)
39m54s	Beatriz	Então vou dizer para quem ainda não …
	Al	Não stora. Não diga.
	Beatriz	(Ri)
40m18s	Beatriz	Têm que puxar .. até tirar o nó. Depois abrem aqui e têm que tirar o .. depois já conseguem tirar o resto. (comentário: continua o ruído de fundo, alunos que perguntam como é que é, Beatriz que volta a dar as indicações. Durante este período de tentativa de abertura do desdobrável, Beatriz tem de pedir a vários alunos que se sentem)
41m10s	Beatriz	Já toda a gente foi capaz? (ruído de fundo) Ângela começa lá a ler a acti .. aqui, um bocadinho. Vamos então

[1] NC: trata-se de um desdobrável do qual tenho um exemplar, intitulado Actividade: Baratar Mercadoria. Sob este título está uma imagem a cores de um mercado. Debaixo desta está o seguinte texto dentro de uma moldura: *No interior deste desdobrável vais encontrar alguns desafios interessantes e motivadores de aprendizagem em matemática*. Por baixo, novamente dentro de uma moldura, a indicação: *Para isso abreo-o sem rasgar, desatar ou separar os rectângulos.*

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

		resolver uma actividade ..
	al	É história.
	Beatriz	Do século XVI.
	Als	Ih!
	Beatriz	Que nos mostra claramente que antigamente também já se utilizava … as proporções. Continua lá Ângela. Começa lá a ler aqui um bocadinho da história. Ouçam lá.
	Al-Na	(não se percebe)
	Beatriz	Pára lá Ângela. Alguém está a ouvir a Ângela? Ricardo.
	Al-An	(Comentário: a aluna lê o texto que está no interior do desdobrável: *Durante séculos em muitos países da Europa e, em particular, em Portugal, foi comum uma certa forma de negócio que consistia em trocar mercadorias entre si, sem ter de se pagar a dinheiro. A essa troca dava-se o nome de barata.* *Quando dois homens de negócios trocavam entre si uma mercadoria por outra, elevavam sempre o preço da mercadoria. Isto é, o preço da mercadoria no barato era mais elevado do que se esta fosse vendida a dinheiro. Claro que isto permitia que certos mercadores conseguissem enganar e trapacear outros, pois colocavam a mercadoria à troca a preços comparativamente muito mais elevados do que o outro fazia com a sua mercadoria.* *Muitos problemas dessa época traduzem a importância que era dada a esta forma de negociar e também a necessidade dos mercadores saberem garantir a igualdade do negócio.*
43m20s	Beatriz	A igualdade do negócio. Quem é que me explica aquilo que estivemos a ler? O que era baratar as mercadorias, Andreia?
	Al-An	(não se percebe a resposta da aluna)
	Beatriz	Patrícia.
	Al-Pa	(não se percebe)
	Beatriz	Então antigamente o que é que faziam em vez de pagar as mercadorias? Inês.
	Al-In	Trocavam os produtos uns pelos outros.
	Beatriz	Trocavam os produtos uns pelos outros. Então e onde é que eram os preços dos produtos mais elevados, quando trocavam os produtos ou quando pagavam a dinheiro?
	Al	Quando pagavam a dinheiro.
	Beatriz	Quando pagavam a dinheiro? Vê lá. Quando trocavam os produtos (comentário: é natural que algum aluno tenha dito isto e que Beatriz esteja a repetir a resposta)
		(ruído de fundo)
	Beatriz	O que é que era o baratar das mercadorias? … diz lá, Ana.
	Al-Na	(não se percebe o que diz a aluna)
	Beatriz	Em vez de eu te dar … tu querias comprar-me fruta…
	Al	Uma galinha.
	Beatriz	Uma galinha, por exemplo e eu não tinha dinheiro para pagar, nós trocávamos as mercadorias. Tu tinhas a galinha, eu tinha fruta e trocávamos. Mas também havia pessoas que pagavam em dinheiro. Mas

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

		quando trocavam os produtos, faziam com que esses produtos fossem mais caros, para levarem mais produtos em troca[2]. Andreia começa lá a ler o primeiro problema.
44m48s	Al-An	*Dois mercadores, André e Joane, querem baratar ferro por chumbo. André tem o ferro e o quintal do ferro vale a dinheiro contado 3 cruzados e no barato André põe-o a 4 cruzados. Joane tem o chumbo e o quintal de chumbo vale a dinheiro contado 6 cruzados. Pergunto: a quanto deve Joane meter o chumbo no barato para que o barato seja igual e nenhum vá enganado?*
	Beatriz	Então o que é que nos diz … quem é que entendeu o problema? Joel. Diz lá Ana. Então o que eu tinha? Eram dois mercadores …
	Al-An	Sim, o André tinha ferro e o Joane tinha chumbo.
	Beatriz	Sim.
	Al-An	Queriam baratar os produtos.
	Beatriz	Sim.
	Al-An	Então a dinheiro o ferro custava 3 cruzados
	Beatriz	Sim.
	Al-An	E no barato custava 4 cruzados. (comentário: não há qualquer ruído de fundo)
	Beatriz	Ou seja, neste caso o ferro quando era .. quê?
	Al	A dinheiro…
	Beatriz	A dinheiro custava 3 cruzados e à troca, os produtos já eram mais caros, já eram a quê? Já eram a 4
	Al	Cruzados..
	Beatriz	Cruzados. E depois?
	Al	Joane tinha chumbo e ..
	Beatriz	Joane tinha chumbo
	Al	A dinheiro custava 6 cruzados
	Beatriz	Sim.
	Al	Mas nós queremos saber ..
	Beatriz	Saber quê? Quanto é que valia
	Al	Quanto é que custava em baratar ..
	Beatriz	Em baratar.
	Al	para que não vá enganado.
	Al	Resolvemos aonde stora? Aqui?
46m43s	Beatriz	Podem resolver aí. Colocam primeiro os dados aqui ao lado, depois é mais fácil. (ruído de fundo, fala-se de assuntos completamente exteriores à aula; Beatriz circula na sala)
	Beatriz	Já fizeste a actividade, Nico?
	Al	Professora, não estou a perceber.
	Beatriz	Então são dois mercadores, não era? Que era o que nos dizia. Como nós vimos, antigamente muitas pessoas em vez de pagarem trocavam as

[2] NC: esta é uma interpretação de Beatriz muito discutível. Aliás não deveria ter sido ela a dar imediatamente a resposta à pergunta que pôs à turma. Aliás, parece-me que o aumento do preço no barato tinha mais a ver com outros aspectos: levar as pessoas a comprar a dinheiro ou obter lucros fáceis ou despachar mercadoria de difícil venda, …

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

		mercadorias. Neste caso, eram duas pessoas, era o André e o Joane e eles iam trocar o ferro pelo chumbo. Só que o ferro custava .. a dinheiro, o preço a dinheiro, custava 3 cruzados e no baratar era mais elevado. Custava 4 cruzados e sabemos que o Joane também tinha e, o quê? O chumbo custava, em dinheiro, 6 cruzados e nós queremos saber quanto no baratar, que era a troca de mercadorias, quanto é que custava[3].
	Al	Mas assim vai ter que ser mais caro.
	Beatriz	Vai ter que ser mais caro. Porquê? Porque no baratar era .. quê? Mais elevado. Os produtos eram sempre mais elevados.
	Al	Só que aqui diz para ser igual.
	Beatriz	O que é que tem que ser igual? O que é que tem que ser igual? A ra … Não é o dinheiro. O que é que tem que ser igual?
	Al	As razões (trata-se de outro aluno que não aquele com quem Beatriz dialoga)
	Beatriz	As razões. Muito bem.
	Al	Stora.
	Beatriz	Ham?
	Al	(não se percebe)
48m22s	Beatriz	Tem que ser igual de maneira que … o quê? Que nem um nem o outro vá enganado. Tem que se … aquilo que ele tem de pagar, tem de ser … tem de ser de modo .. igual ao .. ao .. André, de modo que quê? De modo que nenhum fique enganado. É isso que quer dizer, não é que seja mais caro ou ..
	Beatriz	Sim? Diz lá. O que é Patrícia?
	Al	É isto (não se percebe)
	Beatriz	Muito bem. Não … então? É ao contrário.
	Al	(não se percebe)
	Beatriz	Não dá. Tens 3, a dinheiro custa 3 e aqui no baratar .. a 4.
	Al	Se eu for a multiplicar..
	Beatriz	E depois .. depois fazes assim. É mais … tipo quê? Tens … tipo o ferro e o chumbo que a dinheiro custa quanto?
	Al	Três.
	Beatriz	Três e no baratar? Quatro. Depois o que é que .. quanto é que custa em dinheiro, custa quanto?
	Al	Seis.
	Beatriz	Seis, tens de ir saber quanto é que é no … Trocaste.
	Beatriz	Já fizeste? Porque é que tu dizes que é 7 cruzados?
		(não se percebe o que dizem os alunos, há ruído de fundo)
	Beatriz	Mas o que é que é a relação 3 para seis? É o quê? Essa é outra maneira.
	Al	Então hei-de fazer … aqui o 6 (não se percebe)
	Beatriz	Qual é que é o outro. Sim? É assim, muito bem.

[3] NC: Beatriz não dá à aluna a oportunidade desta expor qual era a dificuldade concreta que sentia.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

	Al	Stora.
	Beatriz	Muito bem. E agora? Muito bem.
	Al	Stora eu não sei fazer isto.
	Beatriz	Não és capaz? Então o que é que tens? Tens dois mercadores (…) (ouve-se a professora cooperante a falar do problema) Tens dois mercadores que querem baratar o ferro pelo chumbo e … podem vender a dinheiro ou baratar, trocar. Quando trocam as mercadorias, a mercadoria é sempre um pouco mais cara e dizem-te o quê? Que a dinheiro o ferro custa 3 cruzados e a .. e no baratar custa 4 cruzados. E o Joane também tem chumbo e .. ham .. quer trocar .. ham .. e diz que a dinheiro custam 6 cruzados e quer saber quanto é que custa no baratar ou trocar as mercadorias.
51m43s	Beatriz	Já alguém fez?
	Als	Eu.
	Al	Stora veja se é assim.
	Beatriz	Então o que é que tu fizeste aqui? Como é que se calcula? Como é que é? Então o produto dos meios não é igual ao produto dos extremos? Então como é que fizeste isso?
	Al	(não se percebe)
	Beatriz.	Sim. Então o que é que tem que ser aqui?
	Al	Doze a dividir por 3.
	Beatriz	Tem que ser o quê? Tinha que ser três vezes aquilo que nós sabemos igual, não é? o que é que se faz? Então não é assim? não foi o que fizemos à bocadinho? Para descobrir, o quê? O ponto de interrogação.
	Beatriz	Quem é que já fez?
	Al	Stora, eu.
	Beatriz	Muito bem. Já fizeste, Ângela?
	Al	Já.
	Beatriz	Inês já fizeste? Queres lá ir fazer?
	Inv	Já lá fui, stora.
	Beatriz	Já lá foste? Então vai outro. Já fizeste?
	Al	Eu ainda não fui ao quadro.
	Beatriz	Eu quero os passos todos como é que tu fizeste.
	Al	Oh stora, posso ir ao quadro?
	Beatriz	Vai lá fazer, Ângela.
	Al	Eu dali não consigo ver.
	Beatriz	O quê? O quadro?
	Al	Sim.
	Beatriz	Então queres ir para aquela mesa ali?
	Beatriz	Coloca …Têm que colocar os dados todos. (Beatriz dirige-se à aluna que está no quadro)
		(há pequenos diálogos em que alunos mostram a sua resolução a Beatriz e esta verifica-a. De um modo geral afirma: muito bem).
53m41s	Al	Oh stora, eu posso fazer assim? (a aluna diz mais algumas coisas que não

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

		são perceptíveis)
	Beatriz	Mas isso … tinhas que colocar o quê? Tinhas que ..?
	Beatriz	Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste? (dirige-se à aluna que está no quadro)
	Beatriz	Sim, mas tens que … tens que fazer ao contrário. (retoma o diálogo com a aluna no lugar)
	Al	(não se percebe o que diz)
	Beatriz	Dá, mas pode não dar. Não é? tens de calcular as coisas .. Agora esse dá, mas .. tens … Explica lá aos teus colegas, Ângela. Explica lá como é que tu fizeste. Francisco. Explica lá.
	Al-An	(Não se percebe)
	Beatriz	Está com atenção para ver se consegues entender (dirige-se à aluna no lugar) Sim. o André tinha quê? O André tinha ferro, não é?
	Al-An	Sim. (não se consegue perceber mais)
55m11s	Beatriz	Então .. como é que tu podias colocar …tu colocaste logo aqui o resultado, podias quê? Então? Tínhamos o quê? A dinheiro, do quê? Do ferro e do chumbo … Quanto é que custava o ferro em dinheiro?
	Als	Três.
	Beatriz	Três. E no baratar?
	Al	Quatro.
	Beatriz	Quatro. E quanto é que custava o chumbo em dinheiro?
	Als	Seis.
	Beatriz	Queríamos saber o quê? Quanto é que custava .. quê? No baratar. Quando quê? Quando trocavam. Aqui tinhas que colocar primeiro um ponto de interrogação, depois é que ias calcular. Porque é que tu fizeste assim? porque é que tu resolveste assim?
	Al-An	Eu fiz o seis vezes quatro, porque o seis era o preço do ..
1h15m53s	Beatriz	Sim, mas porque é que tu multiplicaste assim?
56m18s	Al-An	(Não se percebe)
	Beatriz	Dá oito. E pudeste fazer assim, porquê? Porque existe quê? Pudemos verificar que existe quê? Uma … porque há uma relação existente entre quê? … Entre o preço, quê? Em dinheiro e à troca. Porquê? Porque tem de existir uma igualdade entre duas razões. Por isso é que fomos calcular o produto dos meios, que sabemos que é igual ao produto dos .. extremos. Podes-te ir sentar. O segundo problema resolvem em casa[4].
	Al	Oh stora vá lá eu já fiz isto.
57m16s	Al	Está certo?

[4] NC: o desdobrável contém um segundo problema: *Os mesmos, André e Joane, fizeram outra barata. André tinha cera e o quintal dela valia a dinheiro 10 cruzados e na barata meteu-o a 15. Joane tinha açúcar e pôs o quintal, na dita barata, a 3 cruzados mais do que valia a dinheiro. E assim foi a barata boa e sem engano nenhum. Pergunta-se, agora, quanto valia, segundo isto, o quintal do açúcar de Joane e a como foi metido na barata.*

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

		(há vários alunos a chamar Beatriz e a perguntar se era assim que se resolvia)
	Al	Era assim stora? Era assim?
	Beatriz	Não sei. Acho que sim. Não, não era assim.
	Al	Era assim, era.
	Beatriz	Não, aqui tens que fazer a diferença. Não era assim. Era 10 e 5 e aqui era 12, porque o quê? Ai aqui é um 3. Aqui é um 3, não é? Porque aqui já é a diferença e aqui também tens de fazer a diferença do 15 com o 10. Eu já cá venho ter contigo. Vou só distribuir a folha aos teus colegas[5].
		(Beatriz distribui uma nova folha)
	Beatriz	Não é para resolver aqui. O segundo problema que eu vos dei é que vão fazer em casa.
		(bastante ruído de fundo)
59m16s	Beatriz	Estão a fazer a actividade?
	Beatriz	O que é que nos diz aqui? Que .. quanto, quê? Que no baratar ele custava mais 3 cruzados do que custava em dinheiro. Então temos que ir ver aqui no baratar, quanto é que custa a mais do que aqui em dinheiro. Porque no baratar custava 15 e em dinheiro custava 10. Quanto é que vai a mais aqui no baratar? Vai mais 5. por isso é que temos fazer a diferença de 15 por 10 que é para colocar assim, porque aqui não nos dizem quanto é que custa no baratar. Só nos dizem que no baratar custa mais é mais … custa mais 3 do que .. 3 cruzados do que no dinheiro. Então temos que saber aqui no baratar quanto é que custa a mais do que em dinheiro, que é para …
	Al	(Diz qualquer coisa que não é perceptível, dado o muito ruído de fundo) multiplicamos o 10 por 3 e ..
	Beatriz	Não tens que fazer aqui a … deste aqui, pronto, está correcto. E agora tens que fazer a di .. porque aqui o 3, o quê? Era quanto valia a mais do que .. Por exemplo, tu tinhas .. vendias a 3 e no baratar custava 6. Ou seja, custava mais 3 e aqui … eu não te digo .. eu só te digo que custa mais 3, tu vendes a 3 e eu digo eu vendo … a 3 a mais que tu[6]. Eu não te vou dizer que vendo a 3, tu é que vais concluir que eu vendo a .. 6 cruzados. eu vendo a mais 3 cruzados do que tu. Mas aqui ele não nos diz a quanto é que vale a mais, diz só que eu vendo a 15 cruzados. Nós é que temos que fazer a diferença, para ver quanto é que eu vendia a mais no baratar do que no dinheiro. (comentário: enquanto isso o ruído de fundo é muito, indiciando que muitos alunos estão meramente a conversar uns com os outros) Ham?
	Al	É para fazer em casa?

[5] NC: o problema despertou o interesse dos alunos. note-se como alguns já o tinham resolvido e manifestaram interesse em que Beatriz verifique a sua resolução.
[6] NC: As dificuldades de comunicação de Beatriz ficam bem patentes nesta explicação que dá à aluna. A preocupação que manifesta em ajudar a aluna a interpretar o problema, levam-na a fazer uma analogia que a atraiçoa e confunde. Provavelmente não teria pensado anteriormente na analogia a usar, até porque tinha planeado que o problema não seria para resolver na aula. O discurso construído por Beatriz confunde mais do que ajuda, para além de imprecisões nesta fase a interpretação é incorrecta.

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

1h01m20s	Beatriz	Não, é para fazerem aqui. José vai-te lá sentar. Lê lá o problema, Liliana. (continua um imenso ruído de fundo na aula)
	Al	(se a aluna leu, não se conseguiu ouvir[7])
	Beatriz	Sim. Então o que é que nos permite uma escala? (o ruído de fundo, que é muito, dificulta a percepção das intervenções dos alunos) Dar quê?
	Al	Saber as dimensões reais.
	Beatriz	Saber as dimensões reais. Então 1 cm no desenho, corresponde a quantos na realidade?
	Al	A 50.
	Beatriz	A 50, que é o que temos aqui na nossa escala. Ou seja, 1 cm aqui do carro corresponde a 50 cm na realidade. Então temos que ver o quê? O que é que nos pede agora a seguir. Quais é que são as dimensões.. reais do automóvel. Então se 1 cm deste corresponde a 50cm na realidade temos que ri ver no total .. Ham?
	Al	50 vezes 8,8.
	Beatriz	Vezes 8,8.
		(Beatriz começa a circular entre os alunos)
	Beatriz	Então nós não estivemos a ver o que nos permite as escalas? Os mapas, não é? Nunca nos dão as dimensões reais, senão tínhamos … (riso). Então 1 com no mapa ou numa planta ou num carro, 1 cm, daqui a aqui, vale 50 na realidade. Se este carro tem 6 cm, na realidade vai ter, quê? 50 vezes 6 cm.
1h03m45s	Al	Stora porque é que é 50 vezes 8,8?
	Beatriz	Então porquê? 1 cm no mapa corresponde a quantos na realidade?
	Al	50.
	Beatriz	Então eu quero saber 8,8 quanto é que é na realidade. Sabendo que 1 cm … Ham?
	Al	Stora, não estou a perceber.
	Beatriz	Quem é que explica o problema. Quem é que está a entender a situação? (muito ruído de fundo, há quem diga ninguém) Estás a entender, Andreia? Então, explica lá aos teus colegas.
	Al-An	Era .. (não se consegue ouvir)
	Beatriz	Sim.
	Al-An	E nós temos que ir procurar qual é o tamanho real deste automóvel.
	Beatriz	Temos de ir ver qual é o tamanho real do carro. E quê? Está na escala de quê?
	Al-An	De 1 para 50.

[7] NC: propõe-se dois exercícios de aplicação do conceito de escala. Ambos são acompanhados de duas vistas de um automóvel. Na primeira alínea é indicado o comprimento (8,8 cm) e a largura (3,6cm) do desenho. *a) No primeiro desenho, o automóvel está desenhado á escala 1:50. Quais são as dimensões reais deste automóvel? b) Neste desenho, o automóvel está a um escala diferente. Um centímetro neste desenho representa mais ou menos centímetros que no desenho anterior? Porquê?*

Anexo 16
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula20_04_06)

	Beatriz	De 1 para 50. Eu quero saber o quê?
	Al-An	Quantos centímetros é que são na realidade.
	Beatriz	Quantos centímetros é que são na realidade. E sabemos que..
	Al	1cm são 50 cm na realidade.
	Beatriz	Sim, mas eu tenho 8,8 cm do carro, quanto é que é na realidade? Sabendo que 1 … 1 cm no desenho corresponde a 50 cm na realidade. (muito ruído de fundo)
	Al	Veja lá stora. Para saber mesmo…
	Beatriz	Já sabes, já tens aqui o resultado. Na realidade tem 440cm de comprimento e de largura 180 cm. Já tens aí.
	Al	Stora é assim, não é?
	Beatriz	É assim. Muito bem.
1h06m15s	Beatriz	Já toda a gente fez a actividade?
	Al	Eu só fiz a primeira.
		[não transcrevi mais]

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

Transcrição da 2ª parte da aula de Beatriz[8]
27/04/2006 (40min43s de gravação)

A aula inicia-se com muito ruído de fundo.

	Beatriz	Hoje vamos fazer, ouçam lá … Tiago, uma pequena actividade.
	Al	E eu pensei que era para utilizar como marcador. (comentário: Beatriz tinha distribuído aos alunos uma tira de cartolina azul, com a forma de pergaminho enrolado nas pontas e com uma caravela na parte superior, que realmente tem a forma de um marcador. Nele está um pequeno texto intitulado “A Quebra das mercadorias”.)
	Beatriz	E é para utilizarem. É para ler e serve como marcador.
	Al	É da história, não é professora?
	Beatriz	Primeiro vamos ler um bocadinho da história.
	Al	História! História não.
1m03s	Beatriz	Então leiam lá. Estão a ler aquilo que eu vos dei? Já leram? Joel lê lá.
	Al-Jo	(o aluno começa a ler, mas há outro alunos a conversar na aula)
	Beatriz	Francisco. Lê lá Joel.
	Al-jo	(não se consegue ouvir a leitura)
	Beatriz	Se se calarem o vosso colega já consegue ler. (comentário: continua o ruído de fundo)
	Al-jo	(continua a não se conseguir ouvir a leitura)
	Beatriz	Hugo. Hugo queres ir lá para fora?
2m51s	Al-jo	(já se consegue ouvir alguma coisa da leitura. O aluno terá lido o seguinte: *A partir do século XVI, muitas das especiarias e mercadorias provenientes do Oriente eram transportadas em naus, numa longa viagem marítima através dos Oceanos Índico e Atlântico. As dificuldades da viagem, sujeita a intempéries naturais e até ao ataque de corsários, e o mau acondicionamento das mercadorias faziam com que frequentemente uma parte dessa mercadoria ficasse danificada e se perdesse. Os navegadores e os mercadores falavam então em quebra da mercadoria*. Texto este que faz parte da proposta de tarefa apresentada pela investigadora).
2m56s	Beatriz	Então quem é que me explica o que o Joel acabou de ler.
	Al	História. História professora.
	Beatriz	E falava do quê Andreia?
	Al-An	… mercadorias.
	Beatriz	Mercadorias. E o que é que acontecia?
	Al	(não se consegue perceber a intervenção do aluno)
	Beatriz	E transportavam o quê do Oriente para Portugal? Transportavam ..
	Al	Mercadorias.
	Beatriz	Transportavam mercadorias. E o que é que acontecia ao longo da viagem .. a essas mercadorias? (há algumas intervenções que parecem disparatadas)

[8] A aula decorreu, por decisão da Prof Cooperante, em dois momentos. O primeiro às 8h 30 min (no período dedicado à aula de CN) e o 2º no horário da disciplina de matemática, à tarde.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

		Diz lá Liliana.
	al	(não se percebem as intervenções dos alunos)
	Beatriz	Por causa das tempestades havia dificuldades e as mercadorias ficavam o quê? Por vezes danificadas. E quando chegavam a Portugal para vender essas mercadorias, o que é que acontecia? Chegavam cá danificadas. Que é que acontecia ao preço delas? Era o mesmo ou não?[9]
	Als	Não.
	Beatriz	Não. Então sofria uma … como antigamente se falava, sofria uma quebra[10].
	Al	Uma quebra?
	Beatriz	Uma quebra. Vamos então resolver um problema .. (o ruído de fundo aumenta de intensidade) Aquilo que eu vos dei vocês, agora, podem usar como marcador.
		(comentário: Beatriz distribui ½ de folha amarela com o problema)
5m13s	Beatriz	Hugo estás a ler a actividade? Em vez de estares na conversa …
		(ruído de fundo)
	Beatriz	Muito bem Ana. Já toda a gente leu a actividade? Ainda não? Então vá, eu espero mais um bocadinho. Tiago já leste a actividade? Olha que eu vou-te perguntar.
	Al-Ti	Já a li, já a reli e já a tornei a ler e já .. (não se percebe)
	Al	Stora.
	Beatriz	Ham?
	Al	Aqui, chegaram mais 360 não é?
	Beatriz	Ham?
	Al	Chegaram mais 360?
	Beatriz	Não. O preço inicial … ham .. Inicialmente chegaram quantos quintais a Portugal? Quantos é que chegaram inicialmente[11]?
	Al	400.
	Beatriz	400. Só que depois houve uma quebra. Qual foi …aa.. Houve uma quebra que nós não sabemos quanto é que é. Quantos quintais é que tínhamos no final.
	Al	360.
	Beatriz	Então tens de ir ver qual é que foi a quebra. Ham? Como é que fazemos? Liliana lê lá a actividade.
	Al-li	*Uma nau carregou na Índia 400 quintais de gengibre .. (há vários alunos a falar ao mesmo tempo)*
	Beatriz	Tiago. Lê lá Liliana.

[9] NC: Beatriz só pode estar a pedir um palpite, pois no texto não há qualquer referência a questões monetárias. Para além disso, é claro que as mercadorias não poderiam ser comercializadas em Portugal ao preço em que foram adquiridas na índia. Penso que Beatriz pretende concluir que o facto de haver quebras provocava por si um aumento de preço, mas não me parece relevante esta questão.
[10] NC: Como é, possível que Beatriz diga uma coisa destas?
[11] NC: Não consigo explicar estas questões feitas por Beatriz. Parece que está completamente fora da situação.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

	Al-li	*Uma nau carregou na Índia 400 quintais de gengibre e 300 quintais de pimenta. Dos 400 quintais de gengibre chegaram a Portugal 360 quintais e dos 300 quintais de pimenta foram descarregados apenas 267 quintais. Calcula a quebra sofrida em cada uma das mercadorias.*
	Betariz	Então o que é que vamos fazer? O que é que nos pede? Liliana. Inês o que é que nos pede?
7m51s	Al-In	Vamos calcular a quantidade de pimenta que .. (não se consegue apanhar mais nada, há vários alunos a falar muito alto de outras coisas)
	Beatriz	E quanto é que tínhamos inicialmente?
	Al	400 quintais.
	Beatriz	E depois quando chegou a Portugal? Quanto é que tínhamos?
	Al	360.
8m18s	Beatriz	360. Então o que é que temos de fazer para comparar as quebras? Diz lá Inês[12].
	Al-in	Temos que fazer a diferença.
	Beatriz	Temos que fazer a diferença entre o quê? Entre a massa inicial que temos e a massa final com que chegou a Portugal.
	Al	Assim?
	Beatriz	Assim. Muito bem. Vai lá fazer Nico.
	Beatriz	Eu quero sempre os dados ao lado. (muito ruído de fundo)
	Al	… é de pimenta (não se percebe toda a frase).
	Beatriz	É de pimenta?
	Al	Mas ó stora, mas de pimenta ..
	Beatriz	Ouçam lá. O que é que temos de fazer? Ele sofreu quanto? 40 quintais em quanto?
	Al	40.
	Beatriz	Em 400, então temos que fazer o quê? Temos que ir relacionar o quê? Então temos de ir relacionar as duas quantidades, que é 400 sobre ..?
	Al	40.
	Beatriz	Sobre os 400, não é? 40 .. ele não perdeu 40 em 400?
	Al	Sim.
	Beatriz	E quê? E ..
	Al	33.
	Beatriz	33 em 300. Então façam lá. Só que depois o que é que acontece? O que é que nós temos ali? Temos o quê? Não temos o mesmo … Ah! Muito bem. Temos de ir fazer através de um proporção, porque eles não têm o mesmo .. quê?
	Al	O mesmo ..ham ..
	Beatriz	O mesmo conse.. O mesmo consequente.
	Al	Pois. (Beatriz circula entre os alunos)
10m24s	Beatriz	E tu consegues dar logo a resposta sem fazer? Logo assim? Então o que é que temos que fazer?

[12] NC: neste momento Beatriz já está a falar da alínea b que diz o seguinte: *Compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual deles sofreu a maior quebra.*

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

	Al	Temos a quebra.
	Beatriz	Vimos a quebra, não é? Mas ainda temos que a relacionar .. esta quebra, porque não tínhamos as mesmas quantidades. Pois não?
	Al	Oh stora, chegue aqui.
	Beatriz	Então temos quê? Temos de relacionar a quebra com o total que tínhamos, não é? Que é para relacionar as duas quantidades.
	Al	Subtraiem-se os … (não se percebe)
	Beatriz	Ele perdeu 40 em quanto?
	Al	Em gengibre stora.
	Beatriz	Sim, 40 de gengi .. 40 em quanto?
	Al	Em 400.
	Beatriz	Em 400. Então? Então temos que ir quê? Como é que nós aprendemos quando utilizamos a razão? Vamos relacionar as duas quantidades. Agora aqui também temos que relacionar quê? A quanti .. a quebra que sofreu com o total inicial que tínhamos. E depois o que é que acontece? Nós temos o mesmo quê? Com..se..quen..te. Temos de ir meter o mesmo ..
11m20s	Stora	Também dá a razão proporcional?
	Al	Stora a maior foi este aqui.
	Beatriz	Não podemos .. mas o que é que acontece? Nós não podemos quê? Comparar quantidades quê?
	Al	Diferentes.
	Beatriz	Com … com conse … diferentes. Com totais diferentes. Então o que é que temos de fazer?
	Al	Porquê stora?
	Beatriz	Essa é de gengibre e então a de pimenta? Qual é que foi a quebra de pimenta, Nico? (Comentário: Beatriz que até aqui tem andado por entre as mesas a dialogar com alunos que estão sentados, dirige-se agora ao aluno que está no quadro há mais de 3 min)
	Beatriz	Diz lá Joel.
	Al-jo	300 quintais de pimenta a dividir por 267.
	Beatriz	Quanto é que tínhamos inicial de pimenta? Quantos quintais é que tínhamos?
	Al	267.
	Al	Não.
	Beatriz	Inicialmente quanto é que tínhamos de pimenta Inês?
	Al-In	300.
12m15s	Beatriz	300.
	Beatriz	33 (Beatriz está a ver a resolução de um aluno)
	Al	Agora não percebi a outra pergunta, stora.
	Beatriz	Está correcto. Dá 33, Nico.
	Beatriz	Então qual é que foi a quebra de gengibre que sofreu? (Beatriz fala para toda a turma).
	Al	40.
	Beatriz	E de pimenta?
	Al	Ai, de pimenta 33 quintais.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

12m48s	Beatriz	33 quintais. Podes-te ir sentar Nico[13]. Ana lê lá a segunda.
		(um aluno, Tiago, diz um conjunto de coisas sem sentido)
	Beatriz	Tiago! Diz lá Ana.
	Al-Be	*Compara as quebras sofridas pelos carregamentos de gengibre e pimenta e diz, justificando, qual deles sofreu a maior quebra.*
	Beatriz	Então o que é que temos de fazer? (nenhum aluno responde à pergunta, embora se ouçam vários a falar sobre outras coisas) Então o que é que acontece aqui? Nós não podemos quê? Comparar quantidades que quê? Com totais diferentes. Então ó que é que temos de fazer?
	Al	Temos de … (não se percebe mais)
	Beatriz	Temos de ir relacionar o quê? (pausa) a quebra sofrida com o quê? [14](pausa) Quanto é que tínhamos inicialmente?
	Al	400.
	Beatriz	Então temos de ir relacionar a quebra sofrida com 400 e quê?
	Al	E a quebra sofrida com 300.
	Beatriz	Só que mesmo assim ainda ficamos com quê? Com consequentes iguais ou diferentes?
	Al	Diferentes.
	Beatriz	Diferentes. Então o que é que temos de fazer para ficarem com o mesmo consequente? (pausa) (há imenso ruído de fundo)
14m16s	Beatriz	Através de uma proporção. Muito bem. E qual é que era o consequente? Qual é o consequente que a gente …
	Al	(Não se percebe)
	Beatriz	Não. Qual é que vai ser o consequente que nós queremos arranjar para depois ficarem com ..? (pausa, não se percebe se há alguma intervenção) Sim, inicialmente o que é que temos que fazer? Sim diz lá.
	Al	Eu fiz assim.
	Beatriz	Não, mas é quê? É 40, perdeu 40 em quanto? Em?
	Al	400.
	Beatriz	400.
15m01s	Beatriz	Então ouçam lá. Aqui como é que tínhamos falado? Que não podemos comparar as quebras com quê? Com totais diferentes. (Beatriz escreve as razões no quadro) Então o que é que eu quero? Relacionar a quebra com quê? Com o total inicial que eu tinha, não era? E a mesma coisa com a pimenta. Só que,

[13] NC: este aluno este mais de 4 minutos no quadro a calcular a quebra de pimenta e gengibre. Durante esse tempo, Beatriz circulou pela sala, falou com outros alunos, mas parece ter-se esquecido do aluno que está no quadro. Ainda mais porque alguns dos diálogos mantidos dizem respeito à segunda questão.

[14] NC: não é de admirar que os alunos não percebam a pergunta porque a alínea a não foi sequer explorada com a turma. Limitaram-se a calcular as diferenças. Na minha opinião uma boa passagem de a) para b) facilitaria o raciocínio dos alunos.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

		o que é que acontece? Elas não têm o mesmo (pausa) consequente. Porque são totais diferentes. Então temos que quê? Ir fazer o quê? Ir arranjar uma razão equivalente em que o consequente pode ser quanto?
	Al	300.
	Al	Oh stora, você apagou-me a resposta, agora já …(só este aluno chega para perturbar completamente uma aula)
	Beatriz	Ela tem de ficar com o mesmo consequente desta aqui. Da pimenta, para podermos comparar. (silêncio) O que é que podemos fazer?
		(ruído de fundo)
	Beatriz	Então o que é que nós podemos ir fazer? Podemos comparar aquela quantidade com o quê? (nenhum aluno parece responder à questão) Nós já estivemos a ver nos rótulos, por exemplo a quebra[15] em quanto? (pausa) Por exemplo, em cada 100.
	Al	Um aluno refere-se aos rótulos, mas não se percebe
	Beatriz	Ham?
	Al	Volta a fazer uma referência rótulos (a própria Beatriz parece não ter entendido)
	Beatriz	Esta foi a quê? Fomos relacionar o quê? Fomos comparar o quê? Duas quantidades. A quebra e o total inicial. Isto é do gengibre. E da pimenta como é que ia ficar? Qual é que foi a quebra?
	al	33.
	Beatriz	Em quanto? O que é que nós aqui temos? Elas não têm o quê?
	Al	O mesmo consequente.
	Beatriz	O mesmo consequente. Então o que é que tem de se fazer? Temos de ir arranjar o mesmo ..?
	Al	Consequente.
	Beatriz	Consequente.
	Al	100.
	Beatriz	100. Muito bem. Como o consequente 100 nós podemos ir facilmente … ver qual o quê? Qual é a quebra .. em 100. Em 100 quintais qual é que foi a quebra. E a mesma coisa aqui no gengibre. Agora assim já temos quê? [Beatriz escreve 40/400=?/100 e 33/300=?/100] O mesmo consequente. Porque assim não podíamos ir ver qual é que tinha sofrido maior quebra, porque não tínhamos totais
	Al	Iguais.
	Beatriz	Porque tínhamos totais diferentes. Agora temos o consequente 100.
	Al	Oh stora agora já dá.
	Beatriz	Agora já dá, porque temos o mesmo
	Al	O mesmo consequente. Então como é que ficava aqui? (há intervenções

[15] NC: embora parecesse inicialmente uma analogia feliz o uso do termo quebra associado a um rótulo estragou a analogia.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

		não perceptíveis) Ficamos a saber quanto é que ele perdeu em cada 100 quintais. Agora já sabem então fazer.
18m11s	Al	Stora.
		(há uma parte que não se percebe, Beatriz volta a circular entre os alunos)
18m39s	Beatriz	O que é que tivemos de ir fazer? Tivemos de ir arranjar um padrão comum. Neste caso foi o 100.
	Al	Porque é que é 100?
	Beatriz	Porque é que é 100? Vimos que a quebra que sofreu é no total que vinha, tinham totais diferentes. Não era? Gengibre e pimenta têm totais diferentes. Um tem 400 outro tem 300 e fomos tentar arranjar uma razão equivalente em que elas tivessem o mesmo consequente, para podermos comparar. Porque tinham consequentes diferentes[16].
		(Comentário: a PC explica qualquer coisa que não foi captado, mas creio que esta sugere que os alunos determinem através de uma proporção o antecedente das razões de consequente 100)
	Beatriz	Que alguém calcule. (Comentário: Beatriz circula entre os alunos, de facto está a orientá-los para que apliquem a identidade fundamental das proporções e façam o cálculo referido)
20m36s	Beatriz	Como é que nós podemos saber o outro valor? O que é que nós aprendemos? Que quê? Que o produto dos meios era igual a quê? Era igual ao produto dos … extremos. Sabendo que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, já conseguimos saber quanto é que era o outro valor.
21m31s	Beatriz	Já fizeram? (não há resposta a esta questão)
	Al	Oh stora, para descobrir isto é preciso fazer …?? a dividir por 100.
	Beatriz	O que é que nós vimos numa proporção? Que quê? Que o produto dos meios era igual ao produto dos extremos. Como é conseguiste calcular aquele que não sabemos?
		(há demasiado ruído de fundo)
22m06s	Beatriz	O que é que nós estivemos a fazer? Vimos quanto é que foi a quebra, mas fomos quê? Relacionar as duas quantidades. Neste caso a quebra e o total que tínhamos. Só que, o que é que acontece, elas têm consequentes diferentes. Então tivemos que ir arranjar um consequente igual de maneira a podermos comparar. Porque nós ali olhando para 40/400 e 33/300 não conseguimos saber qual é que sofreu maior quebra[17].
	Al	Oh stora eu não estou a perceber.
		(Beatriz fala com outro aluno, mas percebe-se mal)
	Beatriz	Inês já fizeste? Então vai lá fazer.
	Al	Oh stora.
	Beatriz	Ham? (não se percebe o que diz o aluno)

[16] NC: Beatriz não se mostra capaz de dar uma resposta satisfatória à aluna. Não terá percebido a pergunta ou não soube responder. Esta questão foi tratada com pormenor nas SF.
[17] NC: Beatriz nem sequer pediu aos alunos que comparassem as quebras absolutas sofridas pelas duas mercadorias, por isso não é de estranhar que estes sintam dificuldades.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

		E agora? Nós não sabemos aquele ponto de interrogação. O que é que vamos fazer?
	Al	Ah!
	Beatriz	Então aqui fizeste a mesma coisa. Tens de fazer a conta 40 vezes 100.
	Al	4000.
	Beatriz	Então? 4000. Para saberes o ponto de interrogação vais fazer 4000 a dividir por 400.
	Al	A stora é a maior. (este comentário não é do aluno com que Beatriz dialoga)
	Beatriz	Como é que chegaste a esses valores, ao 10 e ao 11. Explica lá o resultado se faz favor, Inês. Explica lá aos teus colegas. Podes apagar isso.
		(a PC intervém com um "CHEGA!" peremptório[18])
	Beatriz	Tu tens de meter vezes o ponto de interrogação, o que não sabemos, porquê? Porque o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A dividir por … e aqui enganaste-te. Não, enganaste-te Inês. Aqui quanto é que dá? 40 vezes 100.
	Al-In	4000.
	Beatriz	4000, tinhas bem. Não, mas aqui o que é que tinhas de fazer? O produto dos extremos é igual a quê? Ao produto dos meios, não é? O produto dos extremos é 40 vezes 100 é igual a quanto? A 400 vezes aquilo que não sabíamos. Então 40 vezes 100 é 4000 a dividir por .. 400.
	Al-In	(Diz qualquer coisa que não é perceptível)
	Beatriz	Mas assim não está correcto. Temos de fazer como .. através quê? O produto dos meios é igual a quê? Ao produto dos extremos. (Beatriz ainda está junto ao quadro) Hugo já fizeste? Inês já fizeste? Sim é igual a … a dividir por … Tens aqui 300, também tens de colocar aqui 300. Vezes o ponto de interrogação.
	Al	Oh stora, de onde é que vem o 4000?
27m17s	Beatriz	É da multiplicação de 40 vezes 100. Explica lá Inês, aos teus colegas, como é que tu fizeste.
	Al	Stora 40 vezes 100 é 4000.
	Beatriz	É 4000.
	Al	Mas está lá 400.
	Beatriz	Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste Inês. Porque é que tu fizeste assim[19]. Ouçam o que a Inês explica.
	Al-In	Fiz 40 vezes 100
	Beatriz	Sim.
	Al-In	a dividir por 400.

[18] NC: De facto há sempre alunos nesta turma que elevam a voz sobre a dos restantes e que, pior do que isso, fazem comentários totalmente fora de contexto.
[19] NC: A aluna terá de se limitar a repetir as indicações que lhe foram dadas por Beatriz.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

	Beatriz	A dividir por 400, porquê? O que é que nós aprendemos através da identidade fundamental das proporções? Que nós chegámos a ver através daquela tabela? Como é que era?
	Al	Era uma igualdade.
	Beatriz	Uma igualdade. O produto dos
	Als	Extremos
	Beatriz	Dos extremos era igual ao produto do quê?
	Als	Dos meios.
	Beatriz	Dos meios. Então foi o que a Inês fez aqui. Foi multiplicar rós extremos e foi multiplicar quê[20]?
	Al	Os meios.
	Beatriz	Os meios. Por isso é que aparece aqui 40 vezes 100 igual a 400 vezes aquilo que não sabemos. Por isso é que aparece aqui 400 vezes ?. E depois para sabermos quanto é que é este valor, ela foi dividir os 4000 pelos 400 e deu 10. Agora se vocês quiserem verificar realmente se dá o mesmo resultado, colocam 40 vezes 100 que dava 4000 e se multiplicarem agora, outra vez, 400 vezes 10, vai dar o mesmo resultado. Porquê porque o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. E a mesma coisa com a pimenta. Agora já podemos saber qual é que sofreu maior quebra. Qual é que foi?
	Al	(há vários alunos a falar ao mesmo tempo, nem se consegue perceber se alguém dá resposta)
	Beatriz	Foi a pimenta, porquê? Qual foi a quebra? Foi 11 em quanto? 11 em quanto?
	Al	Em 100.
	Beatriz	Em 100. Como é que podemos representar 11 em 100? (há alunos cujas vozes se sobrepõem às dos restantes, nem consigo perceber se alguém respondeu) Perdeu 11 por cada 100 quintais. Perdeu 11 quintais por cada 100 quintais. E como é que nós podemos representar? Em vez de pormos assim, como é que podemos representar. Nós já aprendemos. Como é que se lê? (comentário: Beatriz escreveu 11/100=11%)
	Al	Onze por cento.
29m51s	Beatriz	Onze por cento. Muito bem. E aqui?
	Al	10%.
	Beatriz	10%. Porquê? O que é que podemos dizer? Sofreu .. como é que podemos ler aquilo? Qual é que foi a quebra? Foi 11 por cada 100. Então coloca lá a resposta.
		(mais uma vez a PC intervém: Já chega!)
	Beatriz	Também podemos concluir que por cada 100 quintais que vinham, 11% foi de quebra[21]. (Beatriz já distribuiu, entretanto, uma 1/2 folha com outra actividade[22].)

[20] NC: Beatriz enfatiza o cálculo em detrimento de aspectos conceptuais. Os problemas são insuficientemente explorados do ponto de vista conceptual. Neste caso, até aqui, em nenhum momento Beatriz consegue fazer ver aos alunos o porquê dos cálculos que estão a fazer.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

31m08s		Continua a tua a tua resposta. A maior quebra foi a de pimenta[23].
	Beatriz	Tiago estás a fazer a actividade ou estás na conversa? Melissa já leste a actividade?
	Al	(O aluno pergunta algo que envolve percentagem)
	Beatriz	Como é que nós lemos esta percentagem.
	Al	20 por cento.
	Beatriz	Sim. 20 por cento, mas como é que nós representamos? É quanto? É 20 em quanto?
	Al	Em 100.
	Beatriz	Em 100. Então olhem lá, ainda estivemos a fazer ali aquela. 11% é igual quê? Quando nos dizem 20%, o quê? Em 20 ...
	Al	Em 100.
	Beatriz	Em 100 perde 20. Então e agora qual é que era o preço?
	Al	130.
	Beatriz	130. Então agora temos que ir saber qual é que era … Temos de fazer através de uma ..
	Al	Proporção.
	Beatriz	Proporção. É igual a quê? Muito bem. Correctamente.
	Al	Assim?
	Beatriz	Assim. Muito bem. Diz Inês. É ao contrário. O 130 é em baixo. Porquê? Porque esse foi o valor .. o desconto que ia ser feito e tínhamos que ir ver o preço aqui. O preço total fica em baixo. Agora aqui é que temos que ir ver qual é que foi o desconto, porque este 20 foi o desconto que fazia. Em 100, 20 foi desconto. 20 euros. Em cada 100€, 20 são de desconto. Temos que ir ver no total que tínhamos qual foi o total que foi feito.
	Al	Stora assim?
	Beatriz	Assim. Muito bem. Agora falta-te é depois o resultado.
	Al	(pergunta algo que não é perceptível)
	Beatriz	Dá. Mas também tem de colocar aqui vezes o ponto de interrogação, senão assim isto não é igual a 1600.
35m16s	Beatriz	Já fizeste? (o aluno diz qualquer coisa) É ao contrário. Este 130 é em baixo, porquê? Porque em 100 € fez-se um desconto e eu tenho do casco é 130, quero ver qual é que foi o desconto.
	Beatriz	Não. então como é que nós lemos este valor aqui.
	Al	20 por cento.
	Beatriz	Logo está .. 20€ em cada 100 são desconto, então não é? É ao contrário, é 20 sobre .. 100. É a mesma coisa que quê? 20%. Tu não

[21] NC: Beatriz evidência alguma confusão conceptual.
[22] NC: A Joana comprou um casaco que custou 130 euros com 20% de desconto. Qaunto apgou pelo casaco?
[23] NC: terminou deste modo a resolução do problema. Não se voltou atrás, não se reflectiu sobre a resolução nem se verificaram soluções.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula27_04_06)

		tens assim. Ouçam lá como é que nós representamos 20%? Não é 20 .. que é igual a 20%? Porquê? Em 100€, 20€ são de desconto.
	Beatriz	130 é de baixo. Porquê? Porque eu quero saber qual é que foi o desconto? O desconto que me fazem, no total. Então 100 não é o total.
	Al	Foi 6€.
	Beatriz	Desconto de 6€? Como é que têm resolvido? Não.
	Al	Onde é o que o % na calculadora, stora?
	Beatriz	Isso foi o desconto, mas agora eu quero saber quanto é que ela foi pagar. Quanto é que era o preço do casaco?
	Al	130.
	Beatriz	Então esse aí foi o quê? Foi o desconto. Vamos fazer agora a diferença. Muito bem Inês.
	Al	Contas é tão bom.
	Beatriz	De certeza que deu isso? 2000 a dividir por 130 dá quanto? Não deu isso.
		(Beatriz pergunta à PC se ainda há tempo de corrigir. Ao que esta lhe responde que sim, se alguém lá for rapidamente. Beatriz diz que a Inês já resolveu)
37m46s	Beatriz	Inês vai lá resolver ao quadro. Não vai a Andreia.
	Al	Stora a mim deu-me 36.
	Beatriz	É porque não fizeram bem as contas. Então o que é que fizeram? Tem de colocar tudo direitinho como fizemos à bocadinho. O produto dos meios igual ao produto dos extremos. Então o que é que têm de fazer 20 vezes
	Al	130.
	Beatriz	A dividir por 100. E quanto é que isso dá?
	Al	Só se for a conta de vezes que está mal.
	Beatriz	Não, a vezes está correcta a divisão é que não está bem.
		(a PC intervém dirigindo-se à aluna que está no quadro; à aluna faltaria pôr o ponto de interrogação:"igual a 100 x ?)
	Beatriz	Vezes o ponto de interrogação, porquê? 2600 não é igual a 100.
		(a PC continua a intervir, penso que corrige Beatriz)
	Beatriz	Sim é igual a … vezes 100. Sim.
		(não transcrevi o último minuto, nada acrescenta porque Beatriz continua a apoiar alunos particulares de forma análoga às anteriores)
	Beatriz	Muito bem. Então quanto é que a Joana foi pagar pelo casaco?
	Al	114€.
	Beatriz	114€. Muito bem. Porquê. Porque esses 26 € foi o desconto que foi feito em cada 100. depois tínhamos de ir ver quanto é que ela pagou. Podem começar já a arrumar.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

Transcrição da 2ª parte da aula de Beatriz
4/05/2006, 14h57min (47min52s de gravação)

25s	Beatriz	Então qual é que é a melhor compra? Faz lá.
		[A aula inicia-se com muito ruído de fundo. Beatriz retoma o problema que ficou por terminar na 1ª parte da aula]
~5m	Beatriz	[Distribui a tarefa aos alunos]
	al(a)	Outra vez, stora? [comentário: a aluna refere-se certamente ao facto de estar a ser distribuída outra proposta de tarefa]
	Beatriz	Peço desculpa.
	al	Posso começar a ler, stora?
	al	Stora?
	Beatriz	Podem.
		Posso começar a ler?
5m50s	Beatriz	Já estão a ler a actividade? … não [ruído de fundo]
	Al	Hã?
	Beatriz	Não podes começar tu primeiro a ler sozinho, individual. [ouvem-se alguns lamentos]
	Beatriz	Oh Tiago!
	Beatriz	Ângela começa lá a ler. Tiago! [ruído]
	Beatriz	Ângela começa lá a ler. Oh, Tiago! A próxima vez … Espera lá, Ângela! A próxima vez [ruído]. Tiago vais lá para fora.
	Al (Tiago)	Não me apetece.
6m40s	Beatriz	Ah! Então porta-te bem. Ângela.
	Al	No período áureo dos descobrimentos, era frequente dois ou mais indivíduos associarem-se de forma a poderem concretizar certos negócios. Formavam então a chamada Companhia, para a qual cada indivíduo entrava com uma determinada quantia de dinheiro.
7m11s	Beatriz	Oh, Tiago! Espera lá, Ângela. [parece ouvir-se um aluno a ler em voz alta. Qual é o próximo a querer ir lá para fora?
	Al	Eu.
	Als	Porquê? … Eu não …[ouvem-se alguns alunos a falar, gradualmente o ruído vai reduzindo]]
7m46s	Beatriz	A Ângela já pode começar? Começa lá Ângela.
	Al	Muitos desses negócios eram ocasionais e uma vez terminados era necessário dividir os lucros ou as perdas entre os companheiros. Ora, nem sempre os parceiros entravam com quantias iguais e por isso o cálculo do lucro ou das perdas de cada um era muito importante.
	Beatriz	Então quem é que explica aquilo que a Ângela acabou de ler? Inês és capaz de explicar?
	Al	Eram pessoas que se juntavam e reuniam uma quantidade de dinheiro para formar um negócio[24].

[24] NC: A aluna evidência ter compreendido o texto do problema.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	Para formarem um negócio. Então e … o que é que acontecia?
	Al	As pessoas, cada pessoa entrava com quantias diferentes…
8m43s	Beatriz	E depois no final, o que é que acontecia? … Se entravam com quantias diferentes será que depois no final dividiam igual… ou o que é que acontecia?
	Al	Alguns ficavam com menos e outros com
	Beatriz	Quem é que ficava com menos e quem é que ficava com mais? [ouve-se uma resposta que não é perceptível] Diz lá?
	al	Quem levasse mais dinheiro
	Beatriz	Quem entrasse com mais dinheiro também tinha direito, quê? A receber…
	Als	Mais dinheiro.
	Beatriz	A receber mais dinheiro. Tinha que ser quê?
	Als	Igual ou …[não se percebe o que dizem]
	Beatriz	Tinha que ser proporcional ao valor com que ele tinha entrado[25]. Liliana começa … lê lá agora a primeira …
9m40s	Al Liliana	[não se percebe: Dois mercadores Pedro e Luys fizeram uma companhia na qual Pedro pôs 20 cruzados e Luys 30. Os dois ganharam 35 cruzados. Pergunto: quanto caberá a cada um destes companheiros]
		Quem é que explica o enunciado do problema? … Quem é que me explica o enunciado do problema?
		[ouvem-se intervenções, não perceptíveis de alguns alunos]
		Diz lá, Patrícia.
9m50s	Al	Pedro e Luís fizeram uma companhia.
	Beatriz	Sim.
	Al	Depois o Pedro entrou com 20 e o Luys com 30 e os dois ganharam a mesma quantia, 35.
	Beatriz	35. E agora o que é que temos de fazer?[26] Sim? Diz lá!
	Al	O Francisco riscou a mesa para nada [comentário fora de contexto]
	Beatriz	Então quais é que são as grandezas aqui envolvidas? [ruído de fundo] Diz lá.
	Al	… está a falar de outra coisa…
	Beatriz	As grandezas, quais são as grandezas? O que é que nós entendemos por grandezas? [comentário: algum ruído de fundo, ouve-se também a PC] O que é que nós entendemos por grandezas? Então, quando nos outros problemas que nós tínhamos feito, quais é que eram as grandezas? [comentário: ouvem-se alguns alunos, provavelmente a responder, mas não é perceptível] Hã, diz lá.
	Al	[não se percebe a intervenção do aluno]

[25] NC: Parece-me um pouco precipitado fazer esta questão aos alunos. Nada no texto introdutório /de contextualização permitia ao aluno tirar esta conclusão. Quanto muito podia ter sido clarificado o sentido dos termos lucro e perda e depois disso discutir como proceder no fi0nl do negócio para repartir os lucros ou as perdas.
[26] NC: Terá sido esta questão apropriada? Poderão os alunos entender a questão?

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	Sim, e agora nesta situação?
	Al	[não se percebe a intervenção do aluno]
	Beatriz	Neste caso é quê? … O capital com que cada um entrou e depois … e o quê?
	Al	E o que ganhou.
9m58s	Beatriz	E o lucro, o que ganhou. Então, o que é que vamos comparar? Vamos comparar o quê, neste caso?
	al	O lucro e o que deu.
	Beatriz	O que ganhou que é o lucro e o que … e o capital inicial que foi o que cada um deu.
11m18s	Beatriz	Continua lá a ler, Liliana.
	Al	«Tendo em conta que acabada a pareceria, o contrato entre os companheiros estabelecia que o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital com que cada um entrou na companhia, como é que deverá ser repartido o lucro?»
	Beatriz	Então o que é que é um contrato? Alguém me sabe dizer o que é um contrato? … Quem é que me sabe dizer o que é um contrato? … Diz lá, Inês.
	al	É um acordo…
	Beatriz	É tipo um acordo que os dois fizeram. Muito bem! E o que é … como é … [algum ruído] Hugo é para te sentares. Então, como é que o contrato era estabelecido? Como é que o contrato era estabelecido?... Carina, como é que o contrato era estabelecido? [as vozes dos alunos não são perceptíveis]
12m33s	Beatriz	Com o quê? Como é que o contrato era estabelecido?
	Al	(não se percebe)
	Beatriz	Perda …
	Al	… com cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital…
	Beatriz	Cada um entrou, ou seja, se entrou com menos, também irá …
	Al	Receber menos
	Beatriz	Receber menos. E o que é que significa proporcional? Quem é que nos há-de dizer o que significa ali a palavra proporcional? Inês?
	Al	Igual.
	Beatriz	Hã?
	Al	Igual [comentário: ouve-se outro aluno que pergunta algo relacionado com o problema: mas a perda …
	Beatriz	Neste caso o quê? Então diz assim «o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital», então o lucro tem de ser proporcional ao capital, o que é que queremos dizer com proporcional? [algumas vozes] Diz o que é que ias a dizer, Inês.
13m35s	Al	Penso que proporcional … (não se percebe)

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	Ou seja, a grandeza … vamos comparar as duas grandezas, o capital inicial e o quê…?
	Al	Lucro.
	Beatriz	E o lucro. A razão entre essas duas … o que é que tem de acontecer? … entre essas grandezas, o que é que tem de ser?
	Al	Proporcional.
	Beatriz	Tem de ser directamente proporcional … ou seja a razão tem de ser quê?
	Al	Directamente proporcional.
	Beatriz	Sim, tem que ser directamente proporcional e tem de ser quê? … Con…
	Al	Constante.
	Beatriz	Tem que ser constante. Então façam lá então, agora a actividade. Diz…
	Al	Não sei o que é constante.
	Beatriz	Um valor, um valor … ouve lá. Aquilo que tivemos a ver…
14m24s	Al	Stora! O que é para fazer, stora?
	Beatriz	A actividade. Diz lá.
	Al	O que é constante?
	Beatriz	O que é constante? É um valor …é … Como é que eu hei-de explicar? A razão … Então ouve lá. Nós tínhamos quê? Duas grandezas. Há pouco tínhamos o quê? O preço e o quilograma, nós fomos, nós fomos fazer o quê? Comparar aquelas duas grandezas … fomos ver o quê? A razão entre elas e deu quê? Sempre o mesmo[27] …
	Al	Valor
	Beatriz	Valor. Que é constante, aquele valor …aquele quociente entre aquelas duas grandezas é sempre constante … o valor é sempre o mesmo. [algum ruído de fundo]
	Beatriz	Sim, e agora?
	Al	Agora temos que fazer … temos que …
	Beatriz	Não!
	Al	Temos que ir … achar … [não se percebe]
	Beatriz	Não! Têm que ir ver … façam tipo … uma grelhazinha e depois colocam o capital inicial, o que cada um deu … fazem … fazem, tipo o quê? … podem fazer assim, o Pedro e o Luys, depois colocam o capital com que cada um entrou e depois o lucro. [existe em simultâneo ruído de fundo] Hã?
	Al	Oh, stora! Stora!
	Beatriz	Colocam os dados, depois colocam o… capital [o aluno diz qualquer coisa que não se percebe]. Ah! Diz lá.
16m20s	al	Stora pode-me emprestar a sua calculadora?
	Beatriz	Diz lá, Liliana.
	al	É isto tudo o …(não se percebe)
	Beatriz	É. Então com quanto é que entrou o Pedro? Vinte cruzados.
	Al	Com 20

[27] NC: é preciso ter em atenção que o quilograma é uma unidade de medida da grandeza massa.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	E o Luís?
	Al	E o Luís com 30.
	Beatriz	Com 30. E qual é que foi… e qual é que foi … qual foi o capital inicial, com que tinham entrado[28]?
	Al	35.
	Beatriz	Não, isso foi o lucro. Isto é que foi o capital. Agora temos de ir ver qual foi … o que é que eles vão ganhar ….quanto é que eles vão ganhar.
	Al	Então temos que juntar…
	Beatriz	Quanto é que eles tinham no início?
	AL	50.
	Beatriz	50.
	Al	E agora temos que ir ver o lucro.
	Beatriz	Mas quanto é que foi o lucro? Aqui já sabemos, quanto é que foi o lucro? Quanto é que foi o lucro que eles tiveram?
	Al	50.
	Beatriz	Lê lá! Quanto é que foi o lucro? Os dois ganharam quanto?
	Al	35.
	Beatriz	35. Então agora já conseguem ver os outros valores. Através do quê? Se são directamente proporcionais, já conseguem ver quê? Quanto é que eles ganharam.
	Al	Stora pode chegar aqui?
	Beatriz	Não. São directamente proporcionais … faz tipo umas tabelas … tipo uma tabela[29]. Então já alguém resolveu a primeira … [ouvem-se vários alunos que chamam a stora]
	Al	Stora posso ir a apagar o quadro?
	Beatriz	Não. Podes estar sentado no lugar. Então como é que deverá ser repartido o lucro? Diz lá. [ruído de fundo] Lê lá a primeira alínea.
	al	«Tendo em conta que acabada a pareceria, o contrato entre os companheiros estabelecia que o lucro ou a perda de cada um dos companheiros fosse proporcional ao capital com que cada um entrou na companhia, como é que deverá ser repartido o lucro?» [ruído de fundo]
18m42s	Beatriz	Então como é que deverá ser repartido o lucro? O que é que nós estivemos a ver? Como é que deverá ser repartido o lucro? Então, o que é que o contrato estabelecia?
	Al	Estabelecia que …
	Al	Que o lucro …
	Beatriz	Sim…
	Al	…de cada um dos companheiros tinha de ser proporcionalmente …a ..
	Beatriz	Tinha que ser quê?
	Al	Proporcional …
	Beatriz	Tinha que ser proporcional ao quê?

[28] Os alunos não registaram previamente os dados do problema?
[29] NC: Porque não optou por começarem por registar no quadro os dados do problema, orientando depois todos os alunos para a sua organização em tabela?

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Al	…ao capital…
19m11s	Beatriz	Ao lucro … ao capital com que cada um tinha entrado … Então o que é que … então temos a resposta ao problema. Então como é que deverá ser repartido? … Tem de ser quê? Tem de ser repartido conforme o quê? … [não se percebe bem se algum aluno respondeu] Conforme o capital com que cada um entrou. Então e agora a segunda?
19m29s	Al	È para os dois ficaram com a mesma coisa?
	Beatriz	Não. Então o que é que o contrato estabelecia? O que é que o contrato estabelecia?
	Al	Oh, stora …[parece nada ter a ver com o que se está a tratar]
	Beatriz	Então, por exemplo, eu vou jogar no totoloto ali com a Carolina. A Carolina tem menos dinheiro e então quer investir menos dinheiro no totoloto[30]. Eu entro com 3 euros, ela entra com 2 euros e, depois, podíamos dizer o quê? No final, se ganharmos o totoloto podemos dividir ao meio, mas também podíamos chegar à conclusão com o quê? Ah, não. É melhor não. Eu entrei com mais dinheiro, também tenho direito a receber quê?…
	Al	Mais.
	Beatriz	Mais dinheiro. É a mesma coisa aqui, com o Pedro e com Luys. Então o contrato estabelecia que o quê? Que quando se investia com mais capital, também tinha direito a receber mais dinheiro.
	Al	A stora recebia mais…
	Beatriz	Eu iria receber mais. Então como é que iria… é o mesmo caso que … entre Pedro e o Luys. Como é que ia ser repartido o lucro? Irias … diz lá, Ricardo! Iria ser repartido conforme quê…
		(não se percebe)
	Beatriz	conforme quê? Conforme o capital com que cada um ia entrar. E a segunda?
20m42s	Al	Stora, nós não fizemos a primeira.
	Beatriz	Então, não é isso que estamos a fazer?
	Al	Não stora. Então e a resposta?
	Beatriz	Não há contas. É só para responder assim[31]. É só para interpretar. Então já alguém fez a alínea b)? (comentário: Beatriz circula e apoia os alunos no lugar)
	Al	Dá 175 (?), não dá? [comentário: a aluna terá calculado o produto 35 x 50]
		Não. Então como é que têm de ir fazer? [ruído de fundo, fala-se de um boné]
	Al	Temos que … dividir este por este.
	Beatriz	Não. Temos que ir quê? Podemos que ir através do quê?
	Al	De uma proporção.
	Beatriz	De uma proporção… Então como é que nós fazemos? Micael vai-te lá sentar.

[30] NC: Analogia sugerida na SF.
[31] NC: Os alunos não escreveram a resposta a esta questão?

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Al	Stora …
	Beatriz	Hã? [não se percebe a intervenção do aluno]
	Al	Oh, Stora não apague.
21m30s	Al	Oh, stora, não é assim … 20 a dividir por 1,75 e depois …
	Beatriz	Não … Vai lá escrever então ao quadro, Ricardo.
		[algumas intervenções dispersas de alunos que se dirigem ao aluno que está no quadro, pedindo-lhe, por exemplo, que não apague a resposta da questão anterior]
	Beatriz	Faz tipo assim … aqui é só … quanto é que o Pedro entrou … coloca assim, Pedro e Luys … quanto é que cada um entrou? [penso que Beatriz se dirige ao aluno que está no lugar]
	Al	Cada um entrou …
	Beatriz	Quanto é que Pedro entrou? Coloca lá, Pedro … Com quanto é que Pedro entrou?
	Beatriz	20 cruzados. E o Luys? Escreve ali em cima, o Luys. Então, como é que o lucro deve ser repartido? [está a dirigir-se à turma] O lucro deve ser …
		[um aluno está em diálogo com Beatriz]
22m33s	Beatriz	E quanto é que o Pedro e o Luys entraram os dois? Quanto é que tinham? Quanto é que era o capital inicial?
	Al	35.
	Beatriz	Não, esse foi o lucro. Quanto é que eles tinham os dois?
	Al	50.
	Beatriz	50. … Sim… o lucro deve ser repartido… Então como é deve ser repartido o lucro? Deve ser quê, repartido, quê?
	Al	Por aquele que … [diz qualquer coisa]
	Beatriz	Conforme o capital [um aluno diz: já podes apagar] … conforme o capital que cada um entrou. Era isso que o contrato estabelecia. E agora qual é que foi o lucro? Isto era o capital que eles tinham, não era? Escreve lá: o lucro deve ser repartido conforme o capital .. Quais eram as grandezas que nós queríamos comparar? É quê? Nós há bocadinho já falámos…
	Al	O capital e o lucro.
23m40s	Beatriz	O capital e o lucro. Então este era o capital que eles tinham. Diz lá, Inês. Qual é que era o lucro?
	Al	35
	Beatriz	Então, o lucro põe ali 35. Agora havemos de querer saber quanto é que foi cada um. Este aqui é que nós queremos ir saber. Como é que podemos fazer? Através do quê? Se eram directamente …., se são proporcionais … podemos ir através de quê? De uma … de uma? Pro…por…ção, então não é? Então, ouçam lá! Quanto é que o Pedro tinha no início? … Com quanto é que o Pedro entrou?
	Al	20.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	E o Luys?
	Al	30.
24m31s	Beatriz	E qual era o capital no início que nós tínhamos? Que o Pedro e o Luys foram investir?
	Al	50. [ouve-se escrever no quadro[32]]
	al	Está mal escrito, stora
	Beatriz	Pois está. Tinham quanto? 50. Quais são as grandezas aqui que nós estamos a comparar?
	Al	O capital …
	Beatriz	O capital e o …
	Al	Lucro.
	Beatriz	Então qual é que é o capital? Este é o capital. Qual é que é a outra grandeza?
	Al	O lucro.
	Beatriz	É o lucro.
	Al	Stora, isso aí é …do a?
	Beatriz	Isto é o lucro que o Pedro vai receber e que o Luys vai receber.
	Al	Não apague, se faz favor.
25m24s	Beatriz	E aquilo que nós queremos saber. Qual foi o lucro dos dois?
	Al	35.
	Beatriz	35.
	Beatriz	Agora temos de ir saber quanto é que eles vão receber. Se são directamente… Tiago … proporcionalidade entre o capital e o lucro, como é que podemos ir ver? Diz lá. (comentário: Beatriz dirige-se à turma. O registo dos dados e do que é pedido está completo)
	Al	… temos de dividir … (não se percebe)
	Beatriz	Não, então como é que nós fazemos? Diz lá.
	Al	Vamos dividir 50 por 35.
	Beatriz	Sim…
	Al	Depois o resultado … é multiplicado por 20 e 30.
	Beatriz	Por exemplo, por exemplo. Pode ser. Porquê? Fomos ver, quê? Qual é que era aqui a constante, porque se já nos estão a dizer que é proporcional, fomos ver aqui qual é o valor de … qual é que é o valor destas duas grandezas … que é a razão, depois podemos logo multiplicar pelo capital que o Pedro entrou, para saber qual é que era o lucro. Por exemplo essa era uma forma.
	Beatriz	Podes e não é para estragar, se faz favor.
26m45s	Beatriz	Por exemplo, muito bem.
27m05s	Al	Oh, stora. Esta é a alínea a).

[32] NC: o registo no quadro fica assim organizado:

	Pedro	Luís	Pedro+Luís
Capital	20	30	50
Lucro	?	?	35

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Al	É 50 a dividir por (não se percebe) e depois 50 a dividir por …
	Beatriz	Não. Diz lá como é que tu …
	al	Stora, isso que está no quadro é a alínea a)
	Beatriz	Não, é a alínea …Ah, esta é a alínea a) … que é a primeira. Esta já é da alínea b). Qual é que é a tua dúvida?
	Beatriz	50 a dividir por … É este valor, tens de multiplicar …agora multiplicas … aqui vezes … meti percentagem [Beatriz está a dialogar com uma aluna] 50 a dividir por 35, igual …ah, meti….50 a dividir por …
	al	35
		35 é igual … agora vezes 20
	Al	20
	Beatriz	Vai receber esse dinheiro. Vais receber …dos 35 vai receber 28 cruzados.
28m36s	Al (outra)	Pode dizer-me de onde é que vêm estes 35?
	Beatriz	É o lucro. Foi o lucro que eles tiveram. Eles investiram, os dois investiram 50 eu… 50 cruzados e tiveram depois um lucro de 35[33]. É o lucro. E agora, investiram 50 e tiveram um lucro de 35 e agora eu quero repartir esses 35 pelo Pedro e pelo Luys, só que entraram com … o Pedro entrou com menos, então também tem que vir a receber, quê? Menos. [algum ruído de fundo]
	Al	Dá 1,4
	Beatriz	Hã?
	Als	Este a dividir por este dá 1,4.
	Beatriz	1,4
	Al	Mete-se 1,4 ou mete-se o número todo?
	Beatriz	Mete-se … arredondas. É 1,43, aproximadamente.
	Beatriz	Mas faz ao contrário, faz ao contrário. Mete 50 … 35 a dividir por 50[34].
	Al	50.
	Beatriz	E depois multiplicas por 20. Hã?
	Al	50 a dividir por 35. Não, estamos a comparar o quê? O lucro para ver quanto é quê? Hã?
	Al	0,9 ou 0,99?
	Beatriz	0,99. Vamos comparar quê? Vamos ver quanto é que cada um recebeu. Então vamos dividir o lucro pelo capital, para ver …
	Al	Oh, professora…
	Beatriz	Hã?
	Al	Aqui, 50 a dividir por 35 não vai dar bem [há bastante ruído de fundo]
	Beatriz	Faz ao contrário, para vermos quanto é que vai ser … Diz.
	Al	O Ricardo anda só a beliscar-me.

[33] NC: questionar Beatriz: Quais as principais dificuldades sentidas pelos alunos? A que é que as atribui? Considera que conseguiu ultrapassá-las?
[34] NC: Terá ficado claro para o aluno a razão de ser da inversão dos termos da razão?

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	Ricardo.
	Al	Oh, stora é assim?
	Al	Não dá. Dá 45, esta.
	Beatriz	Não, fazes aí ao contrário para ver … o capital é directamente proporcional … ai, o lucro é directamente proporcional ao capital[35]. Então é …, fazem …dividem o lucro pelo capital.
	Al	(não se percebe)
	Beatriz	Não, mas têm primeiro que ir ver, o quê?
	Al	(não se percebe)
30m54s	Beatriz	Têm primeiro que ir ver …qual é que é o valor.
	Al	É isto a dividir isto … isto a dividir por cada um?
	Beatriz	Não, isto depois a multiplicar pelo 20.
	Al	E pelo …
	Beatriz	Depois têm de fazer isso a multiplicar por 30 para verem quanto é que o Luys vai receber. Tiago vai-te lá sentar no teu lugar. Diz lá!
	AL	Dá 0,7.
	Beatriz	E agora o que é têm de fazer? Mas estava bem como estavas a fazer; Inês.
	Al	Estava correcto?
	Beatriz	Ah! Isto é a constante, não é? Porque o lucro é directamente proporcional ao capital. Agora para saberes quanto é que o Pedro e o Luys vão receber, tens de multiplicar pelo 20 e pelo 30. Liliana, já fizeste?
	Al	Stora, isto aqui não dá assim?... Lá na calculadora, eu acho que estava lá 29 vírgula nove, nove …
	Beatriz	Deu-te esses valores?
	al	Deu-me dezanove vírgula tal, tal
	Beatriz	Não, estão correctos. Enganaste-te nalgum lado.
	Al	Stora a mim deu-me assim.
	Beatriz	Esses estão correctos. Vê lá, não fizeste bem os valores … (comentário: Beatriz apaga o quadro) Anda cá fazer Ângela. [ruído de fundo]
31ms	Beatriz	Ângela anda cá fazer a tua resolução ao quadro. Hugo vai-te lá sentar. Anda cá fazer a resolução ao quadro.
	Al	Oh stora ainda não fiz. Eu não sei fazer isto … a cálculo mental…
	Beatriz	Faz com uma calculadora, não tens? (ruído de fundo, comentários de uma aluna despropositados) Tiago, então?
	Al	Stora. Dá isto?
	Beatriz	Dá.
	Al	Aqui … a dividir por 20 dá 1.

[35] NC: questionar Beatriz: Ambas as grandezas são directamente proporcionais, mas a ordem em que se escreve a relação entre elas é muito importante, acha que esse aspecto ficou claro? Devia orientar os alunos para a relação entre lucro e capital.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Beatriz	Não é dividir, é multiplicar. Então não é? Como é que nós …
33m30s	Beatriz	Muito bem. Mas aqui a Inês … Vai-te lá sentar. Explica lá aos teus colegas como é que tu fizeste, Ângela. Explica lá. Como é que tu fizeste?
	Al	Dividi o lucro pelo total.
	Beatriz	Para veres o quê? O que é que é aquele 0,7? Diz lá, Melita?
	Al	É o valor que dividido por capital … (não se percebe)
	Beatriz	E isso é o quê?
	Al	É o 35 a dividir por 50.
	Beatriz	Sim, mas … como é que eu … [há respostas que não são perceptíveis. [a PC pergunta Como é que se chama?]
	Beatriz	Como é que se chama aquele valor? …
	al	Constante.
34m	Beatriz	Constante. [PC reforça: «é a constante de proporcionalidade»] É a constante de proporcionalidade, porque dizem-nos que o lucro é proporcional ao capital, então podemos logo multiplicar aquele valor, aquela constante, pelos 20 cruzados que foi o capital que o Pedro entrou e depois pelos 30 que foi o capital que o Luys entrou[36]. Mas a Inês resolveu de outra maneira. Anda cá … Podes-te ir sentar. Anda cá resolver Inês[37].
35m15s	Beatriz	José, então? Estão a encaixar mal.
	Al	Isto estava encaixado stora.
	Beatriz	José. Muito bem. Explica lá então aos teus colegas como é que tu fizeste? Ouçam lá. José. Inês explica lá, se faz favor.
	Al	… multiplicar …(não se percebe)
36m13s	Beatriz	Eu não consigo ouvir a Inês. [ruído de fundo] Para lá Inês. Enquanto os teus colegas não se calarem, tu não explicas. Shiu!
36m41s	Beatriz	Explica lá, Inês.
	Al-In	Eu fui multiplicar aquilo com que o Luys entrou pelos 35 e depois fui dividir pelos capitais que eles tinham. (comentário: a aluna explica, mas os aoutros parecem não prestar muit atenção
	Beatriz	A Inês foi resolver através de uma proporção. Porque nós sabemos que, o quê? Que as duas grandezas … Tiago senta-te lá, se faz favor.

[36] Poderia ter sido interpretado o significado da constante: a cada um dos companheiros cabe por cada cruzado investido 0,7 do cruzado de lucro.
[37] Inês vai ao quadro e escreve a proporção, do lado esquerdo do mesmo: 35/50=?/20

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Al	Stora só uma outra pergunta. Nós vamos fazer teste?
	Beatriz	Vão é agora a seguir. Nós sabemos que o quê? Que as duas grandezas são directamente proporcionais. Então a Inês foi resolver através de uma proporção. Se o … Nós sabemos que o quê? Que multiplicando … o produto dos meios, o produto dos meios, é igual ao produto dos extremos.
37m36s 38m12s	Beatriz	Isto aqui é que tu não sabes. Nós sabemos que o quê? Sabemos aqui qual é que foi o lucro e tínhamos o capital inicial. Se o Luys tinha entrado com 30 cruzados, ela queria saber qual tinha sido o lucro do Pedro, sabendo, ... Através de uma proporção, sabendo que multiplicando … o produto dos extremos … sabendo que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, vamos ver qual foi o lucro que o Pedro e o Luys tiveram. Podes-te ir sentar[38].
		(Beatriz distribui aos alunos uma folha com uma nova tarefa)
39m50s	Beatriz	Andreia começa lá a ler a actividade.
	Beatriz	Eu não consigo ouvir a Andreia.
		(a PC intervém no sentido de chamar a atenção aos alunos)
	Beatriz	Andreia.
40m30s	Al-An	Posso? No gráfico estão representadas percentagens de diferentes tipos árvores existentes num bosque
	Beatriz	Espera lá. Então vocês têm aqui um gráfico. A .. já conhecem este tipo de gráfico? Já alguma vez viram?
	Al	Já.
	Beatriz	Sabem como é que se chama? Ham?
	AL	Isto também dá para fazer no coiso, no computador. Eu já fiz.
	Beatriz	Já viram assim um … mas como é que se chama, como é quês e chamam este tipo de gráficos? Sabem como é que se chamam?
	Als	(uma série de comentários descabidos que não transcrevi)
	Beatriz	Gráficos de quê? (muito ruído de fundo)
	Beatriz	Gráficos circulares. Muito bem. Para que é usado? Sabem?
	Al	É tipo aquilo das barrinhas.
	Beatriz	Para que é usado?
		(uma série de intervenções de alunos que não transcrevi por se sobreporem e só se ouvirem algumas descabidas)
	Beatriz	Por exemplo. Para vermos as percentagens. Na roda dos alimentos para quê? Para vermos como .. por exemplo?
	Al	A quantidade de alimentos que devemos comer em maior quantidade.
	Beatriz	Em maior ou menor quantidade. Então aí no vosso gráfico, olhando para

[38] NC: parece-me, mesmo após a observação da videogravação, que não é verbalizado o lucro de cada um e que a resposta nem sequer é escrita. Também não se procede a qualquer verificação da resposta.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

		ele, qual é que acham .. aa .. qual é que acham que a percentagem é maior? É no dos pinheiros mansos ou na dos eucaliptos?
	Al	É no pinheiro manso.
	Beatriz	Pinheiro manso. Porquê?
	Al	Porque a quantidade da lua é maior do que a ..
	Beatriz	Porque essa parte desse sector é maior[39]. Algum .. Olhando para ele há alguns que a gente vê logo a quanto é que corresponde. Qual é que é?
	Als	É o de .. eucalipto.
	Beatriz	Eucalipto. Porquê?
		(não se percebe o que dizem os alunos, continua a haver ruído de fundo)
	Beatriz	Sim. Mas olhando lá para o gráfico qual era aquele que a gente via logo ..?
	Al	É o 25.
	Beatriz	É o 25. Porquê?
		(não se percebem as várias intervenções, continuam a haver alunos que falam de outras coisas)
	Al	É ¼, está dividido.
	Beatriz	Porquê? O círculo é quê? … corresponde a quanto? Quanto é que corresponde o círculo todo?
	Al	A uma unidade.
	Beatriz	A uma unidade, que é quanto? Neste caso. Que é 100%. Que é o todo. (toque) E aquela parte … a Melissa disse muito bem. É quê?
	Al	¼.
	Beatriz	¼. Então ¼ é igual a quê?
	Al	25%.
	Beatriz	25%. Então e se fosse ½, era quanto?
	Al	15
	Al	Não, 50.
	Beatriz	50. E ¾?
	Al	75.
	Beatriz	75. E a unidade? Corresponde a .. 100. A .. Elodie lê lá a próxima alínea.
	Al	Eu?
	Beatriz	Sim.
	Al-El	Qual é o tipo de árvore que existe em menor quantidade nesse bosque? E em maior quantidade?
	Beatriz	Qual o que existe em menor quantidade? Diz lá.
	Al	As mimosas. E em maior quantidade é nos pinheiros mansos.
	Beatriz	Nos pinheiros mansos. Então agora é a próxima alínea. Resolvam lá.
	Al	É 30 (comentário: trata-se de um aluno que fala com Beatriz).
	Beatriz	30. Porquê? Como é que chegaste lá?
	Al	100 menos 70.
	Beatriz	Sim, muito bem. Porquê?

[39] NC: Beatriz deveria ter usado o termo área. Efectivamente trata-se de comparar a área dos sectores circulares.

Anexo 17
Transcrição da prática de ensino de Beatriz (Aula04_05_06)

	Al	Porque o todo é 100.
	Beatriz	O todo é 100 e vais ver a quanto é que essa parte corresponde.
	Beatriz	Diz lá. (comentário: Beatriz dirige-se a um aluno que veio ter com ela e que já a chamava há algum tempo)
	Al	Stora. Aqui .. assim é 25. Eu medi com uma régua e isto aqui é igual a isto.
	Beatriz	Mas o todo é quanto? A quanto é que corresponde o todo?
	Al	É 100.
	Beatriz	Então? É fácil saberes quanto é que é este. Se este todo corresponde a 100, basta fazeres o quê?
	Al	21 divide .. não. 100 a dividir por ..
	Beatriz	Não. Se este todo é 100 e sabes estes todos, vais saber quanto é que é este.
44m30s		(não transcrevi os restantes 3min da gravação)

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 13/12/05)

Inv	Como é que a Joana se sente perante uma situação deste género?
Joana	Eu acho que aqui, quando refere isto .. eu não sei, eu acho que não oferece dificuldade porque está aqui a dizer: traduzimos uma meia de terça por .. em linguagem matemática traduzimos uma meia de terça por ½ x 1/3.
Inv	Mas note que pode haver raciocínios associados à divisão.
Joana	Sim, porque multiplicar leva a aumentar e nalguns casos diminui e isso é que leva a associar à divisão. Depois vão colocar em cima de uma terça a meia e então vai dar o contrário do que eles estavam à espera. É daí que deve vir a confusão, acho eu.
Inv	A Joana tem de estar consciente das dificuldades que podem surgir na aula e que tem de arranjar uma estratégia que ajude a ultrapassá-los e com a qual se sinta confortável. Eu também fiquei a pensar que esta tarefa talvez seja demais para uma aula só. Não sei também como é que a vossa turma reage às tarefas propostas.
Joana	É um bocadinho lento. Há lá alunos que resolvem .. dentro de um ritmo normal que nós estamos à espera e resolvem. E há outros que não, que têm muitas dificuldades. Depois outros que se põem à conversa e só depois é que se lembram de ir fazer (risos), situaçõe
	[A colega de estágio, Daniela, fala um pouco sobre a turma. Volta-se a analisar a tarefa. A inv sugere algumas alterações à formulação original, decorrentes das reuniões tidas com as futuras professoras]
Inv	Por outro lado, fiquei a pensar que será melhor não incluir explicitamente na tarefa o pedido de tradução em linguagem matemática. Creio que a Joana pode gerir melhor a tarefa se isto não estiver aqui escrito.
Joana	Eu acho que sim. Eu acho que é preferível não estar lá «traduz em linguagem matemática as relações entre …», porque, não sei, eles ao olharem para esta questão aqui .. se calhar são capazes de se confundir. E, por exemplo, já aqui falar na meia e depois falar em linguagem matemática logo .. se calhar eles captam a linguagem matemática e não fazem aquela distinção entre .. Ficam logo com a linguagem matemática, não sei.
Inv	Essa é uma opção sua. O que importa é não esquecer é que nós queremos sempre estabelecer o paralelismo entre linguagem corrente e linguagem matemática.
	(É nesta sessão que a investigadora propõe o problema do quarto e da vintena e fala-se também dos problemas do peixe e dos pobres - todos eles problemas de aplicação da multiplicação)
Inv	Acha que estas situações podem motivar os alunos?
Joana	Acho que sim. Se eles .. se nós levarmos isto para a sala de aula, só de ser diferente.. assim .. o conteúdo que eles estão habituados. Acho que os motiva. Agora das duas uma, professora (risos), eles não gostam muito de história só se eles não aderirem aos problemas por causa disso (risos de ambas). Agora é que eu não sei. Mas não, acho que vai funcionar bem.
Inv	Joana estou a sugerir-lhe estes problemas, porque são situações diferentes do habitual. É assim que deve entender as coisas.
Joana	Sim, sim. E eu acho que isto é mais interessante do que aqueles problemas que vêm nos livros e que é sempre a mesma coisa. Eu acho que eles se vão interessar.
Inv	São problemas modelados pela multiplicação. Agora uma coisa essencial é que consiga quando introduz a multiplicação que eles percebam o raciocínio

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 13/12/05)

	multiplicativo.
Joana	Aí é que é o fundamental.
Inv	E a mesma coisa vai acontecer quando introduzirem a divisão.
Beatriz	Mas a divisão só vem ao fim .. Agora a seguir é os triângulos e quadriláteros, acho eu.
Joana	É.
Inv	Voltando à tarefa para a introdução da multiplicação, vocês puseram alguns problemas relativamente à utilização da linguagem popular (meia, terça, sesma, …) e foram de opinião que se deviam fazer algumas alterações à linguagem.
Joana	Ah sim, porque nós tínhamos visto.. Por exemplo, aquela que a professora estava a dizer. Esta. «traduz em linguagem matemática …
Inv	Eu tinha ficado com ideia de que foi aqui, na terminologia popular.
Joana	Ah aqui. Estávamos a falar em alterar, mas depois .. acho que eles devem lá chegar. Mesmo referindo «uma meia», que era como se dizia antigamente, corresponde a tanto. E eles depois vêm que a terça é um terço. A terça parte .. um terço .. onde deveria dar mais problemas seria aqui ..
Beatriz	Professora, nós não estivemos a ver como é que se representava a sétima parte, a nona parte, .. Não tinha cá, pois não? Só tinha estes?
Inv	Não tinha esses divisores.
Joana	Sim, tínhamos visto isso. Só usavam ½, 1/3, ¼, 1/6.
Inv	Mas não os tinham mesmo.
Joana	Sim (pausa). Não os tinha onde a professora tirou.
Inv	Não, não os tinha. Esses eram os únicos divisores que eram usados.
Joana	Ah, não eram usados os outros?
Inv	Quê? A sétima parte? Não, não era usada.
Joana	Porquê? Dava muitos problemas.
Inv	Se nós repararmos nas subdivisões usadas podemos observar que a partir da meia, se obtém facilmente a quarta e a oitava, por sucessivas subdivisões ao meio. Do mesmo modo, a sesma obtém-se dividindo ao meio a terça. Ora, se é fácil dividir um comprimento ao meio, já não o é dividi-lo em sete partes iguais. Por outro lado a terça representa o palmo. Recorde que o côvado tinha três palmos e a vara cinco palmos, daí, parece-me que se justifica o uso da terça e da sexta parte.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 04/01/06)

Inv	Então as férias foram boas?
Beatriz	Não muito boas. Cheias de trabalho (risos de ambas).
Inv	Então Joana já começou a sua semana de PP?
Joana	Não, só começo amanhã.
Inv	Então porquê?
Joana	Porque os miúdos vão fazer uma avaliação e para não haver mistura de conteúdos. Para não os baralhar, começa amanhã.
Inv	Então na 3ª feira (3 de Janeiro) foi a Daniela que começou?
Joana	Foi.
Inv	A Daniela é de vocês as três, a que deu mais aulas a matemática.
Joana	Mas já parou agora.
Inv	Parou, entra a Joana e a Beatriz está em Ciências. Quando é que trocam?
Beatriz	Eu já paro 3ª feira, graças a Deus (risos).
Inv	E passa para a Daniela? A Daniela não tem período de descanso.
Beatriz	É verdade, professora.
Joana	Foi a que deu mais aulas (risos).
Inv	Vocês agora têm de tentar equilibrar as semanas.
Joana	Sim, mas isso já está planeado.
Inv	Bem vamos lá ser rápidas que eu já vi que vocês estão cheias de trabalho.
Joana	Sim professora e temos de entregar um trabalho amanhã.
Inv	Joana o que é que tem planeado para amanhã?
Joana	Para amanhã vou dar a multiplicação. Tenho um panfleto com a história .. sobre as antigas unidades. Aquela historiazinha pequenita que a professora me deu (comentário: refere-se a algo inspirado no texto de contextualização do Problema «medir e calcular com as antigas unidades» elaborado pela inv), pu-la no panfleto, pus lá uma imagem para eles, e vou-lhes dar isso, logo no início. Depois disso, de eles lerem para ficarem contextualizados, para saberem como é que era, como é que não era, antigamente. Tipo um pouco de história da matemática e depois disso vou dar-lhes aqueles problemas que tínhamos estado a ver, que é sobre lá na feira. Os côvados ..
Inv	Portanto introduzir a multiplicação.
Joana	Sim. Vão trabalhar dois a dois. Cada grupo de dois tem um exemplar do côvado, da sesma, da meia , … Vai ser trabalhar dois a dois e à medida que eles vão trabalhando, vão descobrindo. Depois discutimos todos os problemas que lhe são dados. Vai ser discutido e depois disso vou-lhes dar uma informação sobre como fazer a multiplicação, o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador.
Inv	E vai-lhes dar a informação ou vai esperar que sejam eles a chegar a ela?
Joana	Sim, vou esperar que eles cheguem a essa conclusão e depois eu dou a informação, para eles ficarem com a informação colada no caderno.
Inv	Então, não esqueça que todas aquelas situações são situações novas, em que o multiplicador é um número fraccionário. Mas já falámos nisso. Deve ter em atenção que algum pode dizer que calcular um meio da *meia* é o mesmo que dividir por dois.
Joana	Sim.
Inv	Portanto esse é o seu plano para amanhã. E depois para a semana?

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 04/01/06)

Joana	Para a semana vou dar o inverso [1]de um número racional.
Inv	Para a semana já o inverso?
Joana	Sim, professora. Terça-feira.
Inv	O inverso?
Joana	Acho que é isso[2]. É isso é. É através das laranjas[3].
Inv	E as propriedades da multiplicação?
Joana	As propriedades vamos falar depois, professora.
Inv	Essa planificação foi feita por sugestão da PC?
Joana	Sim. Nós planificámos assim.
Inv	E não resolve situações de aplicação da multiplicação?
Joana	Ah sim, depois de ter dado aquela informaçãozinha vou-lhes dar os problemas … que são o da repartição do dinheiro pelos pobres e o do peixe.
Inv	Mas porque é que vai explorar esses problemas?
Joana	Nós gostámos deles, professora (risos).
Inv	O mais interessante pode ser o do Quarto e da Vintena, pois é um problema real.
Joana	Ah esse aí não vamos fazer.
Inv	Mas trata-se de um problema real que liga com conteúdos da disciplina de História. Não gostou dele?
Joana	Até gostei, mas achei mais piada aos outros, não sei porquê (risos).
Inv	Esse problema tem a vantagem de traduzir uma situação real de pagamento de um imposto que fazia uso dos números fraccionários. Para além disso, os alunos abordam em História a problemática do pagamento de direitos sobre a mercadorias, apesar de não terem, seguramente, abordado esse imposto em particular. Só não sabem é como é que esses direitos eram calculados.
Joana	Esses dois problemas, em princípio, se houver tempo, vou fazê-los. Se houver tempo vou realizá-los. Se não houver tempo, ficará para outro dia. E depois é o inverso de um número racional.
Inv	E então como é que vai trabalhar o inverso?
Joana	O inverso de um número racional, professora? Através de .. não tenho cá o livro. Pois não. É a actividade que está no Mx ou no My … É de umas laranjas.
Inv	Sim, já sei qual é. Eu pensei que poderia aproveitar aquilo que foi feito e introduzir o conceito de inverso a partir de uma determinada unidade de comprimento, sem ter necessidade de seguir o me. Vejamos se vos consigo expor a minha ideia. (pausa) Temos aqui uma unidade de comprimento qualquer, materializada numa tira de papel. Suponhamos que queremos explicar porque é que ½ vezes 2 é igual a 1. Ora eu posso encarar ½ x 2 da seguinte maneira: quando eu considero metade da unidade, cabem na unidade 2 vezes meia-unidade.
Joana	Sim, duas vezes a metade.
Inv	Ou seja, as duas vezes meia-unidade é igual à própria unidade. Se considerarmos outras fracções da unidade …

[1] Planificação muito centrada em conteúdos, aspecto que aliás é comum a todas as futuras professoras. Talvez isso decorra da forma como a PP está organizada.
[2] NC: Joana procura a sua planificação da unidade
[3] NC: Refere-se a uma situação proposta num me de 6º ano para a introdução do inverso.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 04/01/06)

Joana	Por exemplo 1/3.
Inv	Sim, 1/3 é idêntico ao exemplo anterior. Quantas vezes cabe 1/3 na unidade?
Joana	3.
Inv	Então 3x1/3 é 1, a unidade. Consideremos agora uma fracção como por exemplo 2/3. Quantas vezes cabe os 2/3 aqui na unidade? (pausa)
Joana	Dois terços na unidade?
Inv	Sim. Quantas vezes cabe? Não cabe um número inteiro de vezes.
Joana	Pois.
Inv	Cabe uma vez, certo? E este pedacinho?
Joana	É metade dos 2/3.
Inv	É metade dos 2/3. Ou seja, cabe uma vez mais um meio. Ora 1 mais ½ é? … 3/2. Então isto significa que 3/2 vezes 2/3 é igual ..
Joana	A 1.
Inv	A 1. Estão a ver? É uma outra perspectiva para a introdução do inverso. É claro que é muito mais simples de explicar com fracções unitárias do que com outro tipo de fracções. E pode ser feito com qualquer tipo de fracção, desde que seja uma fracção inferior à unidade. Se a fracção for superior à unidade surgem dificuldades de difícil explicação neste nível de ensino.
Joana	Sim. Quer dizer, também é interessante.
Inv	Eu não me tinha apercebido que vocês iam alterar a planificação original.
Joana	Pois.
Inv	E também tenho outra coisa para vos dizer a propósito do que me perguntaram há tempos.
Joana	O quê?
Inv	A propósito das vossas planificações (comentário: a inv refere-se às planificações a médio prazo que as duas futuras professoras lhe facultaram), estive a vê-las com atenção nas férias. Penso que vocês poderiam começar a fazê-las numa outra lógica, que encaixa no que a PC vos pediu e vos pode facilitar um pouco mais o trabalho. Em vez de listarem um conjunto de competências gerais que o conteúdo vos permite desenvolver, eu sugiro que as formulem em termos de competência matemática específica, indicando explicitamente o que respeita ao conteúdo, às capacidades e às atitudes.
	(não transcrevi)
	Retoma-se a planificação feita por Joana.
Joana	O inverso estava a pensar dar pelas laranjas. Agora nem sei o que hei-de fazer.
Inv	Eu de facto não conversei com vocês sobre o inverso porque de facto não estava a contar que o fossem introduzir na próxima aula. A sugestão que apresentei até a pode achar complicada, não sei.
Joana	Não, dá para ver.
Inv	No fundo, trata-se de pegar na mesma ideia que vai trabalhar amanhã para introduzir outro conceito.
Joana	Sim. Aquela história do côvado também.
Inv	É uma unidade de comprimento qualquer. Aqui não se interessa se é o côvado ou outra qualquer unidade.
Joana	A unidade de .. é o côvado ..
Inv	Isto ainda permite mais tarde vir a introduzir a divisão, mas isso veremos mais

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 04/01/06)

	à frente. Mas não precisa alterar a sua planificação. Até porque já vai dar para a próxima semana e depois não tem tempo de pensar sobre as coisas. Nós precisamos de ter tempo para pensar ..
Beatriz	Já está tudo pensado. Agora se alterar um bocadinho!
Inv	Tem de ter tempo para pensar e sentir-se bem com o que planeia fazer. Isso é fundamental.
Beatriz	Tivemos tanto trabalho, depois era mais um.
Inv	Eu estava descansada porque vocês têm ali o inverso quase no final.
Beatriz	Depois decidimos trocar. Foi a nossa PC.
Inv	Pois seguiram as sugestões dela. Ela achou melhor, não foi?
Beatriz	Sim.
Inv	Aliás o inverso é uma propriedade da multiplicação. Sem o ser referido explicitamente, é uma propriedade importante da multiplicação. É a propriedade conhecida por “existência de inverso”.
Joana	E é.
	(não transcrevi, a inv fala um pouco sobre estruturas algébricas)
Inv	Joana, amanhã posso ir observar a sua aula ou vai filmá-la?
Joana	Pode ir. Não estava a pensar filmá-la.
Inv	E eu incomodo, se lá estiver?
Joana	Não, por amor de Deus. Claro que não.
Inv	Incomodo menos do que a câmara?
Joana	(risos) É igual. Mas pode ir, professora. Então as nossas aulas tem que ser observadas. É igual. Ir lá a professora ou ir lá a professora supervisora é a mesma coisa.
Inv	Ontem estive na EB X e a Mariana nem deu por mim. Então a que horas é a sua aula?
Joana	É às 3 menos 5.
Inv	Ah é aquela aula em que eles estão muito agitados?
Joana	É (risos).
	(não transcrevi uma pequena parte que não interessa)
Joana	Professora, a nossa turma se não tivesse lá 3 elementos era do melhor. Assim, … três, quatro, para não dizer cinco (risos). Mas é verdade, faltando os elementos destabilizadores da turma, trabalha-se bem.
Inv	Hoje à noite telefono à PC para saber se ele não se importa que eu vá observar a sua aula. Vamos ver se as coisas correm bem. Vão correr certamente.
Joana	Não sei. É o primeiro.
Inv	É a sua primeira experiência em matemática[4].
Joana	É (risos) .
Inv	Mas também já os conhece das aulas de ciências. E pense em propor-lhes o problema do quarto e da vintena.
Joana	Está bem.
Inv	Neste momento tem a “multiplicação” integralmente planificada? Todas as aulas?

[4] Durante o 1º período Joana apenas desenvolveu prática pedagógica na disciplina de ciências da natureza

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 04/01/06)

Joana	Sim.
Inv	Então para a semana introduz o "inverso" e depois?
Joana	Depois as propriedades da multiplicação.
Inv	Na 3ª semana ou ainda na próxima semana?
Joana	Depende professora de como for o andamento. Mas se calhar … não sei se será tudo na mesma semana.
Inv	Não se precipite em relação à introdução do conceito de inverso. É importante que lhes proponha vários problemas que envolvam raciocínios multiplicativos. Isso é fundamental. Aprender a operar com fracções em abstracto serve-lhes de pouco. Todos nós sabemos que esquecemos facilmente coisas que tem pouco sentido para nós. Portanto é bom que se proponham situações problemáticas e problemas, onde as operações tenham relevo e onde o que estão a aprender se aplique. Para tornar a aprendizagem das fracções mais palpável, porque no nosso dia-a-dia as fracções parecem não ter muita utilização. Para além disso com a utilização dos computadores e das calculadoras em larga escala, trabalhamos mais com números em representação decimal do que fraccionário. No entanto elas são importantes, sobretudo aquelas que não são representáveis por uma dízima finita.
Inv	Insisto na importância de propor situações que envolvam raciocínios multiplicativos. E penso que é assim que vocês têm planificado.
Joana	Sim.
Beatriz	Nós queremos propor o máximo de situações problemáticas para eles resolverem.
Inv	Quando for possível devem proporcionar o trabalho com materiais que ajudam, embora não cheguem como sabem.
Joana	Mas ajudam.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 17/02/06)

Inv	Então eles andam mais calmos?
Joana	Ai professora, eu acho que não. Ás vezes acalmam. Têm momentos. Mas eu acho que eles já foram piores. Nas primeiras aulas .. Cada vez que me lembro que andaram lá pegados no meio da sala, a baterem-se. O Tiago rasgou o livro de matemática todo e andou aos murros ao armário. Ai, meu Deus.
Inv	Mas o livro dele?
Joana	Sim, o livro dele. Ainda bem que foi o dele e não o de um colega (risos).
Inv	Isso foi logo no início do ano?
Joana	Logo no início, devíamos estar na 3ª semana, para aí.
Inv	Nessa perspectiva, andam muito mais calmos.
Joana	Nessa perspectiva andam. Já não se pegam (risos), mas ainda agora na 5ª feira aconteceu lá uma situação desagradável. Porque há lá um miúdo que ele é muito .. tem muito boas notas, mas é muito ajudado em casa, porque ele tem uma tias, elas deviam ter andado aqui na ESE, que tiraram o nosso curso e foram estagiárias da Professora Fernanda, e ele como sabe que tem as tias e que estas o ajudam, ele vai para as aulas e não faz nada. «Não quero saber isto, eu falo com as minhas tias e não sei quê». Ele próprio já diz «não faço nada disto» e então em vez de estar na aula a resolver as coisas que lhe são postas, os problemas que lhe são propostas, não. Põe-se na macacada, a meter-se com os outros colegas e essas coisas assim. Entretanto na 5ª feira estava-se a meter com a outra colega, tirou-lhe o estojo. Primeiro disse que não queria trabalhar com o grupo, pôs-se lá numa mesa sozinho. Depois começou a meter-se com uma colega que era o do grupo dele, tirou-lhe o estojo e depois ela tirou-lhe o dele. Eu disse «dá cá o estojo para aqui, põe aqui em cima da minha mesa». E o estojo ficou em cima da minha mesa. Arrumou as coisas e disse «não quero fazer mais nada». Arrumou as coisas e ficou lá amuado. E eu «então Ricardo anda lá, faz isso», «não quero saber». Já estávamos mesmo no final da aula. Entretanto a professora Fernanda disse-lhe «tu e a Carina ficam aqui no final que eu quero conversar com vocês». Depois esteve a falar com ele. A professora disse-lhe «então Ricardo, achas que estás a ter uma atitude correcta? Apesar de teres boas notas as tuas atitudes contam para a nota». E ele logo «ah professora deixe-me ir estudar português», porque eles iam ter teste no dia a seguir. E ele «professora eu quero ir estudar português. Vou-me embora» e a professora Fernanda a falar com ele e ele não a olhava nos olhos. Ao que ela disse «primeiro olha-se para mim, porque isso é uma falta de respeito, não me estares a olhar nos olhos». E depois entretanto «ah eu vou-me embora». Foi-se embora e a professora Fernanda «Ricardo anda aqui, quero falar contigo. Não vires assim as costas». Seguiu, foi-se embora assim. uma falta de respeito. Eu acho que eles têm muita liberdade, mas isso já é próprio do meio familiar. Não estão habituados a cumprir regras. No meu tempo, na minha altura, algum dia pensava faltar ao respeito a algum professor. Nunca na vida. Eles não. Por exemplo, virar costas ao professor e o professor a falar com ele e ele vira costas e vai-se embora, assim ...
Inv	É um padrão de comportamento inteiramente desadequado.
Joana	Lá está. E há dois ou três elementos que são assim e destabilizam. Mas eles falam mal uns dos outros: «eu não quero trabalhar com este grupo». Colocamo-

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 17/02/06)

	lo noutro grupo: «oh o quê? Com este nem pensar». Nunca estão bem em lado nenhum.
Inv	Já leu a transcrição de parte da aula que eu transcrevi. E então?
Joana	E então, foi muito longa a duração da actividade. Eu acho que foi bastante longa … mas também porque a … actividade envolveu muitas etapas e isso leva sempre algum tempo e os miúdos depois, quando foi no final da expressão numérica começaram-se a baralhar.
Inv	Porque é que decidiu pedir-lhes uma expressão numérica?
Joana	Porque era uma aula que eu estava a dar, professora. A matéria que eu estava a dar.
Inv	E a Joana tinha planificado e escrito previamente a expressão numérica que pretendia que eles escrevessem?
Joana	Ah tinha, tinha.
Inv	Portanto achou que eles tinham dificuldade em escrever a expressão numérica?
Joana	Sim, professora. Só que entretanto eles começaram-se a baralhar e eu senti que … Mal eu dei conta, já eu estava baralhada também. E depois até comentei com a professora Fernanda e e ela até afirmou que até ela estava a ficar baralhada com aquilo que eles estavam a dizer.
Inv	Porque é que os teve a trabalhar em grupo? Porque eles estavam em grupo, ou não?
Joana	Oh professora, já nem me lembro .. deixe-me pensar. Ah estavam em grupo porque depois eles iam jogar. Foi por isso que estavam em grupo.
Inv	E acha que foi uma estratégia adequada para a tarefa proposta - resolução do problema e escrita da expressão numérica?
Joana	De quê? De fazerem em grupo?
Inv	Sim.
Joana	Não sei. Eles até se ajudam. Bem, alguns, porque outros são muito individualistas.
Inv	E acha que todos os grupos estiveram envolvidos?
Joana	Todos os grupos? Todos os grupos estiveram, agora todos os elementos do grupo isso não.
Inv	Eu também tive essa sensação quando estive a ver a vídeo gravação.
Joana	Eu escrevi os grupos no quadro e eles sentavam-se.
Inv	Eu anotei «parece-me que alguns alunos não só não resolveram o problema, como nem passaram a resolução». Não sei se foi assim.
Joana	Não, eu acho que isso ..todos .. a resolução, pelo menos, todos passaram.
Inv	Acha?
Joana	Acho que sim.
Inv	E qual foi a sua sensação relativamente á reacção dos alunos ao problema? Compreenderam a situação?
Joana	Professora, o que eu acho é que eles gostaram muito ao início quando viram, quando eu lhes mostrei o problema antigo. Também gostaram muito daquela linguagem e quando lhes dei o problema, eles ficaram interessados. Só que depois, quando foi na parte da resolução é que muitos, como não estavam a entender, distanciaram-se um bocado. Começaram a falar de outras coisas.
Inv	E porque é que acha que eles não estavam a entender?
Joana	Não sei, professora. Só se for .. mas a linguagem era clara e eu expliquei,

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 17/02/06)

	salientei várias vezes: então o que é que nós queremos? O que é que eles davam ao rei, o que é que não davam. Eu acho que a questão foi de terem de dar um quarto ao rei e depois ainda terem que dar um vinte avos ao rei, novamente. E acho que aí é que foi a baralhação deles, porque pensavam: «se já deu um quarto, como é que ainda vai dar um vinte avos? Para mim, foi aí a confusão deles. Não sei. O que é que a professora pensa?
Inv	Eu quero é a sua opinião, porque a Joana é que esteve na aula e sentiu a reacção dos alunos.
Joana	Eu acho que foi aí, porque eu perguntei: - mas nós já demos ¼ ao rei, mas ainda temos que dar do que sobrou mais um vinte avos - e acho que até houve uma aluna que perguntou: -mas damos mais? Então não tínhamos já dado ¼?-. Não sei se ficou gravado.
Inv	Acha que eles não perceberam a natureza do imposto?
Joana	Exactamente. Eu acho que sim, que eles tinham que dar ¼ e depois do que sobrava ainda tinham de dar mais um vinte avos. E eu acho que eles não compreenderam porque é que tinham de dar mais um vinte avos.
Inv	E depois, acha que com a sua explicação isso ficou claro?
Joana	Para muito ficou, mas para outros não. Aqueles alunos assim … mas eu acho que ficou.
Inv	Achou que o problema era mais difícil do que os que habitualmente propõe?
Joana	Não, eu acho que não. Eu acho que não. Só foi só por aquela questão que eles não entenderam bem que tinham de dar novamente um vinte avos ao rei, não compreenderam se calhar bem o imposto. Mas de outra forma eles resolveram bem.
Inv	Depois na escrita da expressão numérica houve bastantes dificuldades.
Joana	Sim, na expressão numérica é que houve muitas. (pausa) Ela até nem era complicada.
Inv	Também não é muito simples, apesar de só pedir a escrita da expressão numérica que exprime a parte que foi para o rei.
Joana	Sim, sim, só escrevemos da parte que foi para o rei.
Inv	Na vídeo gravação, como a câmara está imóvel no fundo da sala eu não consigo ler o que os alunos escrevem no quadro. Presumo que o que tenham feito foi qualquer coisa assim. (comentário a inv escreve num papel a expressão que pensa que ter sido escrita no quadro). Corrija-me se eu estiver errada. Foi isto?
Joana	Nós pusemos .. tínhamos 64 quintais, não era? A expressão acho que não era bem essa. Acho que era 64 …e depois era .. desses 64 retirávamos ¼ e depois ainda retirávamos 1/20 e foi essa expressão que lá escrevemos.
Inv	Então era esta.
Joana	Sim é esta a expressão mas nós escrevemos de forma. diferente.
Inv	Só que aqui em vez de porem isto (comentário: refere-se a (64-1/4x64) puseram 48 (comentário: o resultado do cálculo indicado anteriormente).
Joana	Não, não. Foi ¼ vezes 64.
Inv	É que de facto eu não consegui visualizar expressão escrita no quadro.
Joana	Se a professora quiser eu tenho lá escrita a expressão numérica que escrevemos.
Inv	Não, não se preocupe porque já estou esclarecida.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 17/02/06)

	Eu também fiquei com a sensação que, por vezes, os alunos ficam muito tempo no quadro. Ou estou enganada?
Joana	Muito tempo no quadro, como?
Inv	Uma aluno vai ao quadro. Nesta aula a Inês foi ao quadro e já lá estava outra aluna. Acabaram por ficar ambas no quadro.
Joana	Sim, porque a aluna não estava .. estava a fazer só que entretanto acho que ela se enganou e a Inês estava a dizer «é assim» e eu disse-lhe «então Inês vem cá ajudar a tua colega» e ela foi lá ajudar.
Inv	Notei que há grupos, em que os alunos estão quase sempre desatentos. Os alunos que faziam parte do grupo que está a ser filmado (comentário: a câmara estava focada de forma fixa), eu duvido que eles tenham passado sequer a resolução.
Joana	Esse grupo ... há lá dois ou 3 elementos que passaram de certeza. O Hugo, esse, de certeza que não passou.
Inv	Na sua opinião, os alunos acharam o problema mais difícil do que os fazem habitualmente?
Joana	Eu acho que foi só por aquela questão de .. ter que se dar .. do imposto. De ter de se retirar duas vezes para o rei.
Inv	E a Joana sentiu-se bem a orientar a resolução deste problema?
Joana	Senti, só depois na parte .. quando foi da expressão numérica e eles começaram «ai, eu não sei de onde … Eu «Ai Jesus, é de onde? Calma lá, vamos lá ver isso». Mas depois ..
Inv	Foi a primeira aula em que trabalharam expressões numéricas com a multiplicação?
Joana	Foi. Foi a primeira.
Inv	Nesse caso escolheu uma expressão um bocado complicada, Joana. Estava nos planos iniciais, pois não?
Joana	Não.
Inv	Eu até tinha-lhe chamado a atenção para a dificuldade dessa expressão.
Joana	Sim, ela não é anda fácil. Por isso é que nós decidimos só pedir-lhes a expressão que era para o rei.
Inv	De qualquer modo a escrita da expressão tornar-se-ia eventualmente mais fácil se os dados fossem registados em coluna e depois ir registando organizadamente cada um dos passos seguidos no cálculo.
Joana	Mas estavam lá as expressões todas, professora.
Inv	Sim, mas o que eu quero dizer é que a organização ajudaria muito a orientar os alunos em direcção à expressão numérica. (comentário: a investigadora ilustra numa folha de papel a forma de organizar os dados)
Joana	Acho que foi essa. (pausa) Eu acho que sim.
Inv	Como estava a trabalhar uma expressão com alguma complexidade, uma estratégia possível e diferente desta que seguiu poderia ser esta que referi. Por outro lado, se o problema tivesse sido precedido de outras tarefas em que pedisse aos alunos o que é que representa uma dada expressão talvez se tornasse mais simples para os alunos compreender o que pretendia que fizessem
Joana	Sim, eu depois fiz actividades com eles sobre isso. E fiz outra que era, dei-lhes uma expressão e depois pedi-lhes que inventassem um problema quês e possa

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 17/02/06)

	adaptar à expressão. A esta expressão.
Inv	Se tem proposto este problema depois disso, tornava-se, provavelmente, mais fácil para eles. Assim, a Joana desenvolveu um grande esforço. A certa altura da gravação é bem perceptível o seu cansaço. Percebe-se que está a puxar muito pela voz. Houve uma altura em que eu me sentia mal a fazer a transcrição
Joana	Ai que horror.
Inv	Eles continuam a falar, tem de interromper continuamente o seu discurso para chamar a atenção.
Joana	O problema era esse. Porque estavam lá dois ou três elementos, acho que lhes chamei várias vezes a atenção.
Inv	Sim, várias vezes. Francisco porque é que não estás atento?
Joana	O Francisco não sei o que é que tinha.
Inv	Oh meninos tomem lá atenção que eu assim não consigo falar; estás a ouvir Francisco?; Espera Joel; oh Micael quantas vezes é que preciso de te chamar atenção? Esta a ver? Isto é um desgaste. (comentário: a inv lê a partir da transcrição algumas das expressões usadas por Joana.)
Joana	É professora. (risos) Isto assim tem uma graça. Eu acho. (risos)
Inv	Quando eu lhe dei a transcrição, a Joana começou a ler e logo de seguida começou a rir, a rir.
Joana	Mas é verdade professora. A minha colega que está lá comigo no quarto e ela estava a fazer umas coisas e eu estava a ler a transcrição e eu começo-me a rir sozinha. E ela «deve ter muita graça» e eu «queres ler?». A gente riu-se com certas situações que aí estão. Aquela parte que me meteu graça foi aquela parte. «a stora também ali está. Está lá uma stora» e não sei quê. «estava tirar a fotografia, a stora não estava lá».
Inv	Então e está receptiva a fazer o problema do gato e do rato.
Joana	Estou. Claro que estou.
Inv	Esperando que corra um pouco melhor que aquela actividade com o côvado e as braças.
Joana	Ah sim. espero bem que sim.
Inv	Que curiosamente correu muito bem na exposição.
Joana	Pois … e … aqui também é diferente porque eles saem do meio deles e vêm … tipo um pouco mais …não vêm com aquele à vontade todo para falar. Não, estão um pouco mais apreensivos daquilo que vão dizer e estão com mais atenção. Eu acho que uma pessoa … mesmo até nós quando mudamos de meio ficamos um pouco mais reservados. Ficamos diferentes. E com eles passa-se a mesma coisa. E aqui era diferente .. também, só o não estarem dentro da sala de aula.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 03/03/06)

Inv	Hoje vamos falar um bocadinho sobre a exposição, se vocês ainda se lembrarem.
Joana	Acho que sim.
Inv	O que eu pretendo falar com vocês relaciona-se com aspectos da preparação do vosso módulo (dificuldades, …)
Joana	O nosso foi um bocadinho difícil de preparar. Nem uma, nem outra tem jeito para o desenho (risos).
Inv	Mas esse problema foi resolvido.
Beatriz	Ah
Joana	Mais ou menos.
Beatriz	Mais ou menos.
Inv	Eu não percebi muito bem como é que vocês construíram os cartazes. Vocês fizeram os contornos das figuras e a Sílvia pintou a carvão. Foi assim?
Joana	Nós desenhámos tudo, professora. Ela só pôs aquelas sombras.
Beatriz	Nós é que fizemos tudo, a Sílvia é que .. pronto
Inv	Sombreou?
Beatriz	Sim, com o carvão. Pintou e não pintou.
	(não transcrevi, porque Beatriz quis falar de alguns problemas que ocorreram na preparação da exposição, é por isso que interrompo a gravação)(também não transcrevi A0060.wav, porque entrou um colega no gabinete. Dessa gravação apenas há registar que ambas ficaram satisfeitas com o trabalho final relativo aos cartazes)
Inv	Passemos para aspectos relacionados com a dinamização do módulo. Gostaria que fizessem alguns comentários relativamente ao apoio solicitado pelos alunos. Vocês só estiveram no vosso módulo?
Beatriz	Não, eu estive no da balança.
Inv	Pois esteve no módulo da massa e a Joana?
Joana	Eu só estive no nosso.
Inv	Que apoio é que os meninos solicitaram? Que tipo de apoio?
Joana	Quando era a 2ª actividade.
Inv	No módulo do comprimento?
Joana	Que era para somar.
Beatriz	O comprimento da peça[5].
Inv	Que dificuldade é que achou que eles sentiam?
Joana	Não sabiam por onde haviam de começar, mas depois eu disse «Calma lá, então um comprou três côvados, o outro comprou quatro. Quantos côvados já temos?». Depois já ia: - «Ah, temos sete». E depois daí, já eles iam juntar e agarravam logo nos padrões mais pequenos. Havia muitos, como nós tínhamos o padrão do côvado, nós tínhamos dois exemplares e aquilo acho que eram 3 côvados.
Inv	E queriam um terceiro?
Joana	E depois «Mas não chega, faltam cá côvados» (risos). E eu dizia-lhes: -«Mas não é preciso, já sabes». Eles depois iam logo juntar aos outros.

[5] Imagina que um comerciante de um mercado medieval vendeu a dois clientes uma peça de seda. O primeiro comprou três côvados e meio e uma sesma e o segundo comprou quatro côvados e uma terça. Qual o comprimento da peça de seda? (Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 210).

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 03/03/06)

Inv	E a Beatriz também sentiu isso?
Beatriz	Não.
Inv	Dificuldade na resolução do problema?
Beatriz	Sim, mas nada de …
Inv	E os vossos alunos?
Beatriz	Esses resolveram logo.
Joana	Sim, esses resolveram. Até disseram «nós já fizemos isto».
Inv	Não tinham feito exactamente aquele.
Joana	Sim, mas de andarem lá a colocar as barrinhas. Depois eu disse-lhes «Pois, mas não era assim com estas barrinhas» e eles «Sim, pois era com a cartolina, mas era ..»
Inv	Eles comentaram alguma coisa, na aula a seguir, sobre a exposição? Sobre a vinda a Castelo Branco?
Beatriz	Não, disseram que gostaram.
Joana	Disseram «A escola das storas é muito fixe. Eu também quero ir para lá» (risos). Acho que não houve assim mais nada.
Beatriz	Disseram que gostaram e não sei quê.
Inv	Nada de concreto? Então e a Beatriz no módulo da massa sentiu dificuldades na resolução do segundo problema?
Beatriz	Eles tinham bastante dificuldade em ver a relação entre as massas (risos)
Inv	Então que tipo de apoio é que lhes deu?
Beatriz	Já não sei muito bem como é que era. Um arrátel era ..
Joana	Dois meio-arrátel.
Beatriz	Sim, depois punham .. a relação das onças que eles tinham que duma para a outra era o dobro. Então em arráteis também tinha . Eles faziam logo a conta ao lado.
Inv	Eles faziam conta de papel e lápis?
Beatriz	Faziam.
Joana	No meu também.
Inv	No seu também?
Joana	Oh, professora, fazia-os somar. Um meio mais um meio, mais um sexto.
Inv	Fez somar aos de 6º ano, não aos de 5º ou 4º anos.
Joana	Sim, só aos de 6º ano. Disse-lhes para identificarem, para escreverem, para representarem. Tirar os dados. Tiraram todos, professora. Os miúdos de 1º ciclo também, «tirem lá os dados». Tiraram logo tudo. Até porque os do 1º ciclo nem era preciso dizer-lhes para tirarem os dados, eles já vêm com aquele hábito. Tiravam logo os dados, enquanto os de 5º e 6º ano já estavam assim «como é que é?» e então eu dizia-lhes «amos lá tirar os dados, para ver se entendes».
Inv	Vocês têm insistido nesse aspecto?
Joana	De tirar os dados? Sim, sim.
Inv	E depois de resolver, verificar a solução?
Joana	Sim.
Beatriz	Sim.
Inv	Sim? Então passemos para outra questão que tem a ver com a anterior. Ao nível da reacção das crianças o que é que têm a dizer sobre a compreensão do que era pedido e a satisfação ou insatisfação por terem ou não conseguido resolver o

	problema.
Joana	Ficavam todos contentes. Acho que .. quantos côvados é que tinha a peça? Já não me lembro.
Beatriz	Eram oito.
Joana	Eram oito ou eram sete?
Beatriz	Eram 3 e mais 4 do outro, depois havia mais uma meia, mais uma sesma, mais uma terça que faziam mais um côvado.
Joana	Então eram 8. Depois pegavam em 2 e diziam «mas faltam cá muitos» (risos).
Inv	Vocês conheceram as outras bancas em pormenor?
Beatriz	…Em pormenor, não. .. Conhecemos, porque inicialmente éramos para ficar só duas em cada visita..
Joana	E sabíamos o que é que era para ..
Beatriz	Sim, nós até tivemos que ficar com a resolução de todas e cada uma foi passar em cada banca, explicar como é que se fazia. Mas depois quando foi durante a exposição .. a.. nós estivemos lá. Sabíamos do que se tratava e do que se fazia, como é que se resolvia.
Joana	Sim, estou a falar em pormenores de termos lá estado, de termos trabalhado ..
Inv	Vocês conseguem dar uma opinião comparativa entre o grau de dificuldade dos problemas dos diferentes módulos?
Joana	Ah, havia bancas com maior grau de dificuldade.
Inv	Quais?
Joana	O dinheiro acho que era muito complicado para eles.
Inv	Porquê?
Joana	Eles confundiam-se muito.
Inv	Mas está a falar pelo que ouviu dizer ou é a sua opinião?
Joana	É a ideia que me deu, até pelos miúdos. Os inquéritos dos miúdos, eles referiram muito o dinheiro.
Inv	Mas a Joana não se dedicou um bocadinho ao problema do dinheiro?
Joana	Confesso que não (risos).
Inv	E a Beatriz? (silêncio) Ou seja não falam com conhecimento de causa, por terem sentido dificuldade na resolução?
Joana	Não, só pelo que vimos ali dos miúdos.
Inv	Só pelas reacções dos miúdos e das vossas colegas também?
Joana	Sim, sim.
Beatriz	Mas via-se quando eles estavam lá .. pronto .. eles estavam interessados em ver o dinheiro, moedas antigas. Na questão da resolução é que sentiram mais alguma dificuldade.
Inv	Então e outra banca que considerassem difícil?
Beatriz	Eu acho que a do volume era um bocadinho .. só que a maneira como elas fizeram a actividade, tornou-se assim … acho que facilitou um pouco a resolução das actividades.
Inv	E as outras?
Joana	A da água se calhar .. eu acho que era um bocadinho longa de mais. Não era professora? Não eram muitas passagens de água?
Inv	Talvez. Talvez demorassem mais do que na comparação dos comprimentos. Está a falar do 2º problema? Soube que ele foi simplificado?
Beatriz	Eu dei conta de ser alterado, mas não sei bem o quê.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 03/03/06)

Joana	O da massa também foi alterado.
Inv	Foi simplificado.
Inv	O que é que vocês acham de agora pegarmos num daqueles problemas e o utilizarmos na prática?
Beatriz	Eu acho que sim.
Inv	Bem, o problema do comprimento já tinha sido explorado, não exactamente com aquela formulação.
Joana	(não se percebe o que diz, Beatriz volta a consentir) Eles gostaram. Eu acho que os miúdos gostaram muito.
	(há aqui uma parte que o transcrita noutro ficheiro, a propósito da aula do Quarto e Vintena)
Inv	Globalmente, o que é que vocês acharam da exposição?
Joana	Eu acho que correu bem.
Beatriz	Eu acho que correu bem.
Inv	Sentiram-se bem? Sentiram-se recompensadas, apesar do muito trabalho que tiveram?
Joana	Sim.
Beatriz	Bastante (risos)
Inv	Mas não foi recompensa em termos de nota final da disciplina?
Joana	Oh, também (risos de ambas). Não, acho que a exposição foi muito bem, correu muito bem. Acho que sim.
Inv	Correu melhor do que estavam à espera?
Joana	Eu confesso que sim. Surpreendeu-me.
Inv	Porquê, tinha expectativas baixas?
Beatriz	Um bocadinho.
Inv	Devido aos problemas que ocorreram na turma?
Beatriz	Não, não isso passou. Isso foi nesse dia, depois passou.
Inv	Expectativas em relação ao envolvimento dos alunos?
Beatriz	Talvez.
Inv	Ou devido ao facto de os problemas apelarem a antigas unidades?
Joana	Se calhar, também um bocadinho isso. De utilizar antigas unidades e de os miúdos poderem dizer: -ai, antigas unidades. Há sempre aquela noção, são antigas, já passou. Mas foi o contrário, notou-se que gostam de saber .. coisas antigas (risos). Desperta-lhes a atenção. Eu acho que sim. Surpreendeu-me muito. Mesmo até os miúdos do 1º ciclo chegavam ali e resolviam mais rápido ainda do que os outros, porque … O que eu notei foi que … os miúdos do 2º ciclo tinham mais receio em mexer com os materiais e ficavam um pouco mais receosos. Eu dizia-lhes: - vá têm aqui as barrinhas, podem fazer - e depois, aí é que começavam a construir. Enquanto que os miúdos do 1º ciclo chegavam lá começavam a construir e eu tinha de lhes dizer: - mas vocês têm que fazer de acordo com o que aqui está a pedir». Eles próprios chegavam lá e mexiam naquilo tudo.
Inv	Vocês acharam que eles tinham destreza na medição? Que sabiam medir, pesar?
Joana	Eu acho que sim.
Beatriz	Sim.
Inv	No módulo da massa eles não tiveram dificuldade em perceber o que se pretendia? Quando pedia para fazer a relação?
Beatriz	Não. Quando tinham alguma dificuldade eles iam lá colocar .. as massinhas, a onça

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 03/03/06)

	e… Quando eles juntavam … aa.. um arrátel era dois meio-arrátel, um meio-arrátel era duas quartas e quando era para as onças diziam que … como era sempre o dobro, diziam que era oito. Mas mesmo quando foi para somar … quando tinham dúvidas, eles iam logo pesar. Ás vezes até tinham tendência a ir buscar logo (risos) as massinhas. Então eu dizia-lhes: «então pensem lá um bocadinho, não é necessário estar sempre a colocar. Então se 1 arrátel é igual a dois meio-arrátel, quantos arráteis é que são?»
Inv	Então e a Beatriz o que tem a dizer acerca das baixas expectativas que tinha em relação à exposição. Tinham também a ver com facto de estarem envolvidas antigas unidades e problemas antigos?
Beatriz	Hm.
Inv	Não se identificava nem com as unidades, nem com os problemas?
Joana	Eu acho que é isso. (pausa) Eu falo por mim, acho que pessoalmente era isso.
Inv	Era ou é ainda? Ou já tem uma simpatia maior?
Beatriz	(risos)
Joana	Oh, não. Já tenho uma simpatia maior (risos). Até porque já os trabalhei mais do que uma vez (risos). È completamente diferente, já.
Inv	Já acha estas unidades naturais.
Joana	Agora já.
Inv	Resolver problemas com antigas unidades ou com as actuais, não lhe causa perturbação.
Joana	Quem me fala em côvados ou em metros, para mim já é o mesmo (risos).
Inv	E para si, Beatriz?
Joana	É claro.
Beatriz	Hm (risos).
Inv	Ouainda acha estranho propormos problemas com estas antigas unidades?
Beatriz	Não, acho que não. (pausa) Fazer agora uma pausa.
Joana	Fazer com outras unidades, professora. Agora. (risos de Beatriz) Aquele do gato e do rato é com que unidades?
Inv	Esse é com a braça.
Joana	Eles ainda não trabalharam essa.
Inv	Esse a Joana só o proporá se achar que os alunos podem reagir bem, até porque eles não reagiram bem ao primeiro problema.
Beatriz	Por isso é que nós estávamos a duvidar, foi por essa reacção que eles tinham tido na aula.
Inv	Eu observei que alguns desses alunos estavam aqui muito entusiasmados.
Joana	Isso era de estarem noutro ambiente diferente, noutro contexto. Pronto.
Inv	Na sala de aula é que é pior.
Joana	Na sala de aula sentem-se em casa, não há limites.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Joana	Na 5ª feira vou propor o problema do gato e do rato e na 3ª feira vou dar o outro.
Inv	Ah, sim. Então e como é que tenciona explorar o do gato e do rato?
Joana	Utilizando as barrinhas Cuisenaire.
Inv	Falou sobre isso com a professora cooperante?
Joana	Sim. Sim, falei.
Inv	Vai pô-los a trabalhar em grupo ou individualmente?
Joana	Não vão trabalhar individualmente. No máximo dois a dois. Tenho aqui a planificação.
Inv	(A inv lê a planificação de Joana e clarificam alguns aspectos)
Inv	Ontem começou com a divisão?
Joana	Comecei.
Inv	E correu bem?
Joana	Fiz problemas por partilha e por agrupamento.
Inv	Portanto propôs vários problemas para os contextualizar. E eles lembravam-se?
Joana	Sim, sim. Eles disseram: -«isto é tão fácil- (risos). Mas foi só com inteiros.
Inv	Então vamos lá recapitular para ver onde que a Joana quer chegar com esta tarefa.
Joana	Aqui, professora, é eles colocarem o resultado através de .. e isto aqui podem observar logo a partir dos esquemazinhos que eles fizeram e ir fazendo, eles já sabem fazer a multiplicação. E chegam à conclusão que é o mesmo, que vai dar o mesmo valor que aqui, que fizeram nos esquemas[6].
Inv	Vamos por partes, vamos tapar esta parte inferior. Aqui, o que é que espera que eles façam? Aqui, o que é que espera que eles façam?
Joana	Vão construir aqui o esquema das barrinhas e vão dizer que …, quantos dias o rato demora a percorrer uma braça. Uma braça …demora .. um dia e meio que é 1 a dividir por 2/3.
Inv	Imagine que é uma aluna.
Joana	Ai professora (risos). Então eles vão fazer aquele esquemazinho do ..
Inv	A primeira coisa. Eles vão primeiro fazer o esquema ou vão primeiro trabalhar com as barrinhas?
Joana	Vão trabalhar com as barrinhas. Fazer com as barrinhas
Inv	Portanto, os alunos vão utilizar o material cuisenaire para resolver o problema, para encontrar a solução.

[6]Notas de campo: A investigadora e Joana estão a falar de uma ficha construída por Joana intitulada o gato e o rato que contém o enunciado da situação e dois itens: a e b. No final da folha dentro de uma moldura está a seguinte tarefa:

* Observa atentamente o quadro em baixo e completa-o e tenta descobrir uma regra para calcular os quocientes:

1: 2/3	1 x 3/2 =
4:2/3	4 x 3/2=

Conclusão: ____
____

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Joana	E depois na resolução apresentam os dados. Fazem com material Cuisenaire, colocam as barrinhas e comparam. Depois da resolução do problema vão representar aqui o que eles fizeram com as barrinhas cuisenaire[7]. Pronto, vão desenhar aqui as barrinhas. A tal situação. E depois vão ver que é 1 a dividir por 2/3, chegar a essa conclusão. Depois aqui no final.
Inv	Devagar, portanto quer que eles façam um esquema que traduza o trabalho com as barrinhas.
Joana	Sim.
Inv	E a partir daí?
Joana	Daí vamos ver quantos dias é que o rato demorou a percorrer uma braça.
Inv	A resposta é que demorou um dia e meio a percorrer uma braça. Daqui passa para linguagem matemática?
Joana	Sim.
Inv	De que maneira?
Joana	Então vimos que era … demorou um dia e meio para percorrer uma braça. Então uma braça era 1 a dividir pelos 2/3, era o que o rato andava. Vimos que era um dia e meio dias. Eles escrevem isso para linguagem matemática.
Inv	Então basicamente o que lhes vai perguntar depois disto é que ideia matemática ou que conceito está por detrás da resposta dada.
Joana	Sim.
Inv	O seu objectivo é que eles escrevam 1:2/3=3/2?
Joana	Sim.
Inv	E 4:2/3=6. É isso?
Joana	Sim.
Inv	Vai fazer um raciocínio multiplicativo, para tentar que eles escrevam que 4:2/3=4x2/3?
Joana	Estava a pensar não fazer e fazer aqui em baixo para eles chegarem à regra[8]. Ou acha que não, professora?
Inv	Eu só estou a tentar perceber a estrutura da sua ficha e o que planeia fazer.
Joana	Sim. Estava a pensar não fazer ali. Fazíamos aqui em baixo e verificávamos que 1 vezes 3/2 ia dar os 3/2 obtidos com o trabalho com as barrinhas e que é o mesmo que dividir 1 por 2/3.
Inv	Isto não é o que está no manual Mx?
Joana	Sim, sim. Naqueles problemas todos que estão lá.
Inv	Não pretendendo contrariar aquilo que a Joana planeou e planeou certamente com a professora Fernanda, vejamos a última tarefa que propõe: - observa atentamente o quadro em baixo e completa-o e tenta descobrir uma regra para

[7] Refere-se a um espaço em branco deixado após o enunciado do problema e da apresentação de duas sugestões:
* Utiliza o material Cuisenaire para responder ao problema.
* Na resolução do problema representa os dados sob a forma de um esquema.

[8] Notas de Campo,: Curiosamente numa conversa da investigadora com a Professora Cooperante, Fernanda, falou-se da divisão e do interesse da abordagem de ensino poder levar os alunos a compreender a regra da multiplicação pelo inverso do divisor. Fernanda referiu então ser usual orientar as suas estagiárias para a estratégia adoptada num conhecido manual escolar de 6º ano (NC, 5/01/06) e que consiste basicamente no que Joana acabou por inserir na ficha em apreciação (ver nota de rodapé 1).

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

	calcular os quocientes. Eu acrescentava aqui outra coisa, até para potenciar o uso do material. Por exemplo, verifica ou testa se a regra que descobriste …ou verifica a regra que descobriste calculando outros quocientes, por exemplo 5:2/3, mas poderão ser outros quocientes. Deste modo, eles podem facilmente usar o material para comprovar o resultado obtido. Isto é, que o material sirva para comprovar o resultado. Está a perceber o que eu estou a dizer?
Joana	Utilizar outra vez as barrinhas?
Inv	Se eles quiserem. A tarefa que lhes propõe pode ser encarada como uma investigação. Quando lhes diz Observa atentamente o quadro em baixo e completa-o e tenta descobrir uma regra para calcular os quocientes, está a referir-se a estes dois quocientes em particular. O que a Joana pretende que eles concluam aqui é que para calcular o quociente de dois números racionais, multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor .
Joana	Sim, inverso.
Inv	Isto é uma regra induzida a partir de dois casos particulares. O que lhe proponho continua a ser um caso particular, mas é um trabalho que reforça um pouco a regra. Eu poria algo como: verifica se a regra que descobriste é verdadeira para outros quocientes. Por um lado eles aplicam a regra, mas como é que verificam que ela é correcta? Tendo outro processo para comprovar o resultado. Têm assim dois processos para comprovar o resultado. Um deles é através do uso das barras ou então relacionar a multiplicação com a divisão, isto é, verificar que 2/3 vezes 15/2 é igual a 5.
Joana	É aquela história da divisão como operação inversa.
Inv	Fez isto na aula de ontem?
Joana	Fiz, quando trabalhámos a divisão de números inteiros.
Inv	Então das duas uma, ou usam o material para verificar ou a Joana invoca a definição de divisão, isto é, a relação entre a divisão e a multiplicação, para fazer a verificação de que a regra que descobriram está correcta. Embora nós tenhamos a consciência que 3 exemplos não chegam para se poder fazer uma generalização em matemática, estamos no 6º ano a tentar, desta forma, que os alunos aceitem e compreendam a regra. Por isso eu acrescentaria uma última questão.
Joana	Sim, era para mandar escrever … para eles criarem exemplos.
Inv	Mas não tinha aqui.
Joana	Tenho aqui, professora.
Inv	Sim, é outra hipótese. Mas a minha ideia não é só mandar escrever. É mandar escrever e verificar.
Joana	Sim, sim. Eles escreviam, mas depois tinham de explicar se funcionava ou não e porquê. Como é que fizeram e como é que não fizeram.[9]
Inv	Fará como entender. Mas é importante não se cingir aos dois exemplos iniciais. Deve ir buscar outros exemplos e fazer a verificação, que pode ser feita a dois níveis. se quiserem podem fazer com as barrinhas, mas temos de arranjar outra

[9] NC ocorre-me o pensamento de que neste nível de ensino não sendo adequado usar raciocínios dedutivos, o uso excessivo do método indutivo para estabelecer regras (com base em poucos exemplos) dá também uma ideia errada da natureza da matemática. Nesta situação parece-me indispensável estender a definição de divisão ao universo dos racionais e recorrer à definição como forma de comprovação da regra estabelecida.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

	maneira mais matemática de verificar o resultado. Está bem?
Joana	Está bem?
Inv	Mais?
Joana	Depois são outros problemas, professora. Não com as unidades antigas, mas já actuais .. com a divisão de números fraccionários. Mas, esses, não os tenho cá. Deixei-os em casa.
Inv	Então e 3ª feira, na próxima semana?
Joana	Na 3ª feira vou fazer esse do milho, que vai ser para as expressões numéricas. Depois vamos fazer problemas sobre isso. Na 5ª feira vamos fazer … deixe-me ver, professora … acho que é … tenho isso tudo definido .. deixei o papel em casa.
Inv	Vai terminar a divisão até às férias?
Joana	Sim, sim. Em principio a ideia é essa. Depois .. isso .. acho que depois vamos fazer .. eles inventarem problemas. De acordo com expressões numéricas, eles vão inventar. Que vai ser a seguir à aula de dar as expressões numéricas. Depois na aula a seguir, de acordo com uma expressão, eles inventam um problema ou então dou-lhes o contrário, para eles fazerem o contrário. E depois vai ser feito no final, no último dia, um jogo.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Inv	Joana, eu pedi-lhe para cá vir para poderemos conversar um bocadinho sobre as suas aulas. Estão a correr bem?
Joana	Sim, acho que sim. Na 5ª feira a professora deve ter notado que … 5ª feira é o fim do mundo.
Inv	Na 5ª feira a aula correu muito melhor que na outra 5ª feira em que eu estive.
Joana	Oh, muito melhor, muito melhor. Sim.
	(não transcrevi, fala-se da 5ª feira. Há uma parte em que falamos da câmara que avariou e da preocupação de Joana com o seu futuro)
Joana	Professora, viu alguma evolução nas minhas aulas? Foi pior, foi melhor?
Inv	Eu acho que não foi pior. Aliás eu nunca tive expectativas baixas em relação a si, Joana. Desde que no ano passado vi aquelas vídeo gravações das suas aulas, as minhas expectativas nunca foram baixas. Digamos que as duas primeiras aulas, aquelas duas que foram muito barulhentas ..
Joana	Ah, os miúdos andavam muito agitados.
Inv	Nessa aula vim de lá um pouco desanimada, não propriamente consigo, mas com as tarefas propostas. Perguntei-me «será que são as tarefas?»
Joana	Uma coisa que me revolta imenso professora é que nós temos tanto trabalho, temos uma turma que .. aquilo só visto .. a olhos vistos, o que ela é .. e depois temos assim aquela nota. Acho que nos deita mais abaixo. Cada vez que me lembro que entro na aula da Helena .. tudo sossegadinho, ali não se ouvia nada. Professora, como é que é possível uma turma ser assim? E depois nós comentámos «vocês têm uma sorte com a turma», porque elas dizia que dá gosto trabalhar com eles, que eles respondiam a tudo que lhes era perguntado e essas coisas. Dá gosto trabalhar assim, não é? Essas turmas têm tudo para ter um óptimo estágio, para as pessoas andarem a trabalhar com satisfação ..
Inv	Mas repare, pelos vistos elas em termos de nota não ficaram melhor do que vocês.
Joana	Pois, também. Isso é verdade.
Inv	Portanto não há assim uma correlação tão directa como pensa.
Joana	Isso é verdade. Mas, não sei. Uma pessoa fica assim «Meu Deus, os nossos alunos não dão valor a nada»
Inv	O que eu achei curioso é que no início só a Inês e a Mariana é que se queixavam. Elas viveram um período de grande desânimo. Elas chegaram a dizer que estavam sempre ansiosas que a semana chegasse ao fim, porque a turma era absolutamente impossível.
Joana	Mas depois saiu de lá um elemento, não foi?
Inv	Sim e a turma modificou-se radicalmente a partir do 2º período. Quando eu fui assistir à sua primeira aula fiquei surpreendida porque vocês nunca se tinham lamentado do comportamento da turma.
Joana	Oh, professora. No início eles andavam lá... até se agarravam lá dentro da sala e tudo.
Inv	Mas vocês nunca me disseram nada ou seja eu fui apanhada completamente de surpresa. Quando cheguei ali interroguei-me « mas o que é isto?»
Joana	Uma autentica selva, ás vezes (risos).
Inv	Mas até lá tem alunos bem interessantes.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Joana	Sim, sim.
Inv	É pena haver lá outros que estão sempre a distrair dos colegas..
Joana	E há lá uns elementos mal-educados. Por exemplo, o Manuel..
Inv	Aquele que lhe doía muito a barriga? Que saiu perto do final da aula?
Joana	Ah, deve ter sido (não transcrevi, fala-se do aluno)
Inv	Ao pé de mim estava um miúdo muito engraçado, o Filipe.
Joana	É. É muito engraçado.
Inv	A certa altura tocou, ele já tinha acabado de resolver o problema do trigo e virou-se para a Beatriz e diz «Ah, já tocou? O tempo passou tão depressa. Ai, eu quando gosto do que estou a fazer nem noto o tempo passar.» (risos)
Joana	(risos) Ele é muito engraçado.
Inv	É, é muito queridinho.
Joana	Para mim é dos miúdos mais queridos e foi ele .. quando foi da outra vez nas aulas de ciências veio lá falar connosco «Ah, storas, vocês trazem coisas tão giras. Eu nunca tinha visto uns pulmões.» (risos) É do tipo de alunos que dá valor ao que é feito dentro da aula e com quem dá gosto trabalhar.
Inv	Eu achei curioso quando a Joana lhe pediu para ir ao quadro resolver o problema houve logo comentários de alguns colegas.
Joana	Isso é logo. É logo. Ai, meu Deus. Aquilo é um castigo. Já ontem fomos encontrar uma miúda a chorar na casa de banho, porque ela ontem levou o cabelo esticado. Mas coitadinha, o cabelo dela é tão encaracolado, tão encaracolado que estica mas depois fica muito volumoso. E depois os miúdos todos «Ai, ela tem uma peruca. Ela tem uma peruca. Coitadinha, fomos encontrá-la dentro da casa de banho a chorar. Depois atou logo o cabelo em cima e em baixo.
	Não transcrevi.
Inv	Portanto, respondendo à sua questão sobre se houve evolução.
Joana	Sim.
Inv	Relativamente ás duas aulas que observei em Janeiro, houve muita evolução. Esteve melhor, o quadro esteve melhor organizado, embora houvesse muita informação para registar no quadro e portanto houve ali dificuldade em gerir o espaço do quadro. Penso que já uma vez lhe tinha dito que se calhar é melhor antes de eles começarem a resolver ..
Joana	Dividir o quadro.
Inv	Sim, dividir o quadro.
Joana	Nunca me lembro de dividir o quadro.
Inv	Comece por planear em quantas partes e como é que o quer dividir e fazer logo isso de modo a que os alunos não estendam a resolução a todo o comprimento do quadro. Relativamente á aula anterior não ouvi a gravação, nem vi a filmagem, portanto não lhe posso dizer nada.
Joana	Eu pedi para fazer cópia para si. Saiu alguma coisa? Lá está. A câmara aí já não devia estar a funcionar muito bem. A Beatriz de vez em quanto foi lá fazer uns “zooms” e estava tudo certo … e quando já foi no final … acho que ..
Inv	Há uma parte da fita que não foi gravada, Joana.
Joana	Porque a máquina tinha parado.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Inv	Deve ter sido o interruptor que deixou de fazer contacto.
Joana	Aí, de certeza que já não estava boa. Tenho sempre cada arrelia! E depois isso já perturba uma pessoa, porque já ficamos assim: ai, meu Deus. Agora avariou a câmara, como é que vai ser?
Inv	Mas sentiu-se perturbada?
Joana	Claro, professora. Senti-me tão mal. Eu não acredito, agora com a câmara avariada.
Inv	Eu tenho um azar consigo e com a câmara (risos).
Joana	E eu com a câmara (risos).
Inv	Que azar! Mas não tenha problemas com isso. Como tem que transcrever uma aula para a professora supervisora pode fazê-lo relativamente á aula anterior que também filmou.
Joana	Mas mesmo assim, aquela é de 5ª feira. Os miúdos estão mais agitados. Não houve tanto trabalho.
Inv	Não, é a de 3ª feira que nós vamos transcrever. Da aula em que eu não estive.
Joana	A professora esteve numa 3ª feira.
Inv	im, claro. E na 5ª feira eles estão muito mais agitados?
Joana	Sim, muito mais, tanto que na aula de 5ª feira só resolvemos um problema.
Inv	Também o problema era …
Joana	Muito extenso e depois tinha para se fazer a conclusão de …não é? Estava ali a multiplicação toda.
Inv	Acha que resultou bem?
Joana	Eu acho que sim.
Inv	Conseguiu chegar ao que pretendia?
Joana	Acho que sim, se bem que os miúdos andam muito baralhados. Já fazem … na multiplicação acham o mesmo denominador e depois na soma … esquecem-se e somam os denominadores…
Inv	E porque é que acha que isso acontece?
Joana	Eu acho .. por um lado, não sei. Porque houve ali interrupção com os triângulos e com os quadriláteros. Se calhar também … é sinal de algum esquecimento por parte deles. Isso não sei.
Inv	As suas colegas da EB AP queixaram-se que já estavam fartas de fracções, porque deram tudo de seguida e que os miúdos já estavam cansados.
Joana	Também há essa situação. Não sei. Se calhar é bom continuar logo, mas por outro lado por ser muito extenso, não sei. Começaram a baralhar as operações, mas não tem razão para isso.
Inv	Mas se eles reduzirem na multiplicação as fracções a fracções com o mesmo denominador, isso não tem qualquer problema. Digamos é que vão obter fracções com termos muito superiores aquilo que obteriam da outra forma.
Joana	Sim, sim.
Inv	E na divisão se o fizerem, também não vem nenhum mal ao mundo.
Joana	Claro, mas … é diferente. Eles depois na soma somam os dois …
Inv	Depois na soma esquecem-se daquilo que é importante.
Joana	É. Quando têm os mesmos denominadores, denominadores iguais, somam os denominadores.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

Inv	Então e na 5ª feira, vocês concluíram a escrita da expressão numérica do problema dos boiões de doce?
Joana	Acho que a professora fez no estudo acompanhado.
Inv	Ah, foi a PC que concluiu? A Joana, na aula seguinte, propôs outros problemas e o cálculo de expressões numéricas?
Joana	Foi, foi.
Inv	E foi aí que detectou as dificuldades no cálculo da soma, do produto …?
Joana	Sim, porque depois tínhamos as expressões numéricas e então …tinham que as resolver e … essas coisas … Mas acho que … eles recordaram.
Inv	E falou com a PC relativamente àquela expressão numérica que ficou registada no quadro e que não foi sugerida por si, mas sim por um aluno .. a expressão do problema do trigo. Não tenho aqui as minhas anotações ..
Joana	Do trigo?
Inv	Sim. Na aula que eu observei, no problema da venda do trigo ..
Joana	Ah, sim, sim. Falámos, professora. Falámos, porque o Joel tinha feito …
Inv	Mas pegou nisso na aula de 5ª feira?
Joana	Não.
Inv	Não? [10]
Joana	Não, até porque depois eles não levantaram dúvidas. Eu expliquei-lhes …
Inv	Mas a Joana não se deu conta disso na aula, pois não?
Joana	Ham .. porque eu tinha colocado .. depois coloquei .. em cima .. naquela parte do .. 100 mais … sabe porquê, professora? Porque a miúda que foi ao quadro tinha feito como o Luís tinha dito, está a perceber? A expressão estava correcta e, então, nem me apercebi que havia ali …
Inv	E que expressão é que a Joana tinha planeado em casa?
Joana	Ah, era segundo … seguida pela do João. Que eu calculei que eles fossem fazer separados. (pausa) Tinha as duas, professora. Tinha aquela que foi feita e tinha a outra. Tinha as duas (risos).
Inv	Certo. Deve sempre prever que expressões numéricas podem ser escritas pelos alunos e tentar relacioná-las, porque ... até foi curioso quando um dos alunos que esteve no quadro, creio que foi o Filipe. Ele fez qualquer coisa assim: 10 x 15 : ¾ e houve um aluno que do lugar lhe disse o seguinte: «oh, stora eu não fiz assim». Deu a entender que não fez desta maneira, lembra-se deste comentário? Isto foi antes da expressão numérica, estava-se a resolver o problema.
Joana	Não foi na expressão numérica, professora? Quando disse: «eu não fiz assim, professora. Eu fiz… » que era a tal situação do Luís. Não foi aí. Quando estava no 10 x 20 … o que estava no lugar fez isto e a expressão que estava no quadro era seguida por isto.
Inv	Não, a que estava no quadro era esta.
Joana	A expressão numérica, professora.
Inv	Mas eu ainda não estou a falar do momento em que pede aos alunos que

[10] NC: esta questão deveria ter sido retomada na aula seguinte dada a discrepância entre a expressão regista no quadro e o processo de resolução feito no quadro para toda a turma. Aliás tudo o que se disse e fez na aula e no quadro deveria traduzir efectivamente o processo seguido. Mas como houve mais do que um processo de cálculo da solução, Joana deveria ter explorado esse facto e aproveitar para estabelecer ligações com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

	escrevam a expressão numérica. Estou no período anterior.
Joana	E o que foi feito no quadro foi isto. Ele até fez isto 10 x 20 é igual a 200 depois fez 10 vezes 12 igual a 120. E depois houve um miúdo que disse «eu não fiz assim, fiz assim» e eu disse «Ah, muito bem». Depois eu disse «também podia ser como o Luís disse» e disse que também podia ter sido assim. E depois a expressão numérica que foi escrita …
Inv	Corresponde a isto.
Joana	Era isso que eu estava a dizer, que a expressão numérica correspondia aquela ali.
Inv	Por isso é que eu lhe quero dizer que devia ter aproveitado e registado. Era um bom momento para recordar a propriedade distributiva e, por outro lado, preparava o terreno para a expressão numérica que acabou por surgir. Que não estava associada ao processo de cálculo seguido no quadro. A única questão relativa à expressão numérica escrita no quadro, não é a falta de correcção dela. O que acontece é que ela não corresponde ao processo de resolução do problema, aos vários passos que foram seguidos e registados no quadro.
Joana	Sim, sim. Tanto que eu depois expliquei donde é que vinha … quando foi escrita a expressão numérica. Depois eu disse «então isto aqui corresponde a quê?» e eles chegaram lá.
Inv	Relativamente á exploração do problema tenho um pequeno comentário a fazer. Ele foi bem explorado enquanto aplicação da divisão de números racionais, mas não o foi do ponto de vista do contexto do problema. Por exemplo, o facto de coexistirem unidades como o mesmo nome e com diferentes tamanhos e os problemas que isso causava.
Joana	Pois foi.
Inv	Digamos que é uma outra componente do problema.
Joana	Como era uma unidade antiga, não era? Dizer que antigamente acontecia isso em mercados diferentes.
Inv	Era até levá-los a concluir, quando eles interpretam o problema o facto de ser referido o alqueire pequeno e o alqueire grande devia estar sempre presente. Bem essa terminologia foi sempre usada, mas faltou fazer o aproveitamento do problema, situá-lo no seu contexto. Além disso quando chegam à solução é preciso analisar o que se fez.
Joana	Sim.
Inv	Outra coisa que a Joana não fez e podia ter feito tem a ver com o sentido de número. Antes de eles iniciarem o cálculo propriamente dito, ter procurado ver como é que eles encaram a divisão de números racionais. Dividir os 30 alqueires por um número menor do que a unidade, vai dar um número maior ou mais pequeno de alqueires.
Joana	Ah, sim.
Inv	E aqui dividir por um número maior do que a unidade, o que é que vai acontecer.
Joana	Agora que a professora falou nisso, nós vamos fazer um jogo na 5ª feira. É o último dia de aulas e, então, vamos fazer um jogo .. e é precisamente isso. Vai ganhar o jogador que chegar ao final com menor número e isso vai envolver a divisão e …vão ter de lançar o dado e vão ter 3 alternativas. Lança o dado 3

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

	vezes e depois escolhe o número que eles querem. E lá está, quando é na divisão eles têm de ver que escolhendo um número maior do que a unidade, dá-lhe … está a perceber?
Inv	Estou, mas isso também depende do dividendo.
Joana	Sim, sim.
Inv	Eu estava a olhar para si e a pensar, depende do que for o dividendo.
Joana	Sim, sim.
Inv	É importante que eles desenvolvam o sentido do número, que tenham uma noção da ordem de grandeza do resultado de uma dada operação. Creio que os alunos reagiram bem ao problema, bem melhor do que no primeiro problema proposto que envolvia o côvado e as suas partes. Nessas duas primeiras aulas que observei eu fiquei muito desanimada porque senti que eles não tiveram qualquer afinidade com o problema. Alguns até diziam «Ai que maçada isto», «nunca mais saímos dos côvados» ou «nunca mais vamos fazer matemática».
Joana	A professora ficou logo atrás do X (risos). Ele já estava «Eu já não posso ouvir a palavra côvado» (risos).
Inv	Quando vou às vossas aulas, vou também sentir como é que eles reagem ..
Joana	Porque se calhar, quando foi na altura, nós falámos isso, não foi? Que a informação se calhar tinha sido um bocadinho extensa, não foi?
Inv	Foi, foi isso. Parece-me que eles agora já encararam o problema com naturalidade, como outro qualquer ...
Joana	Mas eu achei .. Oh, professora, surpreenderam-me pela parte negativa, os miúdos. Quando eu lhe dei o problema, ninguém me dizia que o problema tinha sido feito na exposição.
Inv	Foi aquela aluna dos cabelos compridos que se recordou, não foi? Estava encostada à parede.
Joana	Sim, lá à frente.
Inv	Não é essa aluna que é um bocadinho indisciplinada?
Joana	Ah, não. Não foi essa, professora. Ou foi?
Inv	Eu tive a sensação que foi ela.
Joana	Foi ela foi. Foi ela, eu pensava que tinha sido a Carolina, mas não. Não, foi ela. Foi ela foi. Até eu fiquei assim .. eu nem acredito, ninguém me diz que o problema vem da exposição. Mas depois o Filipe disse logo, não foi?
Inv	Foi, ele depois também confirmou. Mas eu fiquei surpreendida. Ela foi a única a dar-se conta. Eles, seguramente, já nem se lembravam da solução.
Joana	Não, não. Uns diziam que era … dava 700 (risos). Na gravação deve-se ouvir.
Inv	Depende, se a Joana estiver junto deles ouve-se, caso contrário o micro não capta o som. A Joana agora vai passar para ciências e começa a Beatriz. Eu já combinei com a Beatriz encontrar-nos na 2ª feira [não transcrevi uma parte porque falamos da organização da PP e da sequência provável de conteúdos. Contudo, Joana desconhece a sequência]
Joana	Os miúdos diziam-me «ele ganha. Ele ganha» e eu perguntava-lhes:

Anexo 18
Transcrição de sessões de trabalho com a futura professora Joana
(ST, 24/03/06)

	- como é que sabes?, -então porque os alqueires são mais pequenos, vendia mais» -então, mas eu quero ver. Vamos lá confirmar. Será que ele ganha ou não?
Inv	A Joana reconhece algum interesse a estes problemas? Ou está a propô-los só por …
Joana	Ah, não. eu acho que não, acho que é bom.
Inv	Põe-os no mesmo patamar dos restantes problemas que propõe ou num patamar diferente?
Joana	Não, não. Eu acho que estão. Se bem que … estes problemas contêm mais informação do que os outros, na minha opinião. Porque tem aquela informação das medidas antigas e .. essas coisas … E, por exemplo, quando foi para introduzir a divisão, acho que era muito rico.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 19/01/06)

Inv	Leu a transcrição que fiz da sua aula, Inês?
Inês	Ai, professora. Não gostei nada.
Inv	Porquê?
Inês	Aquilo é tão estranho. Porque eu nunca tinha lido.
Inv	E ouviu ao mesmo tempo?
Inês	Não. Comecei a ouvir, mas aquilo ouve-se muito mal. Ou é do computador, porque eu comecei a ouvir no computador, porque eu comecei a ouvir no computador. Não ouvi lá em casa.
	(não transcrevi uma pequena parte)
Inv	E relativamente à sua aula?
Inês	(risos) Não sei o que quer que lhe diga.
Inv	Gostou da aula, não gostou? Sentiu-se bem …
Inês	Gostei. Foi diferente. Gostei. Senti-me bem.
Inv	Acha que os alunos se sentiram bem?
Inês	Isso já é muito relativo (risos). Dentro do possível, eu acho que sim.
Inv	Nenhum voltou a falar naqueles problemas.
Inês	Não. Connosco não.
Inv	E o PC disse alguma coisa?
Inês	Não.
Inv	Vocês não costumam reflectir a aula?
Inês	Estivemos hoje a falar dos reais (não transcrevi, questão de formação de plural). Mas nós antes da aula já tínhamos estado a comentar os problemas. Ele já tinha estado a falar do alqueire e dessas coisas todas. O professor diz que correu bem.
Inv	E a Inês, o que é que tem a acrescentar? Pensou sobre a aula?
Inês	Pensei. Acho que eles fizeram um bocado de barulho relativamente a 3ª feira. Estavam mais calmos e às oito e meia, costumam ser mais calminhos. … também foi daquela agitação do computador e de se andarem a levantar … E …correu bem … quer dizer, acho que no terceiro problema eles já estavam a ficar assim com o nariz um bocado torcido. Quer dizer já eram 3 coisas com aquelas unidades estranhas .. e .. Mas, pronto, acho que eles gostaram e gostaram de ver as imagens e de relacionar com a História.
Inv	Acha que eles acharam as unidades estranhas?
Inês	Acharam. Fizeram-lhes muita confusão. Principalmente o primeiro, o dos quintais. Ai agora tenho que reduzir e quanto é que isto dá e não sei quê e não sei que mais … A preocupação deles era reduzir os 64 quintais a quilogramas. A primeira preocupação deles foi essa, não foi … usarem os 64. Não, foi logo reduzir. Como eles não sabem trabalhar em quintais e tinham a relação de 1 para .. não sei quê.. era logo o que queriam fazer. Mas pronto. Acho que sim.
Inv	Há uma parte da transcrição que não percebi bem e em que coloquei alguns pontos de interrogação. A Inês está a referir-se ao problema dos reais e eu não percebo bem o que a Inês diz. Será que diz que as unidades são estranhas?
Inês	Não. disse que eram diferentes. Isso lembro-me de dizer. Não eram as que eles estavam habituados a usar. Agora estranhas não me lembro de dizer.
Inv	E nos alqueires ainda acha que eles sentiram que eram estranhas.
Inês	Não, nos alqueires nem tanto. Mas também já tinham feito o outro, portanto não tinham a preocupação de estar a reduzir. Foi mais … só no primeiro é que tiveram

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 19/01/06)

	essa preocupação. Depois nos outros .. quer dizer, se no primeiro usámos, agora também podemos usar.
Inv	Há um aluno que quando a Inês pergunta «então o que é que estivemos a trabalhar», responde «estivemos a aprender os quintais».
Inês	(Risos) foi no fim.
Inv	Ele parece nem se ter dado conta que estava a trabalhar com fracções.
Inês	Não, não. ele não disse aprendemos os quintais, ele disse aprendemos uma nova unidade.
Mariana	Os quintais.
Inês	Foi assim que ele disse: -aprendemos uma nova unidade. Os quintais.
Inv	Ele diz isso: - aprendemos uma nova unidade?
Inês	Eu acho que sim, eu lembro-me de estar a falar e ele disse uma nova medida ou uma nova unidade.
Mariana	Medida não, mas unidade sim.
Inês	Eu lembro-me um deles dizer. Não sei se ficou gravado.
Inv	Gostaria agora de fazer alguns comentários sobre a sua aula.
Inês	Eh, professora, escreveu tanto [refere-se às notas de campo]
Inv	Globalmente acho que a aula correu bem e teve ritmo. Os alunos de um modo geral estiveram envolvidos, embora com uma certa tendência para a conversa. Houve no entanto alguns alunos que não tiveram qualquer participação na aula. A Mariana, por exemplo, disse várias vezes a um aluno que passasse para o caderno o que estava a ser feito no quadro e ele nunca o fez.
Inês	Quem?
Mariana	O Raul.
Inês	(risos) Nem queira saber o que aconteceu na 3ª feira com eles [Inês relata o que aconteceu num aula em que estiveram presentes as restantes colegas de estágio. Uma delas ter-se-á sentado ao lado desse aluno e ao sugerir-lhe que trabalhasse, originou um conflito com o aluno]
Inv	Era a sua aula, Mariana?
Mariana	Era.
Inv	Então esse incidente perturbou-lhe a aula.
Mariana	A mim? (a interrogação de Mariana revela uma profunda surpresa)
Inês	(risos) Criámos um sistema imunitário.
Inv	Na primeira tarefa (quarto e vintena) quando a aluna a escreveu os dados, devia ter salientado que havia ali uma parte dos dados que era imposto para o Rei, porque depois teve que chamar várias vezes a atenção para isso. Outro aspecto é o seguinte, para ambas, quando um aluno vai ao quadro, vocês devem ter a preocupação de gerir a vossa atenção entre o que está no quadro e os alunos que estão no lugar. Por vezes, esquecem-se do que está no quadro. Tenho aqui a anotação de que um aluno lhe perguntou se o quintal tinha símbolo.
Inês	(risos) Se era um Q de quá, quá.
Inv	É uma óptima oportunidade para salientar que o símbolo sintetiza uma ideia. É uma oportunidade óptima para dizer nós hoje temos um símbolo, vejam o que o símbolo
Inês	Facilita.
Inv	Exactamente, o que o símbolo facilita e o que está por detrás dele.
Inês	Ele disse: - Oh, professora, quintais põe-se um q de quá- quá grande ou

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 19/01/06)

	pequenino? - (risos) eu: - não, quintal não tem símbolo-, ele respondeu: - está bem.
Inv	Tarefa 2, a dos pobres.
Inês	Eh, essa foi uma complicação. Eles não conseguiram perceber que era dividir os 60 000 reais pelos 6. Eles dividiram, porque nós tínhamos feito um .. como no outro antes se .. tirava ¼ e depois daquele que sobrava tirava-se a vintena. Eles pensavam que era assim, tirava-se 1/3 .. então o último não levava quase nada.
Inv	Mas teve alunos a resolver assim?
Inês	Dois, pelo menos. Que eu visse. Não sei se mais algum resolveu assim. Que eu visse, dois. Mas depois era a tal coisa. Faziam um , faziam dois .. depois começavam a achar que aquilo era muito pouco dinheiro. Pronto, voltavam, apagavam. Depois já não saíam dali. Achavam que não era assim, mas também não sabiam como fazer e diziam: -isto não está correcto.
Inv	Isso significa que eles não interpretaram correctamente o enunciado.
Inês	Não perceberam que era os 60 000 a dividir. Um terço para um, um quarto para outro. E nós tínhamos feito outro, na 3ª feira, desse género também. O do carro.
Mariana	Sim. O do carro, pois.
Inv	Era um carro. Sabia-se o valor do carro e depois pagava-se ¼ e depois queria saber-se quanto é que se pagava de mensalidade. Eles tinham que tirar e depois dividir por 12. Fizeram dois problemas desse género, pronto quando foram fazer esse, fizeram igual.
Inv	Mas também reparou que na tarefa 1 havia alunos que queriam calcular ¼ de 64 e 1/20 de 64.
Inês	Sim.
Inv	Quando a Inês faz a extensão do problema ao pagamento em simultâneo, devia-lhes ter pedido que registassem o novo enunciado. Sabe, depois em casa quando o aluno vai ver o que fez na aula, já não se lembra do que fez. Isso acontece a todos nós. Repare que o aluno ficou com o registo de duas resoluções, seguidas uma à outra sem uma nova questão intercalar entre elas. Outra coisa. O aluno que esteve no quadro, ao resolver o 2º problema, escreveu 60 000 x 1/3, 60 000 x ¼, … e a minha questão é se não deveria ser 1/3 x 60 000. Leia lá as duas expressões.
Inês	1/3 de 60 000 e 60 000 de 1/3. Pois, mas é a propriedade comutativa. .. Para eles é igual e mesmo eles a resolverem e a Mariana já viu, por exemplo .. começam .. uma coisa sei lá .. compro um quilo e meio de qualquer coisa a um euro e cinquenta, mais dois quilos a 3 euros e depois trocam. Fazem de uma maneira, depois na fracção a seguir fazem de outra e a seguir fazem outra. Nós chamamos-lhes a atenção .. o professor chama-lhes a atenção e eles a seguir tornam a fazer exactamente igual.
Mariana	Pois, a correspondência não joga.
Inv	Então aqui devíamos também ter chamado a atenção.
Inês	Pois.
Inv	Porque depois vocês vão ter problemas quando lhes pedirem que façam a leitura de uma expressão matemática ou quando lhes pedirem que traduzam uma expressão para linguagem matemática.
Mariana	Mas eles fazer a leitura, fazem-na.
Inês	Eles fazem-na, mas lê 1/3 de 60 000.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 19/01/06)

Inv	Só que é desejável que a leitura corresponda à expressão matemática e vice-versa, embora em termos algorítmicos dê exactamente a mesma coisa. Anotei também que a solução já não foi explorada. Nem a solução, nem os dados iniciais. Devia tê-lo feito, Tinha resolvido esse problema de que me falou. Devia ter perguntado algo como: - que parte do dinheiro vos parece que vai receber o pobre mais pobre ou aquele que é mais pobre.
Inês	Não sabiam.
Inv	Sabiam e sabe porquê? Podiam não saber todos, mas já no problema anterior houve alunos que disseram «quem me dera ser o rei»
Inês	Ser o rei.
Inv	Foi ou não foi?
Mariana	Foi sim senhora.,
Inv	Eles aqui conseguiam.
Inês	Mas só disseram no fim, depois do problema resolvido.
Mariana	Mas não sei se foi por causa desse aspecto da resolução, «quem me dera ser o rei». Então se eles lá chegavam e o rei tirava dinheiro, eu gostava de ser assim. Foi essa a justificação que eles deram.
Inv	Foi pena não ter feito isso, pois ajudaria compreender o problema. Note que os pobres não foram tratados por igual. Perguntar que parte do dinheiro ganhou o mais pobre, conduz-nos à comparação de fracções como mesmo numerador. A tarefa 3 foi resolvida no final da aula, mas mesmo assim eles empenharam-se e alguns resolveram-na muito rapidamente.
Inês	Era fácil.
Inv	Mas a resolução seguida teve uma falha para a qual talvez eu não a tenha alertado para essa possibilidade. Nós queríamos que eles resolvessem aquele problema com um problema de multiplicação ou de divisão?
Inês	De multiplicação.
Inv	E como é que foi resolvido?
Inês	Eles resolveram de divisão. Era mais fácil.
Inv	Exactamente. Está correcto. Ele resolveram assim e está correcto e nunca devemos deixar de ter em conta as resoluções seguidas pelos alunos.
Inês	Claro, estava certo.
Inv	Agora podemos e devemos é explorar outras estratégias de resolução, reorientando o raciocínio deles.
Inês	Pois, mas eu já não tinha tempo.
Inv	Pois eu sei que tinha pouco tempo, porque o resolveu já perto do final da aula. Mas note que lhes devíamos ter colocado a questão «qual é a fracção que representa a maquia do lagareiro?».
Inês	Pois, mas nem me passou pela cabeça e depois como já foi no final.
Inv	Isso mostra que temos de estar atentos a tudo o que passa na aula. E durante a planificação prever o que pode ser dito ou feito pelos alunos, não é?
Inês	Não sei.
Mariana	Às vezes não dá.
Inês	Às vezes, ainda é pior.
Inv	Não é importante prever …?
Inês	É, porque depois orientamo-nos muito naquilo que temos planeado.
Inv	Não, desde que saiba muito bem onde quer chegar.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 19/01/06)

Inês	Hum …sabemos bem onde queremos chegar, mas acabamos por seguir sempre o plano
Inv	Quando o aluno resolve 22 a dividir por 11 essa resolução era aproveitada, mas logo naquela altura a Inês podia recolocar a questão.
Inês	Pois, mas nem me ocorreu. Sou sincera, nem me ocorreu.
Mariana	A experiência é pouquíssima.
Inv	Acabou por se o PC a colocar essa questão.
Inês	Claro.
Inv	Mas é por isso que nós reflectimos sobre as aulas. Para nos ajudar a não esquecer certos pormenores.
Mariana	Sim, sim.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 16/02/06)

22m24s	Inv	Então e a Inês já tem tudo planeado.
	Inês	Hi, professora. Não tem nada para mim?
	Inv	Tenho.
	Inês	È que o Professor (PC) disse-me, .. ela (refere-se a Mariana) vai fazer o jogo amanhã, e disse para fazer uma ficha de trabalho. Mas aquilo é uma seca, coitados dos miúdos só fazerem uma ficha de trabalho, não tem piada nenhuma. Diga lá professora.
	Inv	Nem calcula o que eu tenho aqui para si. É um dos problemas da exposição.
	Inês Mariana	(em coro) Hii…
	Inês	Já parecemos nós. Hii …(risos)
	Mariana	A do dinheiro? Ah, não. é aquele que tu não percebeste.
	Inês	Mostre lá professora.
	Inv	Então é mesmo o ideal para a Inês.
	Inês	Então se não percebi.
	Mariana	É o da Ana.
	Inês	É o da Ana?
	Inv	É.
	Inês	Hi, eu não percebi nada disto.
	Mariana	Eu explico-te.
	Inv	Então, explique lá Mariana. Porque a Mariana esteve lá na banca.
	Inês	Deixa-me ler primeiro.
	Inv	Então a Inês não percebeu esse problema?
	Inês	Oh, professora tenho de ler isto com muita atenção. Sabe que eu não li com muita atenção, por isso também não …
	Mariana	É normal. Eu também só o li como deve ser quando …
	Inês	A Mariana esteve lá, mas eu nunca lá estive. Estive só na capacidade e na massa.
	Inv	Mas eu explico-lhe o que as suas colegas planearam e o que eu tenho aí. Está bem?
24m30s	Inês	Está.
	Inv	Este problema envolve 30 alqueires e foi proposto na exposição depois de os meninos terem encontrado a relação entre o alqueire e a quarta. Cada alqueire é igual a 4 quartas. As vossas colegas idealizaram um tabuleiro rectangular divido em 120 quadriculas com um prego cada e em que cada quadricula representa uma quarta. Passemos então ao problema. O problema traduz uma situação real que aconteceu até há bem pouco tempo. Eu já vos contei que há uns tempos estive na biblioteca à procura de uns livros e que a bibliotecária falou-me da desigualdade dos alqueires de azeite existente aqui na região, nos tempos da sua juventude.
	Inês	Era diferente.
	Inv	As unidades que eram usadas na medição eram diferentes. O problema que está aí retrata essa situação. Então diz o seguinte: «um homem

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 16/02/06)

		comprou 30 alqueires de trigo para vender e gastou 300 réis. Então o que é que ele fez? Foi vender este trigo em dois mercados. Vamos supor que foi vender a Alcains e ao Retaxo. Acontece que num dos mercados o alqueire era mais pequeno do que o dele e no outro era
	Inês	Maior. Sim.
	Inv	Então no mercado de Alcains, por exemplo, o alqueire era ..
	Inês	¾ do dele.
	Inv	Ou seja era mais pequeno, vamos-lhe chamar o alqueire pequeno. No outro era ..
	Inês	5/4. Era maior.
	Inv	Era maior. Chamamos-lhe o alqueire ..
	Inês	Grande.
	Inv	Agora a questão é a seguinte: ele em Alcains vendeu segundo os alqueires da feira.
	Inês	Claro.
	Inv	E vendeu cada alqueire ..
	Inês	a 10.
	Inv	A 10. E no outro ..
	Inês	Também a 10.
	Inv	Provavelmente o preço não variava. A questão do problema é se o mercador ganhou ou perdeu dinheiro. Na exposição era exactamente essa a questão que era posta aos alunos. A Inês se propuser o problema na aula poderá desdobrar a questão em três, mais orientadoras do trabalho dos alunos. A primeira questão pode ser «com os 15 alqueires de trigo que levou para o primeiro mercado, quantos alqueires pequenos conseguiu fazer o mercador?»
	Mariana	Divide os 15 ..
	Inv	Por?
	Inês	Por ¾.
	Inv	Exacto. Ou seja, isto é uma situação de divisão. O que pretendemos saber é quantos ¾ cabem em
	Mariana	Em 15 alqueires.
	Inês	Hum, hum.
	Inv	Foi o que as vossas colegas simularam com os elásticos. Não foi?
	Inês Mariana	Foi.
	Inv	Os meninos punham o elástico a envolver 3 pregos, o que fazia uma quarta. A seguir punham outro elástico.
	Inês	Isso eu percebi, essa parte.
	Inv	Então eles aqui fizeram 20 alqueires.
	Inês	Sim.
	Inv	Segunda questão.
	Inês	No segundo mercado quantos alqueires grandes vendeu? (pausa) É a mesma coisa, só que agora é 5/4.
	Inv	Vai fazer, salvo erro …
	Inês	12.
	Inv	Última questão.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 16/02/06)

	Inês	O mercador ganhou ou perdeu dinheiro?
	Inv	Temos que ir ver. Se ele aqui ..
	Inês	Então aí fez 20 vezes 10, 200
	Mariana	E no outro 120.
	Inv	Ganhou 20 réis.
	Inês	Sim.
	Mariana	Já percebeste?
	Inês	Já.
	Inv	É relativamente simples.
	Inês	Já. Mas eu sinceramente da maneira como .. não sei. Como foi exposto eu não percebi.
	Inv	Com os vossos alunos, nesta altura, é possível resolver o problema com papel e lápis.
	Inês	É.
	Inv	Ou seja, dar outro sentido a uma actividade que fizeram na exposição. Eles provavelmente até se lembram da solução.
	Inês	Sim, podem lembrar-se da solução da última, mas não sabem das outras.
	Inv	Agora, será que eles associam esta situação a uma situação de divisão? (a partir daqui a inv discute com Inês e Mariana as sugestões de exploração didáctica da tarefa, só vou transcrever alguns aspectos)
29M10S	Inv	É muito importante que eles percebam que as unidades eram diferentes. Num lado ele vai usar o alqueire pequeno, para vender, e no outro o alqueire grande.
	Mariana	Exacto.
	Inv	Isto é como encher sacos de trigo. Alguns levam mais do que outros.
	Inv	Também é bom ver se eles se lembram como é que o resolveram aqui. Porque se eles se conseguirem lembrar que foram ver quantos grupos conseguiam formar isso facilita-lhes o trabalho. Porque no fundo trata-se de uma divisão “por medida” que corresponde a saber quantos grupos se podem formar de uma dada quantidade.
	Inv	Na primeira questão até pode começar por questioná-los sobre se eles acham que ele conseguiu fazer mais ou menos de 15 alqueires.
30m53s	Inês	Pois, os ¾.
	Inv	Então e porque é que conseguiu fazer mais de 15 alqueires? Ah, porque a medida é mais pequena.
	Inês	Sim, sim.
		(não transcrevi)
	Inv	Este é o problema que tenho para si, mas nunca para 3ª feira.
	Inês	Ai, não?
	Inv	Porquê? Não tem nada planeado.
	Inês	Tenho, uma ficha de trabalho. Mas não me estava a apetecer muito dar só a ficha.
Aos 36min		Volta a falar-se do problema
36m41s		Eu amanhã mostro ao professor, porque eu hoje estive a mostrar uns

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 16/02/06)

		exercícios ao professor e ele disse »Sim podes fazer. Até é muita coisa. Até dá quase para a semana toda». Uma ficha para eles .. dá 3ª, dá 6ª e ainda sobra.
	Inv	Não me agrada nada que vocês organizem uma aula em torno de uma ficha.
	Inês	Pois, mas é assim, eu podia situações só .. isoladas. Por exemplo, cortarem e colarem no caderno. Mas é a tal coisa, perdem imenso tempo também a colar. E porque um não tem cola e o outro não sei quê .. Acaba por render menos do que darmos a ficha. Depois o livro deles também não ajuda muito.
	Inv	Porquê, o livro não tem problemas interessantes?
	Inês	Não, não tem nada de especial, o livro. É da .. por acaso não é nada de especial.
		Combinámos encontrar-nos na 2ª feira antes das 16 h (essa reunião não foi gravada)

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	Vamos começar por conversar um pouco sobre a exposição. Vocês prepararam o módulo da capacidade
Mariana+ Inês	Sim.
Inv	Mas estiveram noutros módulos.
Mariana+ Inês	Sim.
Inv	Estiveram no volume.
Mariana+ Inês	Sim e na massa e no comprimento.
Mariana	Creio que a única banca onde não entrou ninguém foi o dinheiro.
Mariana	Mas foi mesmo de propósito.
Inv	Foi?
Inês	Foi.
Inv	Então porquê?
Inês	Ninguém era capaz de perceber.
Mariana	Elas eram as únicas que compreendiam aquilo
Inês	e sabiam bem, de trás para a frente. Sim, mas elas sabiam, por exemplo, nós íamos para a massa, ou para o comprimento .. O do volume também era muito fácil, mas por exemplo o da massa e do comprimento ou mesmo o nosso, o da capacidade também não foi para lá ninguém
Inês	Esteve lá a Sílvia, mas foi a tal coisa era .. ?? Agora o do dinheiro era, para mim, o mais complicado de todos. Acho, tenho a sensação que foi a que os miúdos gostaram menos.
Inv	Um dia ainda vamos resolver os problemas do dinheiro na vossa turma, para vermos se eles são assim tão complicados.
Inês	Hi. Eles disseram logo como aquilo tinha muitos números era logo o das ovelhas (risos). Por acaso elas estiveram a explicar .. eu já tinha lido, mas quando a Renata me mostrou aquilo, eu não percebi muito bem …É a tal coisa, era preciso estar a resolver por tentativa e erro. Elas sabiam que era aquele, portanto tiveram lá sempre elas. Estava cá sempre alguma delas.
Inv	Aqueles problemas são, no fundo, como o problema dos volumes que pode ser resolvido usando determinadas operações, determinados conhecimentos matemáticos, mas também podem ser resolvidos usando materiais adequados ao desenvolvimento das crianças.. Vocês é que não se debruçaram sobre eles.
Inês	Talvez.
Inv	Por exemplo, a Inês se tem ido para o volume, pela conversa que tivemos na semana passada, não estava ciente …
Inês	Porque eu li. Eu li o problema[1]
Inv	E não o compreendeu.
Inês	Não o compreendi, portanto quando tivemos que ir para lá disse à Mariana «vai para lá tu, porque eu …

[1] *Um mercador empregou 300 réis em 30 alqueires de trigo. Ora este mercador quer vender o trigo e tomou 15 alqueires dele, que é a metade de 30 alqueires, e levou-os a vender a um mercado, onde o alqueire era de três quartas do dele e vendeu esse alqueire (pequeno) por 10 réis.*
E, depois, levou os outros 15 alqueires a outro mercado onde o alqueire era de cinco quartas (alqueire grande) e vendeu cada cinco quartas por dez réis.
Pergunto se ganhou este mercador ou se perdeu na venda deste trigo?
(Adaptado de Bento Fernandes, Tratado da Arte de Aritmética, 1555, in Almeida, 1994b, p. 172)

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	E agora não teve receio em propô-lo na aula.
Inês	Agora não, porque eu já sabia como é que se resolvia. Não achei que fosse nada complicado.
Inv	Sabia como se resolvia e não só acho que compreendia …
Inês	Compreendi como é que era e o que é que se pretendia.
Inv	E a Mariana também. Aliás, a Mariana quando voltou a olhar para o problema e tinha estado na banca viu logo .. que o problema era um problema ..
Mariana	O problema da banca não era este.
Inv	Não era este?
Mariana	Era este, mas não era … o problema em si não era este. Era sim o de fazer a soma por causa dos alqueires[2]..
Inv	Não, não este problema estava na banca.
Inês	A Mariana quer dizer que o mais complicado na banca ..
Mariana	Era a soma.
Inv	Ah, na banca … era o da soma.
Mariana	Pronto, era. Isso era.
Inês	Era em base
Mariana	Era em base 4 e tentar explicar aos miúdos como é que era e como é que não era. A Silvia disse-me «faz por esquemas, isto e isto equivale a isto, automaticamente vem para este lado, isto e isto». Só assim.
Inv	Então mas eles não o resolveram vertendo o milho e encontrando …
Mariana	Isso era comparação.
Inv	Sim, mas a comparação era fundamental para resolver essa 2ª questão.
Mariana	A seguir à comparação iam para a soma. Fazer o problema da soma.
Inv	Tinham de saber quantas unidades de um determinado tipo formavam uma nova unidade.
Mariana	Pois, mas era muito complicado. Porque eles viam 3 mais 4 é 7. Nas quartas, por exemplo. Três mais quatro é sete, não tinham ideia …
Inv	Então como é que a Mariana e a Sílvia os orientavam?
Mariana	Nós tínhamos por exemplo 3 quartas, tínhamos que somar mais 4 quartas .. Era as quartas? .. Não, era as semas.
Inv	Isso era no comprimento.
Inês	Era quartas.
Mariana	Quartas e a seguir? Era os alqueires e o quê?
Inv	Era o selamin.
Mariana	Era o selamin. Primeiro era o selamin, o selamin transforma-se em quarta e a quarta no alqueire. Por exemplo era 3 mais 4. Três selamins mais quatro selamins, certo? Fazia-se os três quadradinhos mais os quatro quadradinhos, pronto. Depois tínhamos por exemplo 2 mais 1. Tínhamos duas quartas, fazíamos 2 quadradinhos mais um quadradinho. E a seguir os alqueires, tínhamos 1 mais 1. Um alqueire mais 1 alqueire. Pronto. E eles sabiam que uma

[2] *Tenho necessidade de somar dois alqueires, três quartas e seis selamins de cevada com um alqueire, duas quartas e sete selamins de milho.*
Pergunto: Quanto é a soma?
(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 210)

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

	quarta mais uma quarta mais uma quarta mais uma quarta, ou seja quatro quartas .. quatro selamins era uma quarta[3], então reuníamos aquilo e passávamos para as quartas. Acrescentávamos lá mais um quadradinho. Pronto. E assim sucessivamente. Se sobrasse um .. deixávamos o estar. Por exemplo, sei que o selamin era 501 e por isso o selamin .. sobrava 1 selamin, certo? Então passávamos ao resto. Então 4 quartas é um alqueire, portanto mais 4 quartas passa ali um alqueire. Juntamos mais 4 quartas, passa ali um alqueire. Não sobrou quartas nenhumas, pois não? Então zero. Então quantos alqueires temos aqui? Cinco. Então cinco, zero, quantos selamins sobrou? Um. Então é 5, 0, 1, vão lá pôr. Põem lá, acham que está certo ou errado.
Inv	Então a Mariana achou-o conceptualmente muito mais difícil do que o do comprimento. Porque havia um problema semelhante nos comprimentos.
Mariana	Havia.
Inês	Mas no comprimento era mais fácil.
Inv	Mas era exactamente do mesmo género.
Inês	Mas no comprimento não sei porquê não achei assim …
Mariana	Eu também não achei.
Inês	Para mim era dos mais fáceis que lá estava, tirando o da massa.
Mariana	Não sei porquê. Não sei se era por trabalhar com fracções, para mim era dos mais fáceis.
Inv	Mas o selamin também é uma fracção da quarta.
Mariana	Pois é, mas nós não consideramos ali como fracção. Ali, daquela maneira não estava como fracção. Depois lá entendi como é que era e como é que não era. Depois com os grupinhos e tal, uma maravilha (risos)
Inv	Então e o vosso problema[4] era difícil?
Inês	O inicial?
Inv	Sim, o inicial.
Mariana	Aquilo tinha muitas maneiras de resolver.
Inês	Tinha. Na minha opinião .. não sei .. mas para 1º ciclo era muito complicado. 1º ciclo, 2º ciclo não. Tanto que houve miúdos … quando trouxemos cá os da nossa turma que nós sabíamos quem é que era capaz de fazer, houve um ou dois grupos que eu disse à Sílvia, Sílvia que lá estava, «diz a eles para fazerem aquilo, porque eles conseguem fazer». Outros não.
Inv	E conseguiram?
Inês	Conseguiram. Por exemplo, o grupo do Tiago e da Ana foi o primeiro grupo logo que esteve lá. Eu quando os vi lá, falei, disse à Sílvia «manda fazer também aquele, porque eles sabem fazer». E conseguiram fazer. Agora houve outros que eu acho que não eram capazes … porque é a tal coisa, o outro da fonte era de dois ou três passos.. Tanto que o primeiro eles faziam bem..

---

[3] CS está um pouco confundida, pois são necessários 8 selamins para perfazer uma quarta.

[4] *Eram dois homens que iam por um caminho. Um levava 8 quartilhos de água numa cabaça e outro levava 8 quartilhos de água em duas cabaças, a saber, cinco quartilhos de água numa e três na outra. Beberam a água da cabaça grande que tem 8 quartilhos e querem-se apartar e dividir a água das outras duas cabaças, cinco numa e três na outra. Querem que nenhum deles leve mais água do que o outro, a saber, que cada um leve quatro quartilhos e não têm medida nenhuma. Ora eu pergunto de que maneira devem cambar a água de uma das cabaças para as outras para que nenhum vá enganado?*

(Adaptado de Gaspar Nicolas, Tratado da Prática d'Arismétyca, 1519, in Albuquerque, 1973, p.118)

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	O primeiro[5] era elementar de mais. Não se justifica, pois não?
Inês	Para o 1º ciclo, sim.
Mariana	Eles achavam muita piada. Ah, é a fonte? Então agora tiramos água à fonte e agora metemos lá para dentro? Pois é, estamos em época de seca, não podemos.
Inês	Não podemos deitar fora.
Mariana	Agora para 2º ciclo, não.
Inês	Já era fácil de mais.
Inv	E o segundo problema?
Inês	O segundo para o 2º ciclo, para alguns …sim. Agora para outros também não. Mesmo … houve alunos da nossa turma que não fizeram. Fizeram só aqueles que nós sabíamos à partida que eles já saberiam fazer. Pronto nós sabíamos que eles ..
Inv	Que tipo de orientação é que vocês lhes davam nesse problema, em concreto?
Inês	Nesse? Íamos dando pistas «então pensem lá, se fizéssemos antes assim como é que ficava? Porque eles tinham muita tendência de voltar atrás
Inv	Mas houve quem resolvesse sem qualquer pista?
Mariana	Não, pelo menos enquanto eu lá estive.
Inês	Enquanto eu lá estive também não. Mesmo os nossos de 6º ano não. E os de Alcains também não.
Mariana	E eu estive lá de manhã com … estiveram lá os de Alcains e eles também não resolveram.
Inv	Ninguém resolveu o problema sem uma pista?
Inês	Mesmo o outro[6].
Inv	Mesmo o segundo? O primeiro, esse ..
Inês	O primeiro sim, foram fazendo. O primeiro acho que eles não faziam logo porque .. não sabiam bem o que era. Pronto, não tinham consciência que tinha de se deitar fora e depois meter outra água. Depois no segundo como já sabiam que se tirava, que se deitava e depois se punha outra vez, já conseguiam resolver melhor. Mas , mesmo assim, sem pista. Havia sempre um ponto em que nós tínhamos que dizer «então pensem lá» porque senão voltavam atrás outra vez. Nós dizíamos «então se fazes assim, voltas atrás, ficas na mesma. Então, achas que vale a pena?»
Inv	Então e na massa?
Inês	Na massa, eu só estive com os pequeninos, do 1º ciclo. Por isso foi só comparação[7]

[5] *Um homem está junto a uma fonte e precisa de medir 2 quartilhos de água. Só tem duas vasilhas, uma de 8 quartilhos e outra de 3 quartilhos, mas pode despejá-las e enchê-las quando quiser.*
Ora eu pergunto: como é que o homem pode obter exactamente 2 quartilhos?

[6] *Um homem está junto a uma fonte e precisa de medir 4 quartilhos de água. Só tem duas vasilhas, uma de 5 quartilhos e outra de 3 quartilhos, mas pode despejá-las e enchê-las quando quiser.*
Ora eu pergunto: como é que o homem pode obter exactamente 4 quartilhos?
(Adaptado a partir de um problema da página web de Maria João Lagarto)

[7] *Nos pesos de Portugal, é necessário somar dois arráteis, um meio-arrátel, três quartas e cinco onças de coisas de valor com três arráteis, um meio-arrátel, duas quartas e quatro onças. Pergunto: qual é a soma?*
1.Que unidades são referidas no texto?
2.A que grandeza respeitam essas unidades?
3.Recorrendo à balança e às massas marcadas estabelece a relação entre as unidades referidas no texto e, de seguida, calcula a soma pedida.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	Só fez isso?
Inês	Fizemos o primeiro que era indicar as unidades. Isso fiz. Depois o problema já não fiz. Como tinham dito para nós não fazermos os mais complicados. Eu estive lá com os do 1º ciclo.
Inv	A Mariana esteve na banca do comprimento. Achou-a a mais fácil de todas, não foi?
Mariana	A mais fácil de todas, não. Para mim a mais fácil de todas era a minha.
Inês	Claro.
Mariana	Eu dominava aquilo.
Inv	E para as crianças?
Mariana	Para o 1º ciclo … acho que as crianças adoraram a do comprimento e adoraram também a ???. Acho que sim. Depois andarem lá a meter nos saquinhos eles também achavam piada. A nossa da água, o projecto da água para eles, às tantas … Mas acho que sim. Para os pequeninos. Para os do 2º ciclo .. a … o nosso…
Inês	Era .. O da água e do volume
Mariana	E o do volume também.
Inês	Porque exigia mais.
Mariana	Aliás, alguns deles dizem que gostam deste e daquele porque
Inês	porque era mais difícil.
Mariana	Da massa e do comprimento eu não estive. Na massa eu não estive e no comprimento não estive com os do 2º ciclo, só estive com os do 1º ciclo.
Inês	Pois foi, só estivemos de manhã.
Inv	E aí não teve de lhes dar nenhuma orientação específica, pois não?
Mariana	Eles iam por tentativa e erro. Eles iam vendo, eu dizia-lhes o que é que era para fazer, eles seguiam exactamente «Ah, pronto já sabemos».
Inv	Vocês experimentaram, na 3ª feira, utilizar na aula um dos problemas da exposição e eles reagiram bem.
Mariana	Sim.
Inv	A exposição criou-lhes a motivação para o problema?
Mariana	Não sei se foi a razão.
Inês	(risos)
Inv	Terá sido a professora que criou a motivação?
Mariana Inês	Não sei.
Mariana	Foi mais um problema que eles fizeram.
Inês	Exacto. E eles já sabiam qual é que era a resposta .. de uma delas (risos).
Mariana	Foi motivação porque eles já sabiam a resposta e já cá tinham vindo.
Inês	Já tinham vindo.
Mariana	Agora .. eu não consigo tirar conclusões.
Inês	Agora por exemplo havia alguns que não tinham feito.
Mariana	Houve um grupo que não teve tempo de fazer (na exposição).
Inês	Houve dois grupos que não os fizeram todos.

(Adaptado de Guiral e Pacheco, Flor da Arismética Necessária, 1624, in Almeida, 1994b, p. 209)

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	Na vossa opinião, os alunos acham estranhos esses problemas envolvendo antigas unidades?
Inês	A primeira vez, sim. Quando eu fiz … a Mariana tinha feito a do olho de Horus, mas quando eu fiz a primeira, a da quarta e vintena, eles tiveram um bocado de dificuldades. Tanto que eles queriam reduzir, fazer conversões para as unidades que conhecemos. Aí, sim. Agora vieram à exposição, eram aquelas unidades. Agora o problema também já conheciam, tanto que já nem tiveram a tendência de fazer a conversão.
Inv	E vocês sentem-se bem a propor aqueles problemas na aula?
Inês	Eu gostei.. da outra e desta também.
Inv	Sente-se à vontade? Acha que tem algum sentido …
Inês	Acho que sim.
Mariana	É diferente, professora. Também os problemas acabam sempre por ser a mesma coisa. É diferente, tem outro vocabulário.
Inês	Depois tinha uma coisa boa, que era uma … não era uma situação forçada.
Mariana	Era real
Inês	Exacto. Era uma situação real, não era uma situação forçada. Por exemplo, o Quarto e Vintena era real, não era um problema que se inventou por um livro. Pronto, acha que isso também ajuda um bocado, porque eles se lêem um problema e dizem «isto é uma treta», o problema foi para se resolver e mais nada.
Inv	Acha que eles sentiram isso com o problema do Gato e do Rato? Que sentiram que era forçada?
Magda	Isso sim.
Inv	Absurda?
Inês	(risos)
Magda	Eles disseram assim «o gato é estúpido se estiver à espera do rato» (risos). Foi o comentário deles.
Magda	Eu não sei … se eles na cabeça deles conseguem pensar assim «isto é forçado ou isto é mesmo só de propósito para isto». Não sei, não consigo .. cada um pensa da sua maneira e há ali miúdos que a gente até pensa que não têm uma capacidade de raciocínio. Pelo menos não a têm assim muito desenvolvida, a capacidade de raciocinar, e afinal até têm. Se calhar para aquilo não têm, mas para outras coisas mais da vida real, até têm. E então .. eles .. pronto .. eu comecei por dizer «acham que .. quantos dias demorará, será que o rato espera tantos dias, espera esses dias. Vamos ver se é muito, se é pouco». E eles acabaram por dizer «o rato é estúpido se estiver à espera do rato, não é?» depois viram quantos dias é que eram e disseram logo «é impossível o gato esperar pelo rato».
Inv	A Mariana agora, à posteriori, era capaz .. imagine que tinha outra turma de 6º ano, era capaz de avançar novamente com aquele problema na aula?
Mariana	Com aquele tipo de problema?
Inv	Com aquele mesmo.
Mariana	Atenção. Correu mal nesta, porque é que eu não havia de experimentar noutra turma?
Inv	E conseguia corrigir aquilo que correu mal? Acha que conseguia fazer isso?

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Mariana	Tenho consciência daquilo que correu mal, por isso de certeza absoluta, pelo menos tentava. Tentar não custa e eu acho que o que eu tenho andado a fazer é tentar para ver se as coisas melhoram. Tenho tentado melhorar de aula para aula e às vezes sai e outras vezes não sai.
Inv	Que tipo de problemas vocês consideram mais interessantes, nestes problemas históricos?
Mariana Inês	Mais reais.
Inês	Esses mais artificias, do gato e do rato, não sei .. não estive na aula, mas tenho a sensação que eles não ...
Inv	Não se envolvem tanto?
Mariana	A professora esteve e sabe.
Inv	E acha que correu mal precisamente pela desadequação da situação.
Mariana	Não, correu mal porque …(não se percebe) O que correu mal ou menos bem, se calhar, também foi erro da minha parte e foi. Se eu estou ali a orientar e as coisas correm mal, a culpa é minha. É que é mesmo. E há certas coisas .. eu tenho um bocado dificuldade às vezes em dizer-lhe as coisas a eles. Para não lhe dizer «é assim», ando às voltas, às voltas, e acabo por às vezes, até por cometer erros e outras vezes não me saber explicar .. e é esse o meu problema[8].
Inv	Ou seja sente-se pressionada por pensar que não deve dizer determinadas coisas. Tem de se libertar dessa pressão. Comece por dizê-las.
Mariana	Oh não, professora. Depois caem todos em cima de mim «não se pode dizer, os meninos têm de ir à descoberta». Aí é que está o problema.
Inv	Mariana ninguém está à espera que os meninos descubram o que é uma recta ou uma semi-recta. Nós temos que ter os pés na terra. Essa obsessão com a descoberta é uma coisa tremenda.
Inês	E é.
Mariana	Mas é verdade, é-nos incutido.
Inês	E nós funcionamos em função disso.
Mariana	É nos dito desde o início que qualquer coisa que a gente faça, as crianças têm de ser levadas a descobrir.
Inv	Eu substituiria por facilitador. No fundo a dúvida está em saber pôr as questões que possam facilitar determinadas conclusões.
Mariana	Exactamente.
Inv	Inês, como eu não observei a sua aula e também não sabia que ia propor a Tarefa da Venda do Trigo e não gravámos, preciso que reflicta um pouco sobre a aula. Já estive a falar com o vosso PC, para recolher as impressões dele relativamente à sua aula, Inês.
Inês	E foram boas? Professora, os miúdos estavam muito …

[8] **Nota de campo:** interrogo-me até que ponto fazemos os futuros professores sentirem-se incapazes de ensinar matemática, pois apodera-se deles uma ansiedade obsessiva por terem de conduzir o aluno à construção do seu próprio conhecimento. É como se ao professor estivesse negada a função transmissiva do conhecimento. É como se sentissem proibidos de expor conteúdos aos alunos.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Inv	Muito agitados?
Inês	Muito .. a reclamar muito.
Inv	Inês como é que estruturou a sua aula?
Inês	Então, comecei por .. questionar .. pus uma expressão no quadro. Uma expressão não … já nem sei bem o que é que era. 3 a dividir por ½ , por exemplo.
Mariana	Só assim.
Inês	Só assim e perguntei como é que resolviam, pronto. Disseram que invertíamos o … pronto e depois pus com dois números, com duas fracções. Dois, não foi? E outro em que se aplicava a lei do corte. Pronto. Foram 3 ou 4, logo no início. Fizeram logo … explicaram-me que se multiplicava pelo inverso do divisor .. não tiveram problemas. Depois propus este problema do Max, fui eu que falei. Contei como se fosse um problema mesmo meu. Eles ficaram muito preocupados com o meu cão que estava doente. Coitadinho. Depois distribui, eles fizeram. Não tiveram dificuldade.
Inv	Como é que eles resolveram?
Inês	a…
Inv	Logo pela divisão ou seguiram outro tipo de estratégias?
Inês	Pela divisão, não foi preciso fazer esquema.
Inv	Todos?
Mariana	Não.
Inês	Alguns fizeram mentalmente, pensaram como era preciso um comprimido e meio por dia, em dois dias tomava 3 e assim sucessivamente. Mas não fizeram o esquema. Mas a grande maioria fez pela divisão.
Mariana	E o S. eu estava ao lado dele, não sei se sabe quem é?
Inv	Sei.
Mariana	Como ele não sabia fazer eu expliquei-lhe pelos agrupamentos. Por .. agupar.
Inv	Mas fazendo o desenho dos comprimidos?
Mariana	Sim. Ele fez tudo.
Inês	O S na 3ª feira fez tudo. Até me disse «professora, deixe-me ir fazer ao quadro que eu hoje já fiz tudo».
Inv	Mas isso nem sempre acontece.
Inês	Nunca acontece.
Mariana	Ele ontem, ontem não, na 3ª feira estava muito ..
Inês	Muito inspirado.
Mariana	Eu disse-lhe «estás lindo, hoje. Sim senhor, estou a gostar» e ele «então, porto-me bem».
Inês	Portou-se muito bem e fez tudo. E quis ir ao quadro, eu é que não dei conta e não o mandei. Se tivesse dado conta, tinha-o mandado a ele. Mas até foi neste, no dos alqueires que ele queria ir.
Mariana	Foi.
Inês	Foi nos dos alqueires.
Mariana	Foi porque sabia. Sabia porque .. ele nem sequer tinha vindo à exposição, nem sabia disso. Teve lá .. a Sílvia depois também esteve de volta dele, visto que foi o problema da Sílvia (na exposição). A Sílvia disse «deixa estar que eu explico-lhe».
Inv	A Sílvia esteve a observar aula?

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

Mariana	Esteve a observar a aula, ele então voltou-se para trás, falou com a Sílvia. Ele gosta
I+M	Muito da Sílvia.
Mariana	Como ele gosta muito da Sílvia, está sempre assim muito sério a olhar para ela.
Inês	Ele gosta muito da Sílvia.
Mariana	Depois lá sabia resolver as coisas. Depois, por acaso, ele estava excelente naquele dia.
Inv	Muito bem. Resolveram bem o problema do comprimido, encararam-no como
Inês	Divisão. Alguns por pares, fizeram como eu à bocado estava a dizer: dois dias três comprimidos. Depois fizeram a transformação do numeral misto para fracção. Não tiveram problema. Correu bem aquela parte. Aliás correram todos bem. Só nesta aqui houve um bocado mais dificuldade, mas também …
Inv	Qual?
Inês	A das amêndoas.
Inv	Eu depois acabei por não saber como a formulou.
Inês	Eu optei por …expor os problemas sempre primeiro oralmente. Falar mais ou menos com eles …
Inv	Expor, como? Lê-los?
Inês	Não, não li. Eu sabia-os mais ou menos de cor. Não como está ali escrito, obviamente, mas, mais ou menos. E fui tentando explicar. Depois fui distribuindo, para ver .. porque só ouvindo falar, eles não conseguem[9] … fui distribuindo e eles foram fazendo. Mas também não tiveram ..
Inv	Então qual é esse?
Inês	O das amêndoas. Comprou 40 quilos e vendeu 12 para um restaurante. O restaurante faz pacotes de 1/5 de quilo. O problema deles foi aqui: «o que representa a expressão[10]», porque teimaram que era, .. que era o quê Mariana? A quantidade que cada saco levava. Mesmo estando aqui que era 1/5 de quilo cada pacote, a maioria deles disse que era a quantidade que cada saco levava. Como era a dividir, pronto.
Inv	E depois, como é que resolveu …
Inês	Depois estive a explicar-lhes que o 40 menos o 12 … O que é que era? Era a parte que ele já tinha vendido, ou seja, parte com que ele ficou, 40 menos 12. Então e depois o que é que ele fez? Dividiu. Em quê? Em pacotes. Então quanto é que pesava cada pacote? Um quinto de quilo. Então se cada pacote pesava 1/5 de quilo, dividimos os quilos que ele tinha. O que é que calculamos com esta expressão? Pronto, depois lá chegaram. Depois, a calcular a expressão também não tiveram dificuldades. Este então era multiplicar o número de pacotes que dava que acho que era 16 por 2,25 que dava ..
Inv	Esses 3 problemas são da primeira parte da aula?
Inês	Mais ou menos, 40 minutos.
Inv	E o anterior, que eu também não conheço?
In~es	Fazer pacotinhos de rebuçados com os 2 quilos que comprou. Sabendo que cada pacotinho leva 1/8 de quilograma, quantos é que a Rita poderá encher? Era neste

[9] Notas de campo: este foi um aspecto relativamente ao qual Inês já tinha sido alertada (ver reflexão do quarto e vintena a propósito da extensão do problema sugerida pelo PC.
[10] Notas de campo: (40-12):1/5.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

	que este aparecia uma expressão. A dificuldade deles foi dizer o que é que era a expressão. Aqui não era preciso fazerem a expressão. Era só calcular. Foi o mais fácil para eles. O mais fácil foi aquele. Tinha mais, mas o PC disse que não era preciso. Como eles já tinham estado a fazer na 6ª feira .. Ah, metade da turma já fez. É só mais pela outra metade que ainda não tinha feito. Fizeram bem e depois propus este. Lemos o texto.
Inv	Qual? Este texto introdutório? (anexo?)
Inês	Sim. É só assim uma coisa .. é só para eles saberem, é mais por causa do alqueire.
Inv	Este texto era o que estava na brochura da exposição, não era?
Inês	Não sei, eu terei do outro livro ou da brochura? Já não sei.
Inv	Ok.
Inês	Acho que tirei daí. Estiveram a ler, uns e outros distraídos, não é verdade? Tive que os mandar continuar a ler não sei quantas vezes. Depois mandei-os ler o problema. Ao início tiveram um bocado de dificuldade no (a), porque era a primeira, não é? Eles percebiam o que é que eu queria, mas não sabiam o que é que haviam de fazer. Porque era estranho. Então é 5/4 daquele, é ¾ daquele? É um bocado estranho. Mas pronto, fizeram o primeiro, então o outro é igual. Fizeram o segundo. E então a última foi a mais fácil. Fizeram logo «Ah, ganhou». Aliás eles disseram logo que ele tinha ganho.
Mariana	Que ele tinha ganho.
Inês	Como se lembravam[11] .. excepto …um grupo .. eram 4.
Mariana	Era um grupo que não fez, então esses não sabiam ..
Inês	Esses não sabiam.
Mariana	Tiveram mais aplicados.
Inês	Ai, quando lhes dei (risos) eles olharam muito .. como viram muito números disseram logo «este é o das ovelhas» (risos). 300 réis era o das ovelhas (risos). Diz outro «este fala em alqueires, não é o das ovelhas». Mas resolveram. Sabiam que ele tinha ganho.
Inv	Mas já nem se recordavam ..
Inês	Quanto é que era. Mas um disse logo «mas ele ganhou e não sei quê».
Inv	Então e não tiveram dificuldade em reconhecer a situação como uma situação de divisão?
Inês	Não. Aí, no início, um pouquinho, um pouquinho, mas também nada de especial.
Mariana	Não sabiam o que é que iam dividir.
Inês	Não sabiam .. acho que era o português. A interpretação. Eles não conseguiram interpretar muito bem, porque nós tínhamos que ver .. Eu tive que lhe explicar que tínhamos que ver quantas vezes é que o ¾ cabia naqueles 15, ..porque eles não conseguiram perceber isso. E depois quando dava os 15 .. aqui dava 20 .. neste. Os ¾ era mais pequeno, perguntei-lhes se era mais pequeno ou se era maior. Eles sabiam que era mais pequeno e que este era maior. E .. depois .. dava 20. Mas por que é que dos 15 se transformaram em 20?
Inv	Hum, hum.
Inês	Aí já foi um bocado mais difícil .. eles conseguirem explicar por que é que os 15

[11] Notas de campo: cruzar com o que Sílvia diz na entrevista final ou no questionário final . note-se que para Sílvia o saber a solução é sinónimo de resolução do problema

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

	se transformaram em 20. mas houve um ou outro que conseguiu. Depois eles disseram «Ah, pois se é mais pequeno e não sei quê, fizemos mais e não sei quanto». Depois no outro era ao contrário. Como era maior, os 15 ficaram em 12. Pronto.
Inv	Como é que sentiu o envolvimento dos alunos com o problema? Acha que estiveram mais envolvidos neste do que neste, por exemplo?
Inês	Este deu-lhes mais trabalho. Mas eu acho que eles também gostaram .. principalmente da primeira. Como foi assim exposta, tipo um problema .. uma situação assim normal, do dia-a-dia eles ficaram ..
Mariana	Era o Carnaval, depois era a Páscoa.
Inês	Depois era o Carnaval, depois era a Páscoa
Mariana	Depois a seguir a este já estavam á espera que fosse o Natal.
Inês	Pois, a seguir já era o Natal. Depois .. pronto.
Mariana	Depois como apareceu aquele.
Inês	Depois apareceu este .. ficaram assim .. Demorou um bocado, mas pronto.
Inv	De qualquer modo, este já foi no final da aula.
Mariana	Foi
Inês	45 minutos.
Inv	Vá a outra metade da aula.
Mariana	A outra metade da aula.
Inês	Não demoraram..
Inv	Conseguiu mantê-los atentos até ao final da aula?
Inês	Sim. Excepto na última parte, quando passei os trabalhos de casa. O quadro cheio. Coitados!
Mariana	O professor ameaçou-os.
Inês	O professor ameaçou-os cada vez um falava …mais um
Inv	Desta vez eles não tentaram fazer reduções? O quintal para o quilograma?
Inês	Não (risos).
Inv	Já nem falaram nisso?
Inês	Ah, mas houve .. Quem é que foi ao quadro que escreveu.. em vez de escrever alqueires, escreveu alq? Não viste (dirige-se à colega Mariana)
Mariana	Quem é que foi ao quadro?
Inês	Ah, foi a A que foi fazer o último ...Não a A I que foi fazer a última (alínea c).
Mariana	Ah, a última, sim.
Inês	A A I foi fazer esta, do ganhou ou perdeu dinheiro. Então ela escreveu 15 alqueires, mas não escreveu alqueires, escreveu alq ponto. (risos) Eu olhei e disse «não alqueires não tem abreviatura, é alqueires» e ela assim a dizer «Oh que chatice, a palavra é tão grande» (risos) Ah e por causa do Réis. Se era réis ou era reais. Da outra vez era reais, porque é que agora era réis e não era reais.
Inv	Ah, eles lembravam-se que da outra vez era reais[12]?
Inês	Diz logo um «eu acho que aquilo é reais». Não é nada é réis. Não, não é reais.
Mariana	Por acaso o S perguntou o que é que eram os réis. Mas por que é que não é escudo, por que é que não é euro. Depois começou lá a falar dos dólares (risos), pronto .. misturou logo a conversa, claro.
Inês	Mas houve uns que perguntaram porque é que era réis e não reais. Eu disse que

[12] Refere-se ao problema dos pobres, adaptado de Gaspar Nicolas.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 23/02/06)

	primeiro era um .. eu nem sei se disse bem, primeiro eram os reais depois eram os réis.
Mariana	Não, tu disseste sempre réis.
Inês	Eu disse sempre réis, mas houve alguém que me perguntou porque é que era réis e não reais[13]. Eu disse que primeiro era um, já não sei qual, depois era o outro. Transformou-se o nome. Eu lembrava-me de ter falado disso da outra vez. Por isso .. Mas eles perguntaram. Isso e a abreviatura que eu achei piada ao alq.
Inv	Mas essa questão da abreviatura é importante, porque nos permite salientar as ideias que elas encerram.
Inês	Pois eles disseram «isto é tão grande».
Mariana	Ela não sabia, abreviou. Alq, toca a andar.
Inês	Alq, já está.
Mariana	Se faz o quilograma, também não escreve tudo, mete só kg.
Inv	Então faz um balanço positivo da sua aula?
Inês	Sim.
Mariana	Sim.
Inês	Tirando o facto de eles estarem um bocadinho agitados.
	(terminei a transcrição, a partir daqui fala-se da aula das próximas aulas de Mariana no âmbito da Geometria)
Inês	Agora é muito mais giro. Não gosto nada dos números racionais.
Mariana	Ainda bem.
Inv	Não gostam dos números racionais?
Inês	Eu não, que horror. Coisa mais chata.
Inv	Por terem sido leccionados muito tempo?
Mariana	Por isso mesmo. Já é uma lufada de ar fresco. Para ver se isto muda.
Inês	Já estava a começar a ficar um bocado chato, professora. Outubro, Novembro, Dezembro, Janeiro, Fevereiro (risos)
Mariana	Eu acho que eles também já estão um bocadinho fartos.
Inês	Mas coitados, logo na 3ª feira trabalharam muito chateados, muito revoltados, mas trabalharam.
Inv	Não vou trabalhar com vocês na geometria, a não ser que vocês precisem.
Inês	Se tiver alguns problemas interessantes.
Inv	Mas voltarei acompanhar-vos na Proporcionalidade Directa.
Inês	Se calhar, só no 3º período.
Inv	Sim, no início do 3º período.
Inês	Pois, porque os triângulos dão-se depressa (não transcrevi mais…)

[13] Tenho a certeza que na gravação das aula em foi proposto o problema do quarto e vintena e o problema dos pobres, o PC discutiu esta terminologia com as duas futuras professoras.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

Inv	Já não nos encontrávamos há algum tempo. Então quem é que vai começar com o novo tema?
Inês	Sou eu. Tenho aqui.
Inv	Mostre-me lá então.
Inês	Esta é de 3ª feira.
Inv	Esta é a planificação da sua semana?[14]
Mariana	Exactamente.
Inv	Primeiro vão-me explicar o que é que têm planeado.
Inês	Só razão. A comparação utilizando a razão e calcular .. fazer aqueles cálculos .. por exemplo, uma razão de 2 para 3, quanto é que um paga, quanto é que o outro paga. Coisas desse género. Só mesmo com a razão.
Inv	E na semana seguinte?... Ainda não está planificado?
Inês	Não.
Inv	Nem sabem o que vão trabalhar?
Mariana	Não. mas deve ser o …(não percebo)
Inv	Então exponha lá o que está a pensar fazer.
Inês	Vou começar por apresentar .. é uma garrafa e um garrafão de água. A garrafa custa 54 cêntimos e o garrafão custa 1,65 euros. Quero saber onde é que fica mais barato o litro. Vou fazer uma tabela para eles preencherem .. isto é para ser uma tabela para eles preencherem. Pronto .. em grande. Pretende-se que concluam que o preço do litro é menor no caso da compra do garrafão do que da garrafa, porque no garrafão dá 33 cêntimos e na garrafa 36 cêntimos. Ah, este é o da compra da bola. É parecido só que aqui já têm que calcular, quanto é que paga um. É na razão de 3 para 2 . Vão comparar uma bola dois amigos.
Inv	Está a ser tão rápida que eu estou a tentar ler ao mesmo tempo.
Inês	(risos) Não, ainda só vou aqui, na do garrafão. Prontos. Estabelecer comparação, qual é que é mais barato. No caso da bola, são dois amigos que vão comprar uma bola. Um como a usa mais, vai pagar mais. Vão pagar na razão de 3 para 2. Quanto é que paga 1 e quanto é que vai pagar o outro. É resolvida da mesma forma e depois corrigida. Depois vão resolver uma fichinha de trabalho.
Inv	Desculpe, mostre-me o da bola. Onde é que está o enunciado?
Inês	Está aqui.
Inv	Como é que vão resolver este problema?
Inês	Eles vão ter que dividir os 12 euros em 5 partes iguais, um vai pagar 3 partes e o outro vai pagar duas. Porque um paga 3 e o outro paga 2, são 5 partes. Então vamos ter de dividir este valor em 5 partes iguais, quanto é que paga o que paga 3 partes e quanto é que paga o que paga 2 partes.
Inv	Ok, continue.
Inês	Depois uma ficha de trabalho que é … Aliás este é o de 6ª feira. Sim, porque o de 3ª é parecido, só que começa com umas bolinhas. É a mesma coisa, é a razão de .. número de bolas verdes e número de bolas vermelhas. Só que ainda não vai parecer isto na 3ª feira. Isso que a professora estava a dizer. Isto aqui

[14] Notas de campo: a planificação de Inês é constituída por um conjunto de folhas escritas em computador, sem quaisquer outros elementos que não os exercícios/problemas a propor aos alunos.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

	dos preços, na 3ª feira não aparece nada disto.
Inv	Sim eu já estava a achar que vocês iam muito depressa.
Inês	Aqui neste caso é a mesma coisa que o garrafão, mais ou menos, é estabelecer a razão.
Inv	Desculpe lá, mas agora estamos na 3ª feira?
Inês	O problema do garrafão é para começar 6ª, é a continuação de 6ª. Na 3ª temos bolinhas verdes e bolinhas vermelhas. Temos de estabelecer a razão. Eles têm de escolher em qual das caixas, na A ou na B, é mais fácil sair uma bola verde.
Inv	Ah, vai entrar com a noção de probabilidade.
Inês	Pronto. Eles têm que ver que numa tem mais bolas verdes do que na outra, por isso é mais fácil sair uma bola verde naquela em que há mais.
Inv	Isto serve para introduzir a noção de razão.
Inês	Sim.
Inv	Como é que vai definir a razão?
Inês	Mas eu não vou definir.
Inv	Não?
Inês	Não.
Inv	Mas tem que definir. Eles têm que saber o que é uma razão.
Inês	É uma relação entre duas.
Inv	Mas depois na aula seguinte vai calcular razões.
Inês	Sim.
Inv	Essa relação o que é que traduz matematicamente?
Inês	Não sei, uma razão entre duas coisas. Por exemplo, entre o número de bolas verdes e o número de bolas vermelhas. Se há 4 bolas verdes e 2 bolas vermelhas é 4 para 2.
Inv	Certo. Quando chega aqui ao problema do garrafão como é que calcula a razão?
Inês	Dividindo o preço .. razão entre ..
Inv	Entre o preço
Inês	e a quantidade.
Inv	E a capacidade .. neste caso é o volume de água.
Inês	54 cêntimos que é o preço sobre 1,5.
Inv	Ou seja, vai através da ...
Inês	Da divisão.
Inv	O que significa que a razão é um quociente.
Inês	Sim, entre dois termos. O antecedente e o consequente.
Inv	Bem, eu penso que já mostrou isso ao professor cooperante.
Inês	Já.
Inv	Eu acho que tem situações mais interessantes para introduzir o conceito de razão.
Inês	Por exemplo?
Inv	Mais próximo deles. Não quero dizer que este seja difícil, mas envolve outro conceito que não apenas o de razão. Por exemplo, olhando para a vossa turma quantos alunos tem a turma?
Inês	20.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

Inv	Quantos rapazes’
Inês	11.
Inv	11 rapazes, o número não é o melhor, mas não faz mal. E 9 raparigas. Podemos colocar-nos a seguinte questão: como é que podemos comparar o número de rapazes com o número de raparigas ou vice-versa. Eventualmente podem surgir dois tipos de resposta.
Inês	11 é maior que 9, é o que eles vão logo dizer.
Mariana	Ou que há mais rapazes do que raparigas.
Inv	Certo, há mais rapazes do que raparigas. Mas essa não é a única resposta possível. Mais?
Inês	E não dão mais nenhuma.
Inv	Vocês têm os vossos alunos em muito baixa consideração.
Inês	Não dão, professora.
Inv	Então se eles nunca falaram disto, o que é que a professora está à espera que eles digam? Um sobre vinte e nove sobre 20? .. ou 11 para 9?
Inv	Eles podem dizer que há mais rapazes do que raparigas e é verdade. Mas se calhar há outras formas de compararmos.
Inês	A única forma de compararem é que 11 é maior que 9.
Inv	Essa é uma das hipóteses.
Inês	Mas é só assim que eles comparam.
Inv	Mas mesmo dentro desta .. os números não são muito simpáticos para aquilo que eu quero salientar. Vamos supor que são 15 rapazes e 5 raparigas. Embora o que vamos fazer se faça com qualquer par de números. Portanto, há mais rapazes do que de raparigas.
Mariana	Os rapazes são três vezes o número de raparigas.
Inv	Mas ainda há outra forma de comparar. Eles podem, quer numa situação, quer na outra há mais 2 rapazes do que raparigas. O que é isso significa? que quando eles dão este tipo de resposta .. eu não acredito que eles não dissessem uma coisa destas. Há mais dois rapazes, é a comparação mais óbvia que podemos fazer entre duas quantidades. Chagam a este resultado subtraindo ao número de rapazes, o número de raparigas. O 2º exemplo é mais feliz para o que se pretende. Eles podem dizer há mais rapazes do que raparigas, ou que há mais 10 rapazes do que raparigas. Neste último caso fazem uma comparação aditiva. Ou podem dizer: há o número de rapazes é o triplo do de raparigas. Ora quando nós damos uma resposta deste tipo nós estamos a comparar duas quantidades através da multiplicação. Como é que eu chego ao resultado, ao 3?
Mariana	Dividindo 15 por 5.
Inv	Ora isto não é mais do que o conceito que vocês querem introduzir, o conceito de razão. Ou seja, a razão, como a Inês disse e muito bem exprime uma relação entre duas quantidades, mas é uma relação de um tipo específico. É uma relação multiplicativa.
Inês	Sim.
Inv	Qual é a operação da razão? Vai precisar dela aqui para o problema do garrafão.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

Inês	Divisão.
Mariana	É a divisão.
Inv	O 3 o que é que representa?
Mariana	O resultado.
Inês	O quociente.
Inv	O quociente. Por isso, se diz que a razão é um quociente entre dois números. Quando nós representamos a razão nesta forma, nós estamos a ir buscar uma representação que é conhecida dos alunos. Que é a representação sob a forma de fracção.
Inês	Coitados.
Inv	Não são coitados, isso ocorre porque ambos os conceitos representam um quociente. Como a fracção também representa um quociente, vamos utilizar o mesmo tipo de notação.
Mariana	A razão é 3?
Inv	Isto é o valor da razão. Há dois tipos de questões que vocês podem colocar. Uma é escrever a razão entre o número de bolas verdes e o número de bolas vermelhas e outra é calcular o valor da razão. Esta última é o que a Inês vai pedir na 6ª feira. Em qualquer uma destas situações, a Inês pede o valor da razão. Portanto, eles têm que escrever a razão e calcular o seu valor. Para que as coisas se articulem, aquilo que vai propor na 3ª feira deve preparar o terreno para o que pretende fazer a seguir. (a inv dá-lhes outros exemplos) Numa turma, há não sei quantos fãs dos d'zrt e os restantes alunos não apreciam os d'zrt. Como é que podemos comparar o número de fãs, com o número de alunos que não são fãs dos d'zrt. É importante que eles compreendam que podem comparar duas quantidades de duas formas, determinando a diferença entre elas. Ou através da divisão. Ora é precisamente nesta última forma de comparação que vocês querem centrar atenção dos alunos e que é denominada de razão. No 6º ano, em Ciências, os alunos aprendem a ler a informação do rótulo de um produto alimentar
Inês	Acho que isso é logo ao início quando se dá a roda dos alimentos, não é?
Inv	Nós encontramos nos rótulos muitas informações que não são mais do que razões. Por exemplo, por cada 100g contém 2,5g de hidratos de carbono. Embora possa não estar escrito na forma de razão, isto traduz uma razão e que pode ser representado dessa forma. Além disso isso conduz-vos à noção de percentagem que é uma razão de consequente
Inês	100.
Inv	Vocês vão também que trabalhar o conceito de escala. Ora a escala é uma razão. Vocês vão resolver problemas envolvendo escalas através das proporções. Vamos situar-nos. Que conceitos é que vocês vão trabalhar?
Inês	Razão, percentagem, proporcionalidade e as escalas.
Inv	Vocês vão trabalhar o conceito de razão, o conceito de percentagem, o conceito de escala, o conceito de proporção, o conceito de proporcionalidade directa e vão resolver problemas envolvendo todos estes conceitos. Ora o conceito de razão é um conceito muito lato. Os conceitos de percentagem e de escala vocês devem fazê-los surgir como razões especiais. O

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

	conceito de percentagem, como uma razão de consequente 100 e o de escala como uma razão cujo antecedente é 1. Certo? (silêncio)
	(voltou-se ao problema das bolas, a inv chama a atenção de que este não é apropriado para introduzir o conceito de razão como um quociente)
Inv	Eu não sei quantas bolas são.
Inês	São duas verdes, duas rosa e três amarelas.
Inv	Nem tem qualquer intenção em calcular o quociente?
Inês	Não. Não era para calcular, nessa aula, ainda. Isso era só para introduzir 6ª feira. Dividir uma quantidade de acordo com uma dada razão.
Inv	Mas repare já tem aqui a situação das razões serem equivalentes (surge no problema das bolas)
Inês	Sim, dois quintos e quatro décimos. Mas isso eles já sabem. Porque isto (refere-se à escrita 2/5) é um quociente. Eu acho que representando dois quintos, eles vêem logo que é um quociente.
Inv	Sim. Mas aquilo que estão a escrever não se lê como 2/5, lê-se dois está para cinco.
Inês	Pois. Exacto.
Inv	Para que eles compreendam bem isto a razão deve surgir explicitamente como um quociente. (silêncio)
Inês	Não sei. O professor cooperante disse que estava bem, agora assim eu já não sei como hei-de fazer.
Inv	A Inês fará como entender, por acaso eu já tinha há algum tempo manifestado vontade de reunir com vocês.
Mariana	Eu transmiti.
Inês	E tempo?
Inv	Eu sei que vocês têm pouco tempo e só quero ajudar para que ambas fiquem com uma ideia clara dos conceitos que vão trabalhar.
Inês	Exacto.
Inv	Porque este conteúdo é um conteúdo muito importante, como vocês podem comprovar nas competências a desenvolver no âmbito dos Números e Operações no 2º ciclo. (a inv abre o documento do DEB)
Inês	Nós ainda não fizemos nada disso que está aí.
Inv	Não fizeram?
Inês	«Aptidão para trabalhar com valores proximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo», não. Os quocientes davam sempre números exactos.
Inv	Mas tem aí uma proposta onde isso não acontece.
Inês	Aqui, por acaso tem. Aqui fala em números racionais e nós quando demos números racionais o quociente dava sempre números inteiros. Nunca fizemos aproximações e é uma competência que se desenvolve.
Inv	Então estão a falhar, vocês conhecem este documento.
Mariana	Pois, mas não somo nós que ..
Inês	Não somo só nós.
Mariana	Nós temos que nos cingir a uma pessoa que está acima de nós e .. percebe disto melhor do que nós.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

Inês	E eles nem sabem calcular valores aproximados. Não sabem.
Mariana	Estimativas.
Inv	Mas vocês não trabalharam isso?
Mariana	Nós falámos só de fracções, professora.
Inês	Se quiser trago-lhe exercícios deles, eles não sabem calcular valores aproximados. Só sabem arredondar. Fazer valor estimado. Não sabem. Aliás nos testes, agora, viu-se isso perfeitamente. Havia lá fracções que não davam valores inteiros. Umas davam, outras não davam. As que davam calcularam bem, as que não davam aquilo já não correu tão bem, porque já não dava para calcular. Não sabem e isso é uma coisa que se desenvolve.
Inv	Mas ainda estão a tempo.
Inês	São 3 capítulos para dar (risos)
	(não transcrevi uma parte)
Inv	Quantas aulas vocês têm para a proporcionalidade?
Inês	Assim de cor não sei.
Mariana	Deve ser pelo menos até ao final do mês de Abril.
Inv	Não são muitas aulas (o 3º período inicia-se a 18 de Abril, dia da 1ª aula deste tema)
Mariana	Aí é que está.
Inês	Vamos apanhar os feriados.
Mariana	Vamos apanhar os feriados, cortam-nos as pernas.
	(não transcrevi uma parte relativa à contagem das aulas)
Mariana	Eles de geometria não sabem nada.
Inês	Nós nem bissectrizes demos, nem nada. E simetria ela deu aquela aula
Mariana	Dei e a metade (refere-se a metade da turma)
Inês	A outra metade chapéu.
Mariana	E mesmo assim aquela metade faz-lhe ainda um bocado de confusão. Se eles têm muito eixos ao pé uns dos outros, não conseguem perceber que têm que contar. Têm um bocado de dificuldade.
Inês	Pois, é natural.
Mariana	Porque também foi uma aula que para mim não foi nada produtiva. Aquela aula para mim não foi … estavam agitados por causa dos outros e nem pensavam. O professor também, não estava sempre dentro da sala e faz diferença o professor estar dentro da sala.
Inês	Na 6ª feira ela não deu outra vez simetrias. Só deu naquela aula. Na 6ª feira fizemos a auto-avaliação.
Inv	Vocês estão destinadas às fracções, aos números racionais, ..
Inês	Pois, o problema é que eles já nem querem .. quando vêem fracções, eles já nem fazem. Não fazem. Simplesmente não fazem.
Inv	Mas agora não são fracções, são razões. A notação é que é a mesma.
Inês	Oh, professora, para eles ser a notação ou não ser é a mesma coisa. Isso não interessa. Assim que tem fracções, já não fazem. No teste, por exemplo, estivemos a dar triângulos, os triângulos, aquela parte, fizeram bem. As fracções, as expressões, quase ninguém fez. Fracções? Eu não sei fazer. Não fizeram. A maior parte deles não fizeram. Não querem saber. As primeiras páginas eram fracções, nem sequer para elas olharam, página seguinte.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 04/04/06)

Mariana	Mesmo assim eles não gostam muito da geometria, não é uma matéria que eles
Inês	Eles não gostam de nada.
Mariana	Pronto. Eles não apreciam muito a geometria.
Inv	Gostam. Vocês têm lá alunos tão interessantes.
Inês	Pois temos. E bons. (tom sarcástico)
Inv	E são. São os que têm. Há-os bem piores.
Inês	Nós só estamos a comentar.
Inês	A professora não costuma lá estar nas aulas em que eles estão sempre a reclamar 90 minutos. Nunca lá esteve numa aula assim, pois não? Bem me estava a parecer.
Inv	Eu nunca os vi a reclamar.
Inês	Eles conseguem estar 90 minutos a refilar se não gostarem. Se não gostarem da primeira actividade, pronto, é escusado.
Inv	Então é assim, Inês. Pensará por si e fará a sua primeira aula como entender. Eu começaria com exemplos mais concretos, relacionados com alguma actividade ou grupo musical que eles apreciem. Interessa que o conceito de razão seja introduzido de forma clara. Tem de introduzir a notação, tanto pode ser esta (a/b) como esta (a: b). Eu sugiro-lhe que utilize as duas, porque isso vai-lhe facilitar o tratamento das escalas. E eu sei por experiência que as escalas aparecem frequentemente ….
Inês	Aparecem assim.
Inv	Como uma coisa estranha e desgarrada das razões. E não é desadequado que a Inês dê na 6ª feira uma escala como exemplo de uma razão. Não quero dizer que vá resolver problemas de escalas, mas são exemplos concretos das razões na vida à nossa volta.
Inês	Exacto.
Inv	Ou as razões nos rótulos ou outros exemplos que lhe sejam próximos e familiares e que tornem significativo o conceito que estão a aprender.
Inês	Exacto.
Inv	Outro aspecto é o seguinte, uma coisa é escrever a razão que traduz a relação entre
Inês	Duas quantidades.
Inv	Que podem ser da mesma natureza. Eu começaria por uma situação desse tipo.
Inês	Sim, sim.
Inv	Ou podem ser
Inês	de natureza diferente.
Inv	Fazer sempre a leitura da razão. Por exemplo, no exemplo dos fãs dos D'ZRT, 3 está para 15, isto significa que há 3 alunos que não são fãs para 15 que são fãs. Depois há o cálculo da razão. Ora se a Inês introduzir a razão como lhe sugeri aqui, a razão como um quociente vais aparecer de forma natural. (27 min não transcrevi)
Inv	Se isso é para 3ª, é muito pouco.
Inês	Mas eu tenho uma ficha. (não transcrevi) Ainda vou pensar melhor e estruturar a aula.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 11/05/06)

Inv	Amanhã o que é que vai trabalhar?
Mariana	Escalas.
Inv	Já iniciou na 3ª feira?
Mariana	Não, só falei da .. fiz as percentagens com IVA … eles têm um bocadinho de dificuldade a ver que aos 100%, por exemplo fiz uma do barco que custava 10 000 euros com IVA, quanto é que custava sem IVA. E eles .. faz um bocado de confusão .. 100 .. e somar mais 21 .. pronto. Mas até fazem. Depois fiz simples, tendo o preço final e tirando-lhe desconto. Eles .. esses basta fazer um, o resto é tudo igual. Então eles fazem bem. Estão a perceber aquilo. Agora as escalas é amanhã. Vou fazer problemas e vou dizer o que é uma escala .. pronto. Nada assim de especial.
Inv	E a Andreia?
Inês	Eu vou dar exercícios de proporcionalidade. No fundo aquilo que ela (CS) já deu. Na 6ª feira exercícios sobre a matéria toda.
Inv	Mas já introduziu o conceito de proporcionalidade?
Inês	Ela já deu o conceito de proporcionalidade.
Inv	Já introduziu o conceito de grandezas directamente proporcionais?
Inês	Não, essa parte é a que me cabe a mim.
Inv	Na 3ª feira.
Inês	Exactamente. São uns exercícios.
Inv	Então não vai fazer exercícios, vai introduzir um conceito ..
Inês	Exacto e fazer exercícios e depois na 6ª feira vou fazer revisões sobre .. este capítulo. Escalas, percentagens, razão … proporcionalidade para depois a Mariana dar teste na 3ª feira.
Inv	Então ainda não planeou nada?
Inês	Não. Já estive a ver, mas não escrevi. Amanhã falo com o PC..
Inv	Vai fazer hoje à noite?
Inês	Não. Provavelmente só amanhã de manhã. Eu hoje não estou … isto hoje não está a funcionar muito bem. Por isso … nem vale a pena me pôr a olhar porque já sei que não consigo fazer. Eu hoje não estou nos meus dias. Estou mesmo muito … não estou bem.
Inv	Inês, falemos um pouco da última aula. Porque é que disse na última aula, quando acabou de resolver o problema algo como: agora que já resolvemos este problema histórico difícil ..
Inês	Não, eu disse agora que já resolvemos este mais difícil, vamos resolver os mais fáceis.
Inv	Mas achou-o difícil?
Inês	Não, é para eles acharem que conseguiram fazer uma coisa difícil e sentirem-se .. motivados. O outro já era mais fácil, já não tinha ..
Inv	E acha que eles o sentiram difícil?
Inês	Acho que sim .. alguns … são sempre mais ou menos os mesmos. Nós já sabemos quais é que têm mais dificuldade. Alguns penso que sim, .. sentiram .. mais dificuldade, houve outros que não, mas tiveram um pouco, principalmente naquela parte .. da .. se fosse 100 quintais… se em vez de serem os 300 ou os 400, já não sei quantos eram, se fossem 100.. Eles não conseguiram perceber que tinham que arranjar uma razão que fosse equivalente, tiveram muita dificuldade. Fizeram

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 11/05/06)

	porque eu andei por ali e expliquei: então pensa lá, como é que podes fazer se tiveres 400, agora tens 100. Que razão é que escreveste? E agora onde é que vais colocar o 100? Pronto, mas sozinhos ..[15]
Inv	Eu não percebi bem se eles já sabiam o que era a percentagem. Se havia alunos que já tinham trabalhado esse conceito no Estudo Acompanhado..
Inês	Já tinham trabalhado no apoio, no dia anterior.
Inv	Parte da turma?
Inês	Sim.
Inv	Isso perturbou-lhe a exploração do problema?
Inês	Eu não sabia que eles já tinham … eu soube porque estava lá o sumário e porque alguém, já não sei quem, me disse que tinham dado. Depois eu disse tu estiveste lá, mas houve colegas teus que não estiveram. Por exemplo, o rapaz que eu mandei ao quadro, o Ricardo, …ele fez por percentagem.. ele não vai ao apoio. Foi ele que fez por iniciativa própria, por isso é que o mandei lá .. porque achei engraçado. Porque ele fez e depois ao fim chegou .. percentagem .. fez, …consequente cem .. dá para fazer percentagem. Fez, mas sem estar no apoio. Por isso é que eu o mandei a ele ao quadro para ver se ele me conseguia explicar, mas depois ele atrapalhou-se um bocado na explicação. Mas fez por iniciativa dele, porque ele nem sequer vai ao apoio.
Inv	Eu achei que a AA terminou de certa forma abruptamente ..não é este o termo correcto .. foi como se não terminasse a exploração do problema. Até houve alunos que converteram em decimal e a Andreia falou nisso, mas depois não explorou isso no quadro.
Inês	Ah, sim, sim.
Inv	Eu fiquei na dúvida se tinha explorado isso com cada aluno individualmente ..
Inês	Falei com alguns no lugar, sim.
Inv	Pois, foi pena não ter usado o microfone de lapela, porque não se vai ouvir nada disso. Não consegui acompanhar, por isso pensei se teria feito essa exploração individualmente..
Inês	Falei com alguns, por isso … depois … foi um lapso. Como é mais óbvio do que a percentagem, talvez aí tivesse falhado. Depois como já tinha falado com alguns… Mas falei.. falei, por exemplo, com a Ana, com o Ricardo .. quando ele fez a percentagem eu disse: então em vez de fazeres a percentagem, faz lá numeral. Ele também esteve a fazer, depois não fez no quadro mas tinha.
Inv	Eu acho que é uma coisa que falha de vez em quando ..
Inês	É …exploração.
Inv	Por exemplo a Mariana na última aula que eu observei, da qual ainda não falámos, não fez qualquer motivação ou contextualização para o problema. O problema aparece, é resolvido e depois também termina ali .. parece que não se volta ao problema. Não sei se sentem isso.
Inês	Sim, sim. É como a contextualização às vezes .. não sei
Inv	A Inês preocupa-se com isso.

[15] Afinal qual é o papel do professor? Não era de esperar que eles conseguissem sozinhos, ou era?

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 11/05/06)

Inês	Eu tento só dizer algo que .. eles já tinham falado da Casa da Índia e não sei quê
Mariana	E da outra, das mercadorias .. daquela dos panos.
Inês	Não daquela dos barcos ..
Inv	Pagar os impostos
Inês	Eu peguei nesse porque tinha sido algo que eu tinha dado que a CS ainda nunca falou nisso da Casa da Índia. E peguei um pouco por essa das viagens, pagam imposto e .. prontp, lembrei-me disso. Mas às vezes é um bocado complicado. E se calhar é mais fácil ao início da aula.
Inv	No início ou no final. Muitas vezes a contextualização até pode aparecer no final.
Inês	Pois, também.
Inv	Repare aquilo é um problema real que releva ou que pretende relevar a importância das percentagens para comparar quantidades referidas a totais diferentes.
Inês	Exacto.
Inv	E esse aspecto depois não foi retomado no final depois de resolver o problema
Inês	Hum.
Inv	Concluíram qual era o carregamento que tinha maior quebra, ou seja, aquele em que se tinha estragado mais mercadoria comparativamente.
Inês	Exacto.
Inv	Mas não foi destacada a vantagem de fazer aquela comparação ao 100. Isso também faz parte da contextualização. Porque a contextualização não é só contextualizar na época, é perceber qual é que é o contexto, o que é que está por detrás daquela situação e que matemática é que está ali e como é que eu vou olhar para ali e ver em termos matemáticos, resolver e depois voltar ao problema.
Inês	Mas eu perguntei-lhes porque é que nós tínhamos transformado em 100. e houve alguns que disseram que era mais simples se tivessem os dois o mesmo consequente.
Inv	Pois perguntou, mas há ali qualquer coisa que falhou … talvez pela pressa de ir para os problemas a seguir.
Inês	Eu não consigo gerir muito bem o tempo … tenho um problema com o tempo … sobra-me sempre qualquer coisa. Nunca consigo programar uma aula e fazer exactamente o que tenho programado. Ou me falta tempo ou me sobra tempo. Nunca consigo acertar com tempo. E às vezes .. começo a ver .. olho para o relógio e, se calhar, eles até fazem mais depressa do que eu estou à espera. Por acaso .. eu comecei a olhar e comecei a achar «mas eles já estão há muito tempo neste problema».
Inv	Porque andou muito tempo pelo lugar.
Inês	Aí está. Eu tenho um bocado dessa dificuldade …e não a consigo ultrapassar, porque programo a aula de outra maneira e acontece-me a mesma coisa. Ou me falta tempo .. geralmente falta-me sempre.
Inv	É muito frequente?
Inês	O faltar-me muito tempo? Geralmente não … sobra um exercício … ou coisa assim. Pronto, fica para casa e corrigimos no dia a seguir. Por exemplo nesse dia sobrou-me uma ficha, ou foi na 6ª feira?
Mariana	Foi na 6ª feira.
Inês	Na 6ª feira sobrou-me uma ficha inteira para fazer.. foi nesse dia do problema. Pois, eu demorei muito tempo no problema, a ficha era pequenininha.

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 11/05/06)

Inv	Eu ainda lhe quero dizer outra coisa a propósito das intervenções do PC. A questão da estética de apresentação dos resultados é uma questão importante..
Inês	Pois, mas soa gora é que está a ser focada
Inv	Mas não é aquele tipo de intervenção que ajuda os alunos. Basta lembrar-nos que quando estamos no quadro e nos estão a dizer «faz assim ou faz de outra maneira» e parece que nem percebemos o que nos estão a dizer. Vocês aí têm de ter um papel activo e ir ao quadro e ajudar o aluno a fazer o que se pretende
Inês	Mas, por exemplo, o Tiago .. ou a Ana, não sei quem foi. Acha o que foi a Ana quando foi lá pôr o ponto de interrogação (numa proporção), já tinha sido feito na aula anterior.
Inv	Pois, mas nós não aprendemos de forma imediata.
Inês	Exacto, não aprendemos de forma imediata. Mas ela chegou ali.. e ela, uma boa aluna, não percebeu o que é que o professor queria. Não percebeu, ela não conseguiu compreender o que é que o PC queria. Queria que ela pusesse .. fizesse nos dois , ela não compreendeu.
Inv	Mas a Inês não pode manter uma atitude passiva, a deixar o PC a partir dali conduzir a aula.
Inês	Não, mas o professor estava a falar e eu não o ia interromper.
Inv	Pois não, mas podia ter ido para o pé da aluna e ajudar. Retomava dessa maneira o curso normal da aula. E o tempo que se perdeu ali com uma questão que devia ser ilustrada. Vocês têm de ensinar aos alunos como é que estes devem apresentar os resultados, de modo a habituá-los dar uma certa estrutura à forma como registam e apresentam as resoluções.
Inês	Sim, mas eles não têm esse cuidado.
Inv	Não têm esse cuidado, mas isto é um trabalho gradual, lento.
Inês	Não, por exemplo, expressões numéricas eles dão no 5º ano e aprendem a fazer. Eu assisti às aulas das minhas colegas do 5º ano e elas ensinam-nos como é que se faz. Põe-se o igual e começa-se a escrever outra vez, da direita para a esquerda e é assim que se resolve uma expressão numérica. Se a professora vir um teste dos meus alunos, tenho lá um ou dois que me fazem isso. O resto fazem um cálculo aqui e o outro cálculo lá em cima e nós temos de andar à procura a ver qual é … Não seguem aquela ordem. Por isso, para eles deve ser muito difícil seguirem aquela resolução
Inv	Mas se nós ficarmos a pensar que é muito difícil.
Inês	Pronto eu estou a dizer agora ao início.
Inv	Portanto devem insistir com eles. Façam a analogia com a poesia, por exemplo, isto é como um poema..
Inês	Na 3ª feira tiveram outra vez o mesmo problema.
Inv	É como se fosse um poema. Há uma determinada forma de apresentar os resultados, vamos todos fazer um esforço … É preciso ter a noção de que os alunos não aprendem de uma aula para a outra.
Inês	Só que já lá vão 15 dias e ainda não aprenderam.
Inv	Até poderão ser precisos anos e alguns nunca conseguirão perceber o equilíbrio e vantagem de terem tudo
Inês	Organizado.
Inv	De terem tudo organizado.
Mariana	Eu não sei, porque houve partes que o PC interrompeu e disse .. estava a pessoa no

Anexo 19
Excertos das sessões de trabalho com a futura professora Inês
(ST, 11/05/06)

	quadro, o aluno no quadro .. e ele disse «põe ali, é ali» e eles não .. ou não entendem o que a pessoa está a dizer ..
Inv	Não entendem.
Inês	Não, não estão com atenção.
Mariana	Não sei, porque .. o professor só faltou levantar-se e apontar, não é? Se os outros colegas ..
Inv	Mas era isso que eu estava a dizer à AA, vocês devem deixar o vosso passivo que assumem quando o professor intervém e dirigiam-se ao quadro e ajudavam a aluna.
Inês	Nós às vezes fazemos isso.
Inv	Sim, tem que ser. Têm de chamar a atenção dos alunos para aquilo que se pretende.
Mariana	Era bom, era óptimo. Até para nós a nível de corrigir as coisas, era óptimo.
Inês	Era o que eu estava a dizer. (não transcrevi uma pequena parte)
Inês	Eles têm muita dificuldade em organizar os dados. Acabam por, às vezes, errar por isso. Calculam aqui, depois calculam outro ali, depois têm de somar e já não sabem onde é que estão. É obvio que se tivessem tudo organizado, muitas vezes acertavam algumas coisas que são básicas e que nós vemos que eles erraram mesmo por isso. Por falta de organização dos dados.
Inv	Têm de insistir, batalhar. É um aspecto importante.
Mariana	É bastante. Facilita-nos a nós e é útil para eles.
Inês	É benéfico para eles.
Inv	É de pequeninos que nós nos habituamos a determinadas formas de proceder, de escrever, de apresentar.
Inês	Sim, sim.
Inv	Se ninguém insistir connosco ..
Mariana	Continuamos a fazer.
Inês	Alguns são muito organizados.
Inv	Óptimo. Com esses já não é precisamos de estar a batalhar.
Inês	Mas se lhes pedirmos que vão fazer ao quadro o que a Ana foi fazer não são capazes de fazer.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

- Dados Biográficos –

1. Nome: Inês

2. Data de nascimento: 01/07/83

3. Natural do Concelho de: Lisboa Distrito de Lisboa

4. Em tempo lectivo vive na sua residência habitual? Sim ☒ Não ☐

5. Se não reside com o agregado familiar, em tempo lectivo, com que regularidade vai a casa?

   Fins de semana ☐ uma vez por mês ☐ nas férias lectivas ☐

   outra periodicidade ☐ Qual? ____________

6. Estado civil: Solteira ☒ Casada ☐ Outra situação ☐

5. Presentemente, é trabalhadora estudante? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo indique a sua actividade profissional ____________________

____

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

- Percurso Escolar no Ensino Básico e Secundário –

Recorde o seu percurso escolar **nos ensinos básico e secundário**.

1. No **ensino básico**:

1.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? As notas eram geralmente boas e não tinha dificuldades de maior em nenhuma disciplina.

1.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ——

1.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☐ Bom ☒ Muito Bom ☐

Porquê? Tinha notas razoáveis apesar de notar que a minha aprendizagem ficou um pouco afectada porque houve uma lacuna no ensino no 2º ciclo

1.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? A Matemática é uma disciplina que utilizamos no dia-a-dia, mesmo quando não damos conta, por isso, me despertava mais interesse.

1.5 De entre as áreas da Matemática que fazem parte do currículo da escolaridade básica, ordene as abaixo indicadas de acordo com as suas preferências enquanto aluna.

(A) Álgebra
(B) Estatística e Probabilidades
(C) Geometria
(D) Números e Cálculo
(E) Funções

B / D / C / A / E
(1ª preferência) / (2ª preferência) / (3ª preferência) / (4ª preferência) / (5ª preferência)

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

1.6 Da lista anterior, em qual ou quais das áreas sentiu mais dificuldades?

Nas funções.

Porquê? É uma área que não gosto muito e talvez por isso tenha havido um maior desinteresse da minha parte, o que conduziu a maiores dificuldades.

2. No **ensino secundário:**

2.1 Considerava-se uma aluna de que nível?

Fraco ☐ Médio ☒ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? Consegui sempre concluir as disciplinas com notas razoáveis.

2.2 Reprovou alguma vez? Sim ☐ Não ☒

Em caso afirmativo, em que ano de escolaridade? ——

2.3 E na disciplina de Matemática como considerava o seu nível?

Fraco ☐ Médio ☒ Bom ☐ Muito Bom ☐

Porquê? No início do secundário tive algumas dificuldades a Matemática mas depois comecei a melhorar, também porque o nível de exigência da escola era maior.

2.4 Gostava de Matemática? Sim ☒ Não ☐

Porquê? Apesar da Matemática leccionada no secundário ser mais abstracta, continuava-se a encontrar a sua utilização no quotidiano. Além do mais, tinha uma professora que nos incentiva muito

2.5 Que classificação obteve a Matemática no final do ensino secundário? 11

(na escala de 1 a 20).

2.6 Como estudava Matemática (por exemplo: sozinha, com apoio, regularmente, resolvendo muitos exercícios, …)? Em casa estudava sozinha não todos os dias mas regularmente e resolvendo exercícios. Depois tinha apoio (explicação) onde resolvia exercícios

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

3. Relativamente ao ensino básico ou secundário, tente recordar-se de um professor de Matemática de quem tenha gostado (não se refira ao nome). Porque gostou desse professor? Gostei muito da minha professora de Matemática dos 3 anos do secundário porque nos transmitia os conhecimentos de uma forma simples e procurando-se sempre connosco. O ambiente nas aulas era muito agradável e mesmo que as notas nos testes não fossem as melhores, ela encorajava-nos sempre.

4. Tente agora recordar-se de um professor de Matemática do ensino básico ou secundário de quem não tenha gostado ? (não se refira ao nome). Porque não gostou desse professor Não gostei de uma professora que tive no 3º ciclo (9º ano) porque não só não conseguia explicar os conteúdos como não tinha respeito por nós. A relação professora - aluno era quase inexistente.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

– Percurso Escolar no Ensino Superior –

Relativamente ao seu percurso escolar na Escola Superior de Educação.

1. O curso que frequenta foi a sua primeira opção? Sim ☐ Não ☒

Em caso de resposta negativa, qual foi a sua primeira opção? Enfermagem

2. Em qualquer dos casos, indique a ou as razões que a levaram a optar por uma Licenciatura em Ensino da Matemática e Ciências?

O ano que ingressei no Ensino Superior não consegui entrar na 1ª opção e acabei por "entrar" na EST de Castelo Branco, em Engenharia Informática e das Tecnologias de Informação. Como não gostei, no ano seguinte pedi transferência para a ESECB.
Este pedido de transferência foi feito porque, desde pequena, sempre tive uma inclinação para o ensino, principalmente o do 1º ciclo. Mas como gostei muito do 2º ciclo, optei pela variante Matemática/Ciências

3. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1° e 2° ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente? 1° ciclo ☒ 2° ciclo ☐

Porquê? Para mim é o mais estimulante porque é onde os alunos aprendem imensas coisas.
Também gosto mais do 1º ciclo porque adoro trabalhar com crianças.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT1)

Questionário

4. Está a terminar a Prática Pedagógica no primeiro ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação, em relação à dimensão lectiva, para ser professora neste ciclo?

4.1 Genericamente:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☒ Bom ☐ Muito bom ☐

4.2 Em relação à Matemática:

A nível científico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

A nível pedagógico - Insuficiente ☐ Suficiente ☐ Bom ☒ Muito bom ☐

5. Qual o balanço que faz da disciplina de Prática Pedagógica:

5.1 Genericamente? É muito estimulante e gratificante porque a prática é muito mais importante que a teoria

5.2 No caso específico da Matemática? A Matemática no 1º ciclo é uma das áreas onde mais se aprende e que ajuda a desenvolver o raciocínio

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

Nome: Inês

Data: 20 /06/2006

PARTE I - Percurso Escolar no Ensino Superior (ESE)

Recorde o seu percurso em geral na ESE.

1. No ensino superior considera-se uma aluna de que nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Neste período de tempo que durou 4 anos aqui na ESE passei por muitas tarefas. (Algumas consegui resultados mais positivos e noutros mais baixos) No entanto, sempre ~~tentei~~ cumpri os prazos para entrega de trabalhos e realizei todas as frequências. Para além disso participei em todas as aulas de forma voluntária

2. E nas várias disciplinas da área científica de Matemática (Análise Infinitesimal, Álgebra, Estatística, Teoria da Probabilidade, Geometria, Teoria dos Números, História e Metodologia da Matemática) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☐ Médio ☒ Fraco ☐

Porquê? Houve algumas nas quais tive maiores dificuldades, principalmente a Análise Infinitesimal que ainda não fiz resolver 1 ou 2 exames ~~que~~. Mas também houve algumas que considerei mais acessíveis talvez porque seja uma área do que gosto muito, como a Estatística e Teoria da Probabilidade. No caso da Álgebra, tem conteúdos do que gostei mas na avaliação não obtive uma nota elevada.

3. E nas disciplinas da área de Educação em Matemática (Metodologia do Ensino da Matemática e Estruturas e Teorias de Ensino) como considera o seu nível?

Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Porquê? Gostei muito de MEM e talvez por isso tenha tirado uma nota tão elevada. As aulas eram diferentes: não tão teóricas e testando-nos ~~de~~ consecutivamente. Para além disso também trabalhámos com materiais manipuláveis. Estruturas e Teorias de Ensino vem no mesmo enquadramento apesar de algumas diferenças. Sendo que ambas nos preparam um pouquinho para a prática

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

4. Reprovou alguma vez no ensino superior, em disciplinas da área de Matemática/Educação em Matemática?

Sim ☒ Não ☐

4.1 Em caso afirmativo, indique quais as disciplinas e o número de reprovações (entenda por reprovação apenas situações que implicaram uma nova matrícula na disciplina).

Análise Infinitesimal

5. Gosta de Matemática?

Sim ☒ Não ☐

Porquê?

Apesar de ser 1 "bicho papão" considero a Matemática muito útil no nosso quotidiano. No fundo tudo tem 1 pouco de Matemática, o segredo é descobrir.
Sempre gostei de Matemática até que no 10º ano me deparei com uma mudança de escola e o decréscimo das notas. Aí começaram as dificuldades. Esse ano foi complicado. Mas no ano seguinte superei as dificuldades e melhorei as notas o que fez renascer o gosto pela Matemática.

6. Tente caracterizar a relação que manteve com a Matemática / Educação em Matemática durante o seu curso na ESE (refira-se aos diferentes domínios do conhecimento matemático com que mais/menos se identificou, às dificuldades sentidas, aos desafios da formação …).

Houve alguns domínios com que não me identifiquei. Acho que algumas disciplinas são importantes num curso de formação de professores para o 1º e 2º ciclo do EB no entanto também acho que algumas disciplinas são pouco adequadas, como por exemplo, a Análise Infinitesimal ou a Álgebra.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

7. Quer deixar algumas sugestões de mudanças possíveis?

Penso que seria importante haver mais disciplinas relacionadas com a didáctica da matemática. Assim, como mais direccionadas para o ensino dos conteúdos que nos compete leccionar na nossa prática.

8. Está a terminar a Prática Pedagógica no 2º ciclo do ensino básico. Qual considera ser o seu nível de preparação para ser professora de matemática neste ciclo?

A nível científico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

A nível pedagógico/didáctico: Muito bom ☐ Bom ☒ Médio ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

Na minha opinião a formação de professores ainda tem algumas lacunas. Aprendemos a "ensinar" na Prática Pedagógica porque há muita teoria que tenhamos assimilado mas não há nada como o contacto directo com as situações.

Nesta etapa foi muito importante a ajuda do professor supervisor e do cooperante que nos orientou e indicou as melhores estratégias facilitando-nos 1 pouco as dificuldades iniciais.

9. Que contributo lhe trouxe a realização de Prática Pedagógica no 1º ciclo do ensino básico para a Prática Pedagógico no 2º ciclo?

Gostei muito da Prática Pedagógica no 1º ciclo fascina-me o contacto com os mais novos. E esta prática fez-me ter uma primeira perspectiva, não muito real, do que é o ensino.

No entanto foi completamente diferente da do 2º ciclo que para mim foi algo

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

complicado no início

10. A licenciatura que frequenta confere-lhe habilitação profissional para a docência no 1º e 2º ciclos do ensino básico. Se puder escolher, em qual dos ciclos está, futuramente, interessada em exercer actividade docente?

1º ciclo [x] 2º ciclo [ ]

Porquê? Como já disse atrás gosto muito de trabalhar com os mais novos. Além disso o 1º ciclo permite-nos uma relação mais estreita com as crianças já que passamos mais tempo com elas.

11. Quais são as suas expectativas em relação à profissão que escolheu?

Neste momento não são muito animadoras. Apesar de ser optimista por natureza não posso deixar de ser realista. Está muito complicado! Assim sendo terei de procurar qualquer outra actividade que as minhas habilitações me permitam exercer.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

PARTE II – Percurso de Formação

Recorde o percurso de formação que fizemos em conjunto a partir de Janeiro de 2005, nas disciplinas de Geometria, História e Metodologia da Matemática e Prática Pedagógica.

1. Explicite a sua opinião sobre a relevância para a sua formação como professora de matemática que atribui aos diferentes momentos do percurso de formação:

1.1 Abordagem dos conteúdos relativos a Medida e resolução de problemas históricos em Geometria

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A Geometria permitiu-me 1 contacto com uma área que eu desconhecia. Acho interessante e importante trabalharmos problemas históricos.

1.2 Seminários de sensibilização para a importância da história da matemática, da resolução de problemas e do estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? É sempre importante haver uma referência à história da matemática porque nos ajuda no enquadramento.
A sensibilização para a resolução de problemas também foi importante até porque é uma das estratégias mais utilizadas.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

1.3 Sessões de apoio à planificação da Prática Pedagógica

Muito relevante [ ] Relevante [x] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? Alertou-nos para alguns aspectos que possivelmente nos teriam "passado ao lado" e ajudou-nos na escolha das actividades.

1.4 Momentos de reflexão sobre a Prática Pedagógica

Muito relevante [ ] Relevante [x] Pouco relevante [ ] Nada relevante [ ]

Porquê? Permitiu-nos analisar a nossa prática e detectar-mos os nossos erros para pussem os podermos corrigir.

2. Como considera, no conjunto, a adequação à sua formação como professora de matemática das tarefas de formação propostas:

2.1 Análise de documentos curriculares

Muito adequada [ ] Adequada [x] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.2 Análise de manuais escolares

Muito adequada [ ] Adequada [x] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.3 Resolução de problemas

Muito adequada [x] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

2.4 Exploração didáctica de problemas históricos

Muito adequada [x] Adequada [ ] Pouco adequada [ ] Nada adequada [ ]

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

2.5 Faça um comentário global às tarefas propostas.

De um modo geral as tarefas propostas ~~est~~ foram bem seleccionadas e estavam adequadas ao conteúdo e aos alunos.

3. Qual o papel que atribui ao trabalho que desenvolveu na planificação e dinamização do módulo que lhe coube explorar na exposição "Problemas com Peso e Medida" para o desenvolvimento do seu conhecimento para ensinar matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? A exposição permitiu-nos resolver um problema utilizando materiais manipuláveis o que nos deu uma outra perspectiva da resolução de problemas e que motivou os alunos.

3.1 Se explorou na sala de aula um dos problemas da exposição ou algum problema que apelasse a aspectos da exposição, refira-se a essa experiência de ensino/aprendizagem.

Os alunos mostraram-se muito interessados em resolver um problema que tinha resolvido na exposição mas sem os materiais manipuláveis. A maioria resolveu-o sem dificuldades de maior, e alguns até ainda se lembravam do resultado. sic

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

4. Qual a relevância do contributo, como futura professora de matemática, do percurso de formação a nível de:

4.1 Formação em matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Trabalhar com problemas históricos permitiu-me ter contacto com uma outra área da Matemática que a formação académica não engloba

4.2 Formação em didáctica da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Algumas das tarefas podiam ser resolvidas utilizando materiais manipuláveis. Permitiram também desenvolver outras estratégias.

4.3 Mudança de atitude face à matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Permitiu-me ver a matemática de uma outra perspectiva englobando mais conteúdos

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

4.4 Mudança de atitude face ao processo de ensino e aprendizagem da matemática

Muito relevante ☐ Relevante ☒ Pouco relevante ☐ Nada relevante ☐

Porquê? Inserem-se outros conteúdos no ensino/aprendizagem da Matemática.

5. Como avalia a receptividade do(a) Professor(a) Cooperante às tarefas de ensino que envolveram problemas históricos e que integrou na sua Prática Pedagógica?

Muito receptivo ☐ Receptivo ☒ Pouco receptivo ☐ Nada receptivo ☐

Explicite a sua resposta.

O professor cooperante nunca pôs quaisquer entraves à realização das actividades.

6. Que perspectiva tem hoje relativamente à integração da história da matemática na aula de matemática?

Penso que não é muito bem integrada e que poderia ser uma mais valia para o ensino da Matemática.

Anexo 8
Respostas de Inês aos questionários (QT2)

Questionário

---

7. Como sente o contributo do percurso de formação para conseguir articular na sua prática de ensino, a história da matemática, a resolução de problemas e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática (ligações entre a matemática e outras disciplinas curriculares, ligações entre a matemática e problemas do quotidiano das sociedades, ligações entre conceitos / processos matemáticos)?

De um modo geral penso que me vai facilitar porque também me ajudou em muitos aspectos da prática pedagógica já que tenho alguma dificuldade em estabelecer conexões.

8. Como caracteriza o ambiente de formação proporcionado (relações com a investigadora, relacionamento com a(s) colega (s) de Prática Pedagógica, relações com as colegas de turma, …)?

Muito bom ☒ Bom ☐ Razoável ☐ Fraco ☐

Explicite a sua resposta.

O ambiente foi sempre descontraído e num clima de democrática discussão de ideias o que beneficiou tudo e todos.

Muito obrigada pela sua colaboração.

Fátima Regina Jorge

Fátima Regina Jorge